

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный университет

VIII Международный конкурс
исследовательских работ молодых ученых
Академические исследования

Научно-исследовательская работа
Многопользовательская квантовая телепортация в непрерывных
переменных

Выполнил: Нестерова Елизавета Алексеевна

студент 1 курса магистратуры

Руководитель: Королев Сергей Борисович

Доцент кафедры Общая физика 1

Оглавление

1	Введение	3
2	Протокол тринаправленной телепортации на двенадцатиузловом кластерном состоянии в непрерывных переменных	6
2.1	Генерация ресурсного состояния	6
2.1.1	Тринаправленная телепортация: Боб – Алиса – Чарли – Боб	9
2.1.2	Транаравленная телепортация: Алиса – Боб – Чарли – Алиса	13
2.1.3	Двунаправленная телепортация с общим ресурсом	14
2.1.4	Телепортация двух состояний третьему пользователю	16
2.2	Протокол тринаправленной телепортации на трех трехмодовых кластерных состояниях	17
2.2.1	Протокол тринаправленной телепортации с тремя независимыми кластерными состояниями	17
2.2.2	Телепортация в различные узлы трехузлового линейного кластерного состояния	18
2.3	Протокол тринаправленной телепортации на множестве двухузловых кластерных состояниях	21
3	Эффективность протоколов тринаправленной телепортации в непрерывных переменных	23
4	Заключение	26

Глава 1

Введение

Данная исследовательская работа направлена на изучение многопользовательской квантовой телепортации в непрерывных переменных.

Идея создания квантового компьютера возникла в конце прошлого столетия и до сих пор является актуальной и значимой.

Особый интерес эта область представляет при решении задач "экспоненциально-го" класса, время решения которых на классическом компьютере экспоненциально растет с ростом числа входных данных. Квантовый компьютер, благодаря некоторой специфике работы, способен решать такие же задачи сравнительно быстро.

Протокол квантовой телепортации был первоначально разработан для передачи неизвестного квантового состояния от одного пользователя (Алисы) к другому пользователю (Бобу) [1]. Основное ограничение данного протокола заключается в том, что телепортация ведется лишь в одном направлении от Алисы к Бобу (такой протокол будем называть протоколом однонаправленной телепортации (ОТ)). Чтобы обменяться квантовыми состояниями Алисе и Бобу нужно дважды реализовывать протокол ОТ. Чтобы ускорить процесс обмена квантовыми состояниями, был предложен протокол двунаправленной телепортации (ДТ) [2, 3, 4, 5, 6, 7], в котором Алиса и Боб могут одновременно передавать состояния друг другу. Если предположить, что кроме Алисы и Боба есть еще третий участник обмена - Чарли, протокола двунаправленной телепортации также будет недостаточно. В этом случае требуется уже протокол тринаправленной телепортации (ТТ), в котором Алиса Боб и Чарли смогут обмениваться своими квантовыми состояниями друг с другом.

Протокол тринаправленной телепортации был предложен для физических систем, описываемых дискретными переменными [2, 3, 4, 5, 6, 7]. В этом протоколе используются многочастично перепутанные состояния, которые выступают в качестве основного ресурса для реализации телепортации. Однако, в использовании физических систем в дискретных переменных есть существенный недостаток, а именно вероятностный характер перепутывающей операции [3]. Использование таких операций приводит к тому, что вероятность создания большого перепутанного состояния (с большим числом связей) становится крайне малой. На создание подходящего ресурса требуется много времени, что, конечно же, негативно сказывается на скорости передачи сообщений в квантовой сети.

Чтобы избежать данной проблемы, можно использовать другие физические системы – физические системы, описываемые непрерывными переменными. Такие физические системы перепутываются детерминистическим образом. В работах [8],[9] было показано, что, как однонаправленная, так и двунаправленная телепортации квантовых состояний можно реализовать на физических системах в непрерывных переменных. Все это означает, что физические системы в непрерывных переменных также можно использовать для реализации многопользовательской квантовой телепортации. Разработке протокола тринаправленной телепортации в непрерывных переменных будет освещена наша работа.

Однако, физические системы в непрерывных переменных также имеют свои недостатки. Для реализации телепортации необходимы сжатые состояния, которые перепутываются между собой. Получившееся многочастично перепутанное состояние образует основной ресурс. При использовании такого ресурса, в телепортируемом состоянии появляется неустранимая ошибка пропорциональная величине сжатия использованных состояний и числу используемых физических систем. Уменьшение ошибки телепортации возможно, в случае использования состояний с большим сжатием, что является проблематично с практической точки зрения. Другой способ уменьшить ошибку - оптимизировать ресурсное многочастично перепутанное состояние [10]. В процессе оптимизации производится поиск оптимального числа сжатых состояний, которые позволяют реализовать телепортацию с наименьшей ошибкой, а также выбор правильной конфигурации ресурсного состояния.

Целью данной работы является разработка протокола тринаправленной квантовой телепортации в непрерывных переменных, а также поиск оптимальных конфигураций используемого ресурсного состояния.

Основные положения: В работе мы предложим протокол ТТ в непрерывных переменных, в котором три пользователя обмениваются квантовыми состояниями. Особенностью нашего протокола является то, что в нем пользователи могут выбирать различные сценарии реализации ТТ. Протокол позволяет реализовывать три различных сценария ТТ. В первом все три участника обмениваются тремя своими состояниями одновременно. Во втором два участника обмениваются своими состояниями попарно, а третий свое состояние никому не передает. В третьем один из участников получает два состояния других пользователей.

Помимо этого мы рассмотрим несколько способов реализации предложенного протокола ТТ в непрерывных переменных, отличающиеся основным ресурсом. Мы проанализируем ошибки, получаемые при реализации протокола различными способами, и оптимизируем протокол так, чтобы ошибка была минимально возможной.

Научная и практическая значимость:

Развитие протоколов квантовой телепортации послужит хорошей подготовкой к работе с квантовыми компьютерами. Многопользовательская сеть, которую мы предложим в своей работе, позволяет настроить настоящий ”квантовый интернет” между тремя пользователями, тем самым позволяя распределить одну задачу между несколькими квантовыми компьютерами, что, несомненно, может ускорить ее решение.

Не менее актуальной является возможность безопасной передачи информации, которую обеспечивает квантовая телепортация. Наши протоколы позволяют создать уникальную коммуникационную сеть для трех участников.

Полученные в исследовании результаты подтверждаются за счет корректного **использования методов** квантовой-механики и строгого физического обоснования всех приближений и предложений, используемых в работе. Для решения поставленных задач был использован математический аппарат квантовой электродинамики. Построенная теоретическая модель обобщает результаты, полученные другими исследователями.

Глава 2

Протокол тринаправленной телепортации на двенадцатиузловом кластерном состоянии в непрерывных переменных

2.1. Генерация ресурсного состояния

Первым этапом реализации тринаправленной телепортации является генерация основного ресурса. В качестве основного ресурса будем использовать кластерное состояние. Кластерное состояние – это квантовое многочастично-перепутанное состояние, которое характеризуется математическим графом. Узлами графа являются физические системы в непрерывных переменных, а ребрами – перепутанности между ними.

Чтобы сгенерировать кластерное состояние используются квантовые осцилляторы в квадратурно-сжатых состояниях. Каждое состояние осцилляторов задается с помощью операторов квадратур $\hat{x}$ и $\hat{y}$, подчиняющихся каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}_j, \hat{y}_k] = \frac{i}{2} \delta_{j,k}, \quad (2.1)$$

где индексы j и k нумеруют соответствующий осциллятор, $\delta_{j,k}$ - символ Кронекера. При этом мы будем считать, что все осцилляторы сжаты по $\hat{y}$ -квадратуре [11], т.е. их среднеквадратичные флуктуации меньше среднеквадратичных флуктуаций вакуумного состояния:

$$\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle < \frac{1}{4}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Чтобы превратить независимые сжатые осцилляторы в перепутанное кластерное состояние используются линейно оптическое преобразование (преобразование Боголюбова) [12]. Мат-

рица такого преобразования имеет следующий вид:

$$U = (I + iA)(I + A^2)^{-1/2}, \quad (2.3)$$

где A – это матрица смежности графа генерируемого кластерного состояния, а I – единичная матрица. Матрица смежности A – это симметричная матрица, которая полностью определяет граф кластерного состояния. Элементами матрицы смежности A_{ij} – это вещественные числа, которые называются весовыми коэффициентами кластерного состояния. Если элемент матрицы смежности равен нулю, то узлы с номерами i и j в графе не связаны.

Для реализации протокола тринаправленной телепортации будем использовать двенадцатиузловое кластерное состояние, которое имеет граф, представленный на Рис. 2.1.

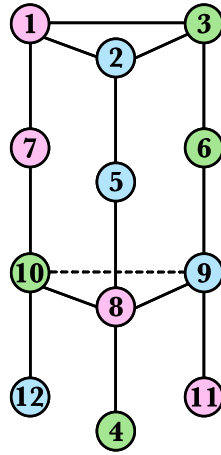


Рис. 2.1: Двенадцатиузловое кластерное состояние, используемое для протокола тринаправленной телепортации в непрерывных переменных.

Конфигурация данного кластерного состояния (граф кластерного состояния) выбиралась из соображения симметрии для всех трех участников телепортации. Так как три участника телепортации должны быть полностью равнозначны, распределение узлов кластерного состояния должно быть равномерным. Так узлы: 1, 7, 8, 11 – принадлежат Алисе; 2, 5, 9, 12 – Бобу; 3, 6, 4, 10 – Чарли.

Матрица смежности рассматриваемого графа имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & & & & & & & & &
 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Зная матрицу смежности можно вычислить матрицу преобразования Боголюбова (2.3), которое необходимо совершить над независимыми сжатыми квантовыми осцилляторами, чтобы перевести их в перепутанное кластерное состояние. Связь между операторами квадратур кластерного состояния и операторами квадратур сжатых независимых осцилляторов задается следующим соотношением:

$$\hat{\vec{X}} + i\hat{\vec{Y}} = (I + iA_{12}) (I + A_{12}^2)^{-1/2} (\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s) \equiv (I + iA_{12}) (\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r), \quad (2.5)$$

где $\hat{\vec{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_{12})^T$ и $\hat{\vec{Y}} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_{12})^T$ – вектора, состоящие из квадратур кластерного состояния; $\hat{\vec{x}}_s = (\hat{x}_{s,1}, \hat{x}_{s,2}, \dots, \hat{x}_{s,12})^T$ и $\hat{\vec{y}}_s = (\hat{y}_{s,1}, \hat{y}_{s,2}, \dots, \hat{y}_{s,12})^T$ – вектора, состоящие из квадратур сжатых осцилляторов. Здесь для упрощения записи введем новые квадратуры, которые являются линейными комбинациями сжатых квадратур и задаются следующим образом: $\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r = (I + A_{12}^2) (\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s)$. Учитывая данные сокращения, а также явный вид матрицы смежности (2.4) можно записать связь между квадратурами кластерного

состояния и линейными комбинациями квадратур сжатых состояний следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_2 + i\hat{Y}_2 \\ \hat{X}_3 + i\hat{Y}_3 \\ \hat{X}_4 + i\hat{Y}_4 \\ \hat{X}_5 + i\hat{Y}_5 \\ \hat{X}_6 + i\hat{Y}_6 \\ \hat{X}_7 + i\hat{Y}_7 \\ \hat{X}_8 + i\hat{Y}_8 \\ \hat{X}_9 + i\hat{Y}_9 \\ \hat{X}_{10} + i\hat{Y}_{10} \\ \hat{X}_{11} + i\hat{Y}_{11} \\ \hat{X}_{12} + i\hat{Y}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{r,1} - \hat{y}_{r,2} - \hat{y}_{r,3} - \hat{y}_{r,7} + i(\hat{y}_{r,1} + \hat{x}_{r,2} + \hat{x}_{r,3} + \hat{x}_{r,7}) \\ \hat{x}_{r,2} - \hat{y}_{r,1} - \hat{y}_{r,3} - \hat{y}_{r,5} + i(\hat{y}_{r,2} + \hat{x}_{r,1} + \hat{x}_{r,3} + \hat{x}_{r,5}) \\ \hat{x}_{r,3} - \hat{y}_{r,1} - \hat{y}_{r,2} - \hat{y}_{r,6} + i(\hat{y}_{r,3} + \hat{x}_{r,1} + \hat{x}_{r,2} + \hat{x}_{r,6}) \\ \hat{x}_{r,4} - \hat{y}_{r,8} + i(\hat{y}_{r,4} + \hat{x}_{r,8}) \\ \hat{x}_{r,5} - \hat{y}_{r,2} - \hat{y}_{r,8} + i(\hat{y}_{r,5} + \hat{x}_{r,2} + \hat{x}_{r,8}) \\ \hat{x}_{r,6} - \hat{y}_{r,3} - \hat{y}_{r,9} + i(\hat{y}_{r,6} + \hat{x}_{r,3} + \hat{x}_{r,9}) \\ \hat{x}_{r,7} - \hat{y}_{r,1} - \hat{y}_{r,10} + i(\hat{y}_{r,7} + \hat{x}_{r,1} + \hat{x}_{r,10}) \\ \hat{x}_{r,8} - \hat{y}_{r,4} - \hat{y}_{r,5} + \hat{y}_{r,9} + \hat{y}_{r,10} + i(\hat{y}_{r,8} + \hat{x}_{r,4} + \hat{x}_{r,5} - \hat{x}_{r,9} - \hat{x}_{r,10}) \\ \hat{x}_{r,9} - \hat{y}_{r,6} - \hat{y}_{r,11} + \hat{y}_{r,8} + \hat{y}_{r,10} + i(\hat{y}_{r,9} + \hat{x}_{r,6} + \hat{x}_{r,11} - \hat{x}_{r,8} - \hat{x}_{r,10}) \\ \hat{x}_{r,10} - \hat{y}_{r,7} - \hat{y}_{r,12} + \hat{y}_{r,8} + \hat{y}_{r,9} + i(\hat{y}_{r,10} + \hat{x}_{r,7} + \hat{x}_{r,12} - \hat{x}_{r,8} - \hat{x}_{r,9}) \\ \hat{x}_{r,11} - \hat{y}_{r,9} + i(\hat{y}_{r,11} + \hat{x}_{r,9}) \\ \hat{x}_{r,12} - \hat{y}_{r,10} + i(\hat{y}_{r,12} + \hat{x}_{r,10}) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Используя данную связь мы сможем аналитически описать результаты тринаправленной телепортации.

2.1.1. Тринаправленная телепортация: Боб – Алиса – Чарли – Боб

После того, как мы определились с основным ресурсом, мы можем перейти непосредственно к реализации протокола тринаправленной телепортации.

Давайте начнем наше исследование тринаправленной телепортации со случая, когда три участника (Боб, Алиса и Чарли) обмениваются своими состояниями по кругу. Боб передает свое состояние, описываемое оператором уничтожения $\hat{b}_{in} = \hat{x}_b + i\hat{y}_b$, Алисе. Алиса передает свое состояние ($\hat{a}_{in} = \hat{x}_a + i\hat{y}_a$) Чарли, а Чарли передает свое состояние ($\hat{c}_{in} = \hat{x}_c + i\hat{y}_c$) Бобу. Этот случай, изображен на Рис. 2.2 а).

Чтобы произвести телепортацию Алиса, Боб и Чарли примешивают свои телепортируемые состояния к общему кластерному состоянию, которое распределено между ними. Для этого они используют симметричный светоделитель, матрица преобразования которого имеет следующий вид:

$$U_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Алиса примешивает свое телепортируемое состояние к первой моде кластерного состояния, Боб ко второй, а Чарли к третьей. В результате такого смешения поля квадратуры входных мод участников, а также квадратуры полей в узлах 1 - 3 кластерного состояния пре-

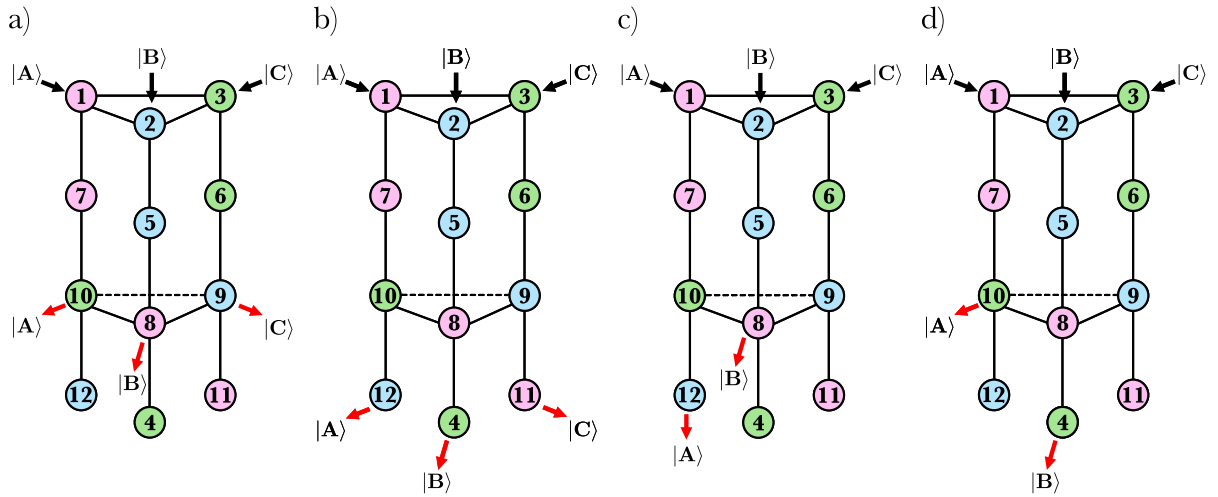


Рис. 2.2: Различные случаи реализации протокола тринеправленной телепортации: а) случай, когда Алиса передает Чарли, Чарли передает Бобу, а Боб – Алисе; б) случай, когда Алиса передает Бобу, Боб передает Чарли, а Чарли передает Алисе; в) случай, когда только Алиса и Боб обмениваются состояниями; д) случай, когда Алиса и Боб передают свои состояния Чарли. На рисунке разными цветами обозначены узлы, принадлежащие разным участникам: розовым – узлы Алисы, синим – узлы Боба, зеленым – узлы Чарли.

образуются следующим образом:

$$\hat{A}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_a + \hat{x}_{r,1} - \hat{y}_{r,2} - \hat{y}_{r,3} - \hat{y}_{r,7} + i(\hat{y}_a + \hat{y}_{r,1} + \hat{x}_{r,2} + \hat{x}_{r,3} + \hat{x}_{r,7})), \quad (2.8)$$

$$\hat{A}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_a - \hat{x}_{r,1} + \hat{y}_{r,2} + \hat{y}_{r,3} + \hat{y}_{r,7} + i(\hat{y}_a - \hat{y}_{r,1} - \hat{x}_{r,2} - \hat{x}_{r,3} - \hat{x}_{r,7})), \quad (2.9)$$

$$\hat{B}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_b + \hat{x}_{r,2} - \hat{y}_{r,1} - \hat{y}_{r,3} - \hat{y}_{r,5} + i(\hat{y}_b + \hat{y}_{r,2} + \hat{x}_{r,1} + \hat{x}_{r,3} + \hat{x}_{r,5})), \quad (2.10)$$

$$\hat{B}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_b - \hat{x}_{r,2} + \hat{y}_{r,1} + \hat{y}_{r,3} + \hat{y}_{r,5} + i(\hat{y}_b - \hat{y}_{r,2} - \hat{x}_{r,1} - \hat{x}_{r,3} - \hat{x}_{r,5})), \quad (2.11)$$

$$\hat{C}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_c + \hat{x}_{r,3} - \hat{y}_{r,1} - \hat{y}_{r,2} - \hat{y}_{r,6} + i(\hat{y}_c + \hat{y}_{r,3} + \hat{x}_{r,1} + \hat{x}_{r,2} + \hat{x}_{r,6})), \quad (2.12)$$

$$\hat{C}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_c - \hat{x}_{r,3} + \hat{y}_{r,1} + \hat{y}_{r,2} + \hat{y}_{r,6} + i(\hat{y}_c - \hat{y}_{r,3} - \hat{x}_{r,1} - \hat{x}_{r,2} - \hat{x}_{r,6})). \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Следующим этапом процедуры телепортации является измерение. Алиса, Боб и Чарли должны измерить поля, получившиеся на выходе из светоделителя, а также поля в модах 5 - 7, 4 и 11-12. Неизмеряемые моды, в данном случае 8, 9, 10, являются выходными узлами (их состояния являются результатом телепортации). Для измерений в схеме используются гомодинные детекторы, которые измеряют линейную комбинацию квадратур поля. Квантовую амплитуду фототока, получаемую в результате гомодинного измерения поля с квадратурами $\hat{x}$ и $\hat{y}$, можно записать в следующем виде

$$\hat{i} = \beta_0 (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}), \quad (2.15)$$

где β_0 – это амплитуда локального осциллятора, используемого при данном детектировании, а θ – его фаза. Квантовые фототоки, полученные в результате всех измерений, можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta_{A_{in}} \hat{Y}_{A'_{in}} + \cos \theta_{A_{in}} \hat{X}_{A'_{in}} = \frac{\hat{i}_{A_{in}}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{A_1} \hat{Y}_{A'_1} + \cos \theta_{A_1} \hat{X}_{A'_1} = \frac{\hat{i}_{A_1}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{B_{in}} \hat{Y}_{B'_{in}} + \cos \theta_{B_{in}} \hat{X}_{B'_{in}} = \frac{\hat{i}_{B_{in}}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{B_1} \hat{Y}_{B'_1} + \cos \theta_{B_1} \hat{X}_{B'_1} = \frac{\hat{i}_{B_1}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{C_{in}} \hat{Y}_{C'_{in}} + \cos \theta_{C_{in}} \hat{X}_{C'_{in}} = \frac{\hat{i}_{C_{in}}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{C_1} \hat{Y}_{C'_1} + \cos \theta_{C_1} \hat{X}_{C'_1} = \frac{\hat{i}_{C_1}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_4 \hat{Y}_4 + \cos \theta_4 \hat{X}_4 = \frac{\hat{i}_4}{\beta_0}, \\ \sin \theta_5 \hat{Y}_5 + \cos \theta_5 \hat{X}_5 = \frac{\hat{i}_5}{\beta_0}, \\ \sin \theta_6 \hat{Y}_6 + \cos \theta_6 \hat{X}_6 = \frac{\hat{i}_6}{\beta_0}, \\ \sin \theta_7 \hat{Y}_7 + \cos \theta_7 \hat{X}_7 = \frac{\hat{i}_7}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{11} \hat{Y}_{11} + \cos \theta_{11} \hat{X}_{11} = \frac{\hat{i}_{11}}{\beta_0}, \\ \sin \theta_{12} \hat{Y}_{12} + \cos \theta_{12} \hat{X}_{12} = \frac{\hat{i}_{12}}{\beta_0}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Из-за наличия перепутанностей между модами исследуемой системы, измерение одних мод повлияет на другие. Чтобы отследить это влияние, необходимо решить систему уравнений (2.16) относительно квадратур $\hat{x}_{r,i}$ и подставить это решение в выражения для неизмеренных квадратур. Анализируя связи неизмеренных квадратур с входными состояниями, мы можем найти необходимые фазы гомодинных детекторов, которые приводят к успешной реализации протокола телепортации. Эти фазы выглядят следующим образом:

$$\theta_{A_{in}} = \theta_{B_{in}} = \theta_{C_{in}} = 0, \quad (2.17)$$

$$\theta_{A_1} = \theta_{B_1} = \theta_{C_1} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.18)$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \frac{\pi}{2}, \quad (2.19)$$

$$\theta_4 = \theta_{11} = \theta_{12} = 0. \quad (2.20)$$

Учитывая полученные ограничения на фазы гомодинных детекторов, связь между выходными (неизмеряемыми) и входными квадратурами можно записать в векторном виде

следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,A} \\ \hat{X}_{out,B} \\ \hat{X}_{out,C} \\ \hat{Y}_{out,A} \\ \hat{Y}_{out,B} \\ \hat{Y}_{out,C} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_8 \\ \hat{X}_9 \\ \hat{X}_{10} \\ \hat{Y}_8 \\ \hat{Y}_9 \\ \hat{Y}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_a \\ \hat{y}_b \\ \hat{y}_c \\ \hat{y}_a \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta_0} \begin{pmatrix} \hat{i}_5 - \sqrt{2}\hat{i}_{Bin} \\ \hat{i}_6 - \sqrt{2}\hat{i}_{Cin} \\ \hat{i}_7 - \sqrt{2}\hat{i}_{Ain} \\ \hat{i}_4 - \hat{i}_6 - \hat{i}_7 - \sqrt{2}\hat{i}_{B1} \\ \hat{i}_{11} - \hat{i}_5 - \hat{i}_7 - \sqrt{2}\hat{i}_{C1} \\ \hat{i}_{12} - \hat{i}_5 - \hat{i}_6 - \sqrt{2}\hat{i}_{A1} \end{pmatrix} + E_{BCA}, \quad (2.21)$$

где для сокращения записи был введен вектор вида:

$$\hat{E}_{BCA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \\ \hat{y}_{r,4} \\ \hat{y}_{r,5} \\ \hat{y}_{r,6} \\ \hat{y}_{r,7} \\ \hat{y}_{r,8} \\ \hat{y}_{r,9} \\ \hat{y}_{r,10} \\ \hat{y}_{r,11} \\ \hat{y}_{r,12} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

В уравнении (2.21) первое слагаемое в правой части указывает на то, что тринаправленная телепортация произошла успешно. Алиса, Боб и Чарли обменялись своими состояниями.

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.21) отвечают за измеряемые фототоки. После проведения всех измерений операторы фототоков заменяются на вещественные числа, соответствующие результатам измерения. Так как в эксперименте Алиса, Боб и Чарли знают свои значения фототоков, то они могут сообщить их друг другу и скомпенсировать в выходных квадратурах все классические величины (вещественные слагаемые) с помощью операции смещения квадратур. В результате такого смещения, в векторе (2.21) пропадет второе слагаемое, а результаты телепортации не будут зависеть от результатов измерений.

Третье слагаемое в правой части уравнения (2.21) – это ошибка, которая пропорциональна линейным комбинациям квадратур используемых сжатых осцилляторов. Для оценки величины ошибок здесь и далее нам нужно перейти от операторов ошибок к их среднеквадратичным флуктуациям. При этом мы учитываем, что используемые сжатые осцилляторы независимы и сжаты одинаковым образом. То есть справедливо соотношение: $\langle \delta \hat{y}_{s,i} \delta \hat{y}_{s,j} \rangle = \delta_{ij} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, где δ_{ij} – это символ кронекера. Учитывая это, а также то, что $\hat{\vec{y}}_r = (I + A_{12}^2) \hat{\vec{y}}_s$, мы можем переписать вектор операторов ошибок (2.22) в виде вектора их среднеквадратичных

флуктуаций:

$$\delta \hat{e}_{BCA}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.23)$$

Мы видим, что данный вектор пропорционален величине среднеквадратичной флуктуации сжатой квадратуры используемых осцилляторов. Чем сжатие используемых квантовых осцилляторов будет больше, тем меньше будут среднеквадратичные флуктуации ошибок, а значит тем меньше будут влиять ошибки на результаты тринаправленной телепортации. Ни же, мы будем подробнее обсуждать ошибки вычислений и проводить оптимизацию кластерного состояния, чтобы ошибка была наименьшей.

2.1.2. Тринаправленная телепортация: Алиса – Боб – Чарли – Алиса

Давайте теперь рассмотрим другой вариант тринаправленной телепортации, в котором передача ведется в обратном направлении. Алиса передает свое состояние Бобу, Боб передает свое состояние Чарли, а Чарли свое состояние отправляет Алисе. Этот случай представлен на Рис. 2.2 b).

Чтобы осуществить телепортацию, Алиса, Боб, и Чарли, как и раньше, примешивают с помощью симметричных светоделителей свои входные состояния к первому второму и третьему узлам кластерного состояния, соответственно. Далее они проводят гомодинные измерения всех состояний, кроме состояний в узлах 11, 12, 4 - выходные узлы. В конце, зная результаты гомодинных измерений друг друга, они компенсируют классические поля, и получают результаты телепортации.

Анализируя уравнения, описывающие данный случай мы получили, что для успешной телепортации необходимо подобрать следующие фазы локальных осцилляторов гомодинных детекторов:

$$\theta_{A_{in}} = \theta_{B_{in}} = \theta_{C_{in}} = \frac{\pi}{4}, \quad (2.24)$$

$$\theta_{A_1} = \theta_{B_1} = \theta_{C_1} = \frac{3\pi}{4}, \quad (2.25)$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \frac{\pi}{2}, \quad (2.26)$$

$$\theta_8 = \theta_9 = \theta_{10} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.27)$$

При этом связь между выходными и входными квадратурами имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,A} \\ \hat{X}_{out,B} \\ \hat{X}_{out,C} \\ \hat{Y}_{out,A} \\ \hat{Y}_{out,B} \\ \hat{Y}_{out,C} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_{11} \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_{11} \\ \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{y}_c \\ \hat{y}_a \\ \hat{y}_b \end{pmatrix} + E_{CAB}, \quad (2.28)$$

где введено следующее сокращение:

$$E_{CAB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \\ \hat{y}_{r,4} \\ \hat{y}_{r,5} \\ \hat{y}_{r,6} \\ \hat{y}_{r,7} \\ \hat{y}_{r,8} \\ \hat{y}_{r,9} \\ \hat{y}_{r,10} \\ \hat{y}_{r,11} \\ \hat{y}_{r,12} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Как и в прошлом случае мы получаем тринаправленную телепортацию с ошибкой. Величины среднеквадратичных флуктуаций ошибок в этом случае, можно записать в векторном виде следующим образом:

$$\delta \hat{e}_{CAB}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.30)$$

Здесь, как и раньше видно, что с ростом величины сжатия уменьшается ошибка телепортации.

2.1.3. Двухнаправленная телепортация с общим ресурсом

В прошлых подразделах мы рассмотрели два возможных случая тринаправленной телепортации, в которых участвуют три участника. Однако, на практике может случиться ситуация, когда одному из участников (Чарли) не нужно ничего передавать и получать. Обмен

состояниями ведется только между Алисой и Бобом. Реализация данного протокола представлена на Рис. 2.2 с).

Чтобы реализовать такой протокол, Алиса и Боб примешивают свои передаваемые состояния с помощью симметричных светоделителей к первому и второму узлам кластерного состояния, соответственно. Далее они проводят гомодинные измерения. В данном случае выходными узлами Алисы и Боба будут узлы с номерами 8 и 12, соответственно. Выбирая фазы локальных осцилляторов гомодинных детекторов как:

$$\theta_{A_{in}} = \frac{\pi}{4}, \quad (2.31)$$

$$\theta_{B_{in}} = 0, \quad (2.32)$$

$$\theta_{A_1} = \frac{3\pi}{4}, \quad (2.33)$$

$$\theta_{B_1} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.34)$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.35)$$

$$\theta_4 = 0. \quad (2.36)$$

Алиса и Боб смогут обмениваться состояниями друг с другом. При этом вектор выходных квадратур можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,A} \\ \hat{X}_{out,B} \\ \hat{Y}_{out,A} \\ \hat{Y}_{out,B} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_8 \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Y}_8 \\ \hat{Y}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_b \\ \hat{x}_a \\ \hat{y}_b \\ \hat{y}_a \end{pmatrix} + E_{BA}, \quad (2.37)$$

где

$$E_{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \\ \hat{y}_{r,4} \\ \hat{y}_{r,5} \\ \hat{y}_{r,6} \\ \hat{y}_{r,7} \\ \hat{y}_{r,8} \\ \hat{y}_{r,9} \\ \hat{y}_{r,10} \\ \hat{y}_{r,11} \\ \hat{y}_{r,12} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

А вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок в данном случае выглядит следующим

образом.

$$\delta \hat{e}_{BA}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.39)$$

Здесь важно отметить, что такой случай телепортаций никак не зависит от того измерялись ли состояния в узлах 3, 9, 11. Состояния в этих узлах без измерения остаются в перепутанных состояниях и не влияют на реализацию процедуры двунаправленной телепортации.

Аналогичным образом можно реализовать протокол по обмену состояниями между Алисой и Чарли или Чарли и Бобом.

2.1.4. Телепортация двух состояний третьему пользователю

Использование данного кластерного состояния возможно не только для обмена квантовыми состояниями. Давайте рассмотрим случай тринаправленной телепортации, когда Алиса и Боб передают свои состояния Чарли. Этот случай представлен на Рис. 2.2 d).

Для реализации такого протокола Алиса и Боб, как и раньше, примешивают свои передаваемые состояния к первому и второму узлам, соответственно. Далее они проводят гомотинные измерения. Подбирая фазы локальных осцилляторов следующим образом:

$$\theta_{A_{in}} = \pi, \quad (2.40)$$

$$\theta_{B_{in}} = \frac{\pi}{4}, \quad (2.41)$$

$$\theta_{A_1} = \theta_3 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = \frac{\pi}{2}, \quad (2.42)$$

$$\theta_{B_1} = \frac{3\pi}{4}, \quad (2.43)$$

$$\theta_9 = \theta_{11} = \theta_{12} = 0, \quad (2.44)$$

можно телепортировать состояния Алисы и Боба в узлы, принадлежащие Чарли. При этом вектор выходных квадратур будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,C_a} \\ \hat{X}_{out,C_b} \\ \hat{Y}_{out,C_a} \\ \hat{Y}_{out,C_b} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_{10} \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_{10} \\ \hat{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{y}_a \\ \hat{y}_b \end{pmatrix} + E_{CC}, \quad (2.45)$$

где

$$E_{CC} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \\ \hat{y}_{r,4} \\ \hat{y}_{r,5} \\ \hat{y}_{r,6} \\ \hat{y}_{r,7} \\ \hat{y}_{r,8} \\ \hat{y}_{r,9} \\ \hat{y}_{r,10} \\ \hat{y}_{r,11} \\ \hat{y}_{r,12} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок в данном случае полностью совпадает со случаем двунаправленной телепортации, описанной в предыдущем разделе.

$$\delta \hat{e}_{CC}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.47)$$

2.2. Протокол тринеправленной телепортации на трех трехмодовых кластерных состояниях

2.2.1. Протокол тринеправленной телепортации с тремя независимыми кластерными состояниями

Как мы уже выяснили, тринеправленная телепортация в непрерывных переменных осуществляется с ошибкой, пропорциональной величине сжатия использованных состояний и числу используемых осцилляторов. Чтобы минимизировать ошибку телепортации мы должны уменьшить число узлов, используемых для реализации ТТ. В качестве общего ресурса мы будем использовать три независимых трехузловых кластерных состояния, которые распределены равнозначно между всеми участниками протокола телепортации, как показано на Рис. 2.3.

Каждый из узлов трехузлового кластерного состояния, распределены между пользователями. К одному из узлов, пользователь примешивает свое входное состояние, а оставшиеся два распределяются между остальными участниками. Таким образом, после распределения Алисе принадлежат узлы $A1$, $B3$ и $C2$, Бобу: $B1$, $A2$ и $C3$, и Чарли: $C1$, $A3$ и $B2$. Такая конфигурация обеспечивает полную равнозначность пользователей. Более того, используя такую конфигурацию, мы снижаем число сжатых осцилляторов, требуемым для телепорта-

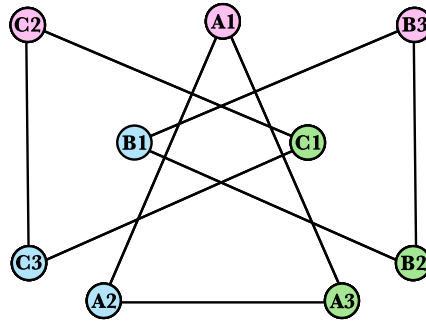


Рис. 2.3: Три независимых трехузловых кластерных состояния используемых для тринаправленной телепортации. На рисунке разными цветами обозначены узлы, принадлежащие разным участникам: розовым – узлы Алисы, синим – узлы Боба, зеленым – узлы Чарли.

ции с двенадцати до девяти.

Благодаря тому, что каждое трехузловое кластерное состояние не зависит от другого, телепортация квантовых состояний также будет происходить независимо от остальных. Поэтому для доказательства возможности реализации тринаправленной телепортации в рассматриваемой схеме нам достаточно показать, что, подбирая фазы локальных осцилляторов, можно совершать телепортацию в разные узлы трехузлового линейного кластерного состояния.

2.2.2. Телепортация в различные узлы трехузлового линейного кластерного состояния

Давайте рассмотрим, телепортацию в различные узлы трехузлового линейного кластерного состояния. В качестве основного ресурса будем использовать кластерное состояние с графом, представленным на Рис. 2.4.

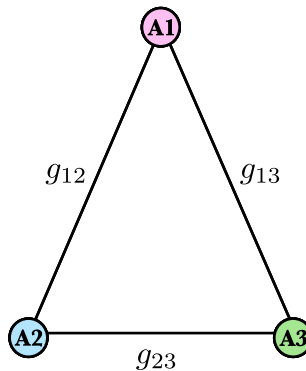


Рис. 2.4: Взвешенный граф трехузлового кластерного состояния.

Возможность генерировать кластерные состояния с различными весовыми коэффициентами это одно из преимуществ использования физических систем в непрерывных переменных. Весовые коэффициенты кластерных состояний являются дополнительной степенью свободы. Их можно подбирать так, чтобы оптимизировать квантово-информационные протоколы, использующие кластерные состояния. Кроме того, в работе [9] было показано, что подбирая весовые коэффициенты можно снизить ошибки двунаправленной телепортации.

Учитывая это, наша цель в данном разделе найти такие весовые коэффициенты трехузлового кластерного состояния, чтобы не только существовала телепортация на различные узлы кластера, но ошибка телепортации была минимальной.

Как и прежде, для описания графа взвешенного кластерного состояния будет использоваться матрица смежности. Однако для взвешенного кластерного состояния элементами матрицы смежности будут весовые коэффициенты между узлами с номерами i и j ($[A]_{ij} = g_{ij}$). В общем случае для трехузлового взвешенного кластерного состояния матрица смежности будет иметь следующий вид:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 0 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Зная матрицу смежности, мы можем воспользоваться преобразованием Боголюбова. Воспользовавшись сокращением $\hat{\vec{x}}_r + i\hat{\vec{y}}_r = (I + A_3^2) (\hat{\vec{x}}_s + i\hat{\vec{y}}_s)$, запишем связь между квадратурами кластерного состояния и линейными комбинациями квадратур сжатых состояний:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_2 + i\hat{Y}_2 \\ \hat{X}_3 + i\hat{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{r,1} - g_{12}\hat{y}_{r,2} - g_{13}\hat{y}_{r,3} + i(\hat{y}_{r,1} + g_{12}\hat{x}_{r,2} + g_{13}\hat{x}_{r,3}) \\ \hat{x}_{r,2} - g_{12}\hat{y}_{r,1} - g_{23}\hat{y}_{r,3} + i(\hat{y}_{r,2} + g_{12}\hat{x}_{r,1} + g_{23}\hat{x}_{r,3}) \\ \hat{x}_{r,3} - g_{13}\hat{y}_{r,1} - g_{23}\hat{y}_{r,2} + i(\hat{y}_{r,3} + g_{13}\hat{x}_{r,1} + g_{23}\hat{x}_{r,2}) \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Теперь, когда генерация общего ресурса завершена, нам необходимо распределить узлы кластерного состояния между участниками. Пусть Алисе будет принадлежать центральный узел A1. Узлы A2 и A3 принадлежат Бобу и Чарли, соответственно.

Первым шагом в протоколе телепортации, Алиса примешивает к своему узлу A1 состояние $\hat{a}_{in} = \hat{x}_a + i\hat{y}_a$ с помощью симметричного светоделителя. В результате такого смешения поля квадратура входной моды Алисы, а также квадратура поля преобразуются следующим образом:

$$\hat{X}'_{in} + i\hat{Y}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_a + \hat{x}_{r,1} - g_{12}\hat{y}_{r,2} - g_{13}\hat{y}_{r,3} + i(\hat{y}_a + \hat{y}_{r,1} + g_{12}\hat{x}_{r,2} + g_{13}\hat{x}_{r,3})), \quad (2.50)$$

$$\hat{X}_{a_1} + i\hat{Y}_{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_a - \hat{x}_{r,1} + g_{12}\hat{y}_{r,2} + g_{13}\hat{y}_{r,3} + i(\hat{y}_a - \hat{y}_{r,1} - g_{12}\hat{x}_{r,2} - g_{13}\hat{x}_{r,3})). \quad (2.51)$$

Если Алиса планирует телепортировать свое состояние в узел A3 (Чарли), то необходимо провести измерение полей на выходе из светоделителя и поля в моде A2, выбрав фазы локальных осцилляторов следующим образом:

$$\tan \theta_{in} = -g_{13}, \quad (2.52)$$

$$\tan \theta_{A1} = g_{13}, \quad (2.53)$$

$$\tan \theta_{A2} = 0. \quad (2.54)$$

В результате такой телепортации, связь между выходными и входными квадратурами

можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_{A3} \\ \hat{Y}_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{y}_a \end{pmatrix} + \hat{e}_1, \quad (2.55)$$

где

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_{13}} - \frac{g_{12}^2}{g_{13}} - g_{13} & -g_{23} & -\frac{g_{12}g_{23}}{g_{13}} \\ g_{12}g_{23} & g_{12}g_{13} & 1 + g_{13}^2 + g_{23}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Здесь приведены выражения уже после смещения квадратур на основе измеренных значений.

Случай, когда Алиса планирует телепортировать свое состояние в узел A2 (Бобу) симметричен предыдущему с точности до замен $g_{13} \rightarrow g_{12}$ и $g_{12} \rightarrow g_{13}$. Так, проводя гомодинные измерения с фазами:

$$\tan \theta_{in} = -g_{12}, \quad (2.57)$$

$$\tan \theta_{A1} = g_{12}, \quad (2.58)$$

$$\tan \theta_{A3} = 0, \quad (2.59)$$

мы получим следующую связь между входными и выходными квадратурами

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{X}_{A2} \\ \hat{Y}_{A2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{y}_a \end{pmatrix} + \hat{e}_2, \quad (2.60)$$

где

$$\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_{12}} - \frac{g_{13}^2}{g_{12}} - g_{12} & -g_{23} & -\frac{g_{13}g_{23}}{g_{12}} \\ g_{13}g_{23} & g_{13}g_{12} & 1 + g_{12}^2 + g_{23}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{r,1} \\ \hat{y}_{r,2} \\ \hat{y}_{r,3} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Анализируя вектора ошибок (2.56) и (2.61) заметим, что ошибка телепортации определяется вектором сжатия и некоторой матрицей, зависящей только от весовых коэффициентов. Уменьшить значения этой матрицы мы можем, положив $g_{23}=0$. Более того, протокол ТТ будет симметричным, а участники будут полностью равнозначны, если мы положим $g_{12} = g_{13} = g$. В этом случае ошибка телепортации станет одинаковой, а вектор средне-квадратичных флуктуаций ошибок будет иметь следующий вид:

$$\langle \delta \hat{e}_1^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{g^2} \\ 1 + g^2 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (2.62)$$

Так как все трехузловые кластерные состояния одинаковые, при реализации трин-

правленной телепортации (одновременной телепортации на каждом из трехузловых кластерах) вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок ТТ будет формироваться из векторов (2.62) и иметь следующий вид:

$$\langle \delta \hat{e}^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{g^2} \\ 2 + \frac{1}{g^2} \\ 2 + \frac{1}{g^2} \\ 1 + g^2 \\ 1 + g^2 \\ 1 + g^2 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.63)$$

Здесь представлен вектор для конкретного случая ТТ (Боб – Алиса – Чарли – Боб). В зависимости от реализуемого сценария ТТ, вектора среднеквадратичных флуктуации будут отличаться лишь перестановкой элементов. Величина вектора будет зависеть лишь от весового коэффициента g .

Сравнивая вектора среднеквадратичных флуктуаций ошибок (2.63) с вектором (2.23) видно, что при $1/\sqrt{3} < g < \sqrt{2}$ вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок, полученный при данной реализации протокола ТТ, меньше, чем вектор получаемый при использовании двенадцатиузловое кластерного состояния. Таким образом можно заключить, что использования трех независимых кластерных состояний с тремя узлами позволяет нам реализовывать тринаправленную телепортацию с таким же функционалом, что и раньше, но с меньшей ошибкой.

2.3. Протокол тринаправленной телепортации на множестве двухузловых кластерных состояниях

Рассмотрим еще один способ реализации ТТ. В качестве основного ресурса используем множество независимых двухузловых кластерных состояний. В работе [9], было исследована реализации двунаправленной телепортации с помощью двух двухузловых кластерных состояний. Было показано, что такая реализация самая эффективная с точки зрения величины результирующих ошибок. По этой причине давайте обобщим рассмотренную реализацию на случай тринаправленной телепортации.

Чтобы реализовать полный функционал ТТ нам нужно шесть двухузловых кластерных состояний, которые попарно распределены между всеми участниками. Данная конфигурация представлена на Рис. 2.5.

Каждое двухузловое кластерное состояние реализует однонаправленную телепортацию. Поэтому данная схема – это схема из шести однонаправленных телепортаций. Как известно [9], вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок одного протокола однонаправ-

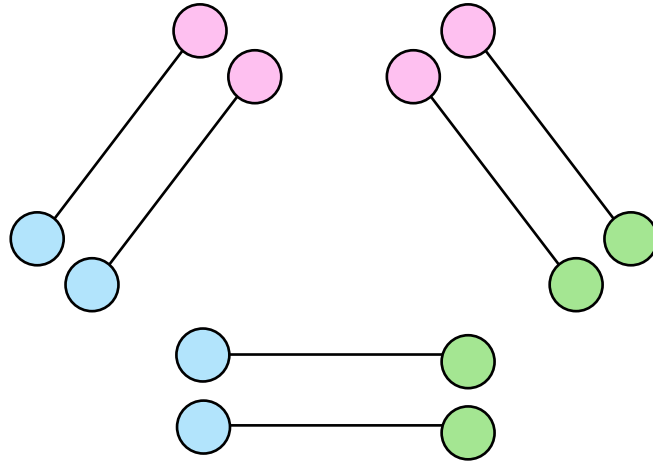


Рис. 2.5: Шесть двухузловых кластерных состояний, распределенные между Алисой, Бобом и Чарли. На рисунке разными цветами обозначены узлы, принадлежащие разными участникам: розовым – узлы Алисы, синим – узлы Боба, зеленым – узлы Чарли.

ленной телепортации имеет следующий вид:

$$\langle \delta \hat{e}_3^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.64)$$

Тогда ТТ в рассмотренной реализации будет иметь следующий вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок:

$$\langle \delta \hat{e}^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (2.65)$$

Как мы видим, ошибка, получаемая при реализации нескольких однонаправленных телепортаций, всегда меньше, чем ошибка, получаемая при использовании одного двенадцатиузлового кластерного состояния. Это напрямую следует из сравнения вектора среднеквадратичных флуктуаций ошибок (2.65) с векторами (2.23), (2.30), (2.39), (2.47).

При сравнении векторов среднеквадратичных флуктуаций ошибок для нескольких однонаправленных телепортаций (2.65) и трех трехузловых кластерных состояний (2.63) видим, что для одних квадратур ошибка, получаемая во втором случае, всегда больше. Однако, ошибку по другой квадратуре можно сделать меньше, подбирая весовые коэффициенты. Сравнение этого случая (Ур. (2.65)), со случаем, когда используются три независимых трехузловых кластерных состояния (Ур. (2.63)), показывает, что ошибка, получаемая во втором случае, всегда больше лишь по одним квадратурам. Ошибку по другой квадратуре можно сделать меньше, подбирая весовые коэффициенты.

Глава 3

Эффективность протоколов тринаправленной телепортации в непрерывных переменных

В работе мы представили три различных способа реализации протокола ТТ в непрерывных переменных. Все три способа реализации дают одинаковый функционал для ТТ, а отличаются лишь величиной ошибок. По этой причине для оценки эффективности различных способов реализации ТТ нам будет достаточно сравнить их по корректируемости ошибок в результатах. Такой метод уже был использован для оценки эффективности оптимизации протоколов однонаправленной [13] и двунаправленной телепортации в непрерывных переменных.

В протоколе ТТ телепортации в непрерывных переменных мы имеем дело с малыми ошибками смещения квадратур. Для коррекции таких ошибок в работе [14] был предложен протокол коррекции ошибок на основе состояний GKP (Gottesman, Kitaev, Preskill). В этой работе было показано, что с ростом ошибки, уменьшается вероятность ее коррекции. В [15] был предложен метод применения этих состояний к проблеме коррекции ошибок в однонаправленных квантовых вычислениях в непрерывных переменных. Далее в работе [16] был обобщен метод коррекции ошибок с помощью GKP состояний на случай, когда сама процедура коррекции не идеальна и выполняется с конечной ошибкой. Учитывая результаты всех этих работ, можно показать, что вероятность не скорректировать ошибки в состояниях, полученных Алисой, Бобом и Чарли в протоколе ТТ в непрерывных переменных имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned}
P_{err}(x_{er}^A, y_{er}^A, x_{er}^B, y_{er}^B, x_{er}^C, y_{er}^C) = \\
1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(x_{er}^A + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(y_{er}^A + \sqrt{5}+1\right)}\right) \\
\times \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(x_{er}^B + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(y_{er}^B + \sqrt{5}+1\right)}\right) \\
\times \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(x_{er}^C + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle}\left(y_{er}^C + \sqrt{5}+1\right)}\right),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x_{er}^A\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$, $x_{er}^B\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ и $x_{er}^C\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ — дисперсии ошибок $\hat{x}$ -квадратур Алисы, Боба и Чарли, соответственно, а $y_{er}^A\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$, $y_{er}^B\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ и $y_{er}^C\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ — дисперсии ошибок $\hat{y}$ -квадратур Алисы, Боба и Чарли, соответственно. В аргументах функции erf присутствуют два вклада в величину ошибок. Первый вклад — это ошибка от процедуры телепортации, а второй — это ошибка от не идеальной процедуры коррекции. Отсутствие симметрии в аргументах функций erf связана с последовательностью применения операций коррекции $\hat{x}$ и $\hat{y}$ квадратур. Мы выбрали такую последовательность учитывая, что сравниваемые ошибки (2.63) и (2.23) больше в $\hat{x}$ квадратурах.

На Рис. 3.1 представлен график зависимости вероятностей не скорректировать ошибки протоколов ТТ, реализуемых в трех различных случаях: на двенадцатиузловом кластерном состоянии, на трех трехузловых кластерах и на шести двухузловых кластерах. В каче-

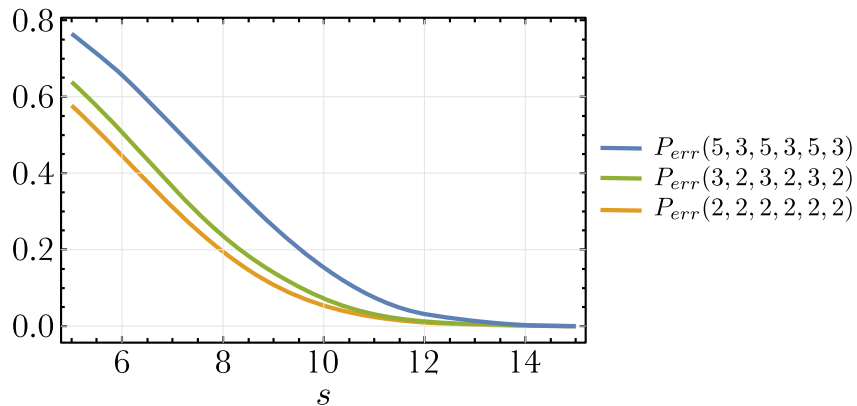


Рис. 3.1: График зависимости вероятности не скорректировать ошибку телепортации в зависимости от величины сжатия входных осцилляторов. Различными цветами обозначены различные случаи реализации ТТ: синим — случай двенадцатиузлового кластерного состояния, оранжевым — случай шести двухузловых кластерных состояний, зеленым — случай трех трехузловых кластерных состояний. На графике $s = -10 \log_{10} 4\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ степень сжатия осцилляторов. Сжатие осцилляторов задается в дБ.

стве весового коэффициента для трехузлового кластерного состояния выбрана $g = 1$. Этот выбор обусловлен тем, что для данного весового коэффициента функция (3.1) для ошибки (2.63) принимает свои наименьшие значения. Из графика видно, что наименьшая ошибка будет в случае, когда используется шесть двухузловых кластерных состояний. Кроме того, из графика видно, что с уменьшением сжатия входных осцилляторов увеличивается значимость выбора схемы реализации ТТ. Например, при использовании осцилляторов со сжатием 8 dB схема с двухузловыми кластерными состояниями дает вероятность неправильной коррекции ошибок на 20 % ниже, чем схема с двенадцатиузловым кластерным состоянием.

Глава 4

Заключение

В работе мы предложили протокол тринаправленной телепортации (ТТ) в непрерывных переменных. Главной особенностью нашего протокола является возможность выбрать один из трех реализуемых сценариев ТТ. В первом происходит одновременный обмен квантовыми состояниями между всеми участниками. Второй сценарий описывает попарный обмен состояниями для любых двух участников телепортации. А в третьем один из участников получает два квантовых состояния других пользователей.

Мы показали, что ТТ можно реализовать в непрерывных переменных, используя в качестве основного ресурса кластерное состояние. При этом кластерное состояние может иметь различную конфигурацию (граф). Мы предложили три различные реализации протокола ТТ: на двенадцатиузловом кластерном состоянии, на трех трехмодовых и на множестве двухузловых кластерных состояниях.

Кроме того, мы продемонстрировали, что ТТ в непрерывных переменных осуществляется с ошибкой. Среднеквадратичные флуктуации этой ошибки пропорциональны среднеквадратичным флуктуациям сжатых квадратур используемых квантовых осцилляторов, а также весовым коэффициентам графа кластерного состояния. Так как для всех представленных конфигураций функционал ТТ одинаковый, выбор оптимального варианта сводится к анализу ошибок, возникающих во всех случаях. Для оценки эффективности мы сравнили корректируемость ошибок в результатах. По результатам сравнения мы определили, что использование множества двухмодовых кластерных состояний приводит к наименьшей ошибке, а значит лучше всего подходит для протокола ТТ. Полученный результат легко объяснить с точки зрения физики. При реализации телепортации каждый используемый сжатый квантовый осциллятор играет роль источника ошибки, по этой причине минимизация ошибки возможна при использовании минимального числа осцилляторов. Несмотря на то, что общее количество сжатых осцилляторов в данном случае больше чем при ТТ на трех трехмодовых кластерных состояниях, количество сжатых осцилляторов, используемых во время протокола в данном случае меньше. Кроме того, что протокол с двухузловыми кластерными состояниями прост с точки зрения эксперимента, поскольку он не требует создания сложных многочастичных состояний.

Литература

- [1] Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1993. Mar. T. 70. C. 1895–1899. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>.
- [2] Bidirectional Quantum Controlled Teleportation via Five-Qubit Cluster State / Xin-Wei Zha, Zhi-Chun Zou, Jian-Xia Qi [и др.] // International Journal of Theoretical Physics. 2013. T. 52, № 6. C. 1740–1744. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-012-1208-5>.
- [3] Fu Hong-Zi, Tian Xiu-Lao, Hu Yang. A General Method of Selecting Quantum Channel for Bidirectional Quantum Teleportation // International Journal of Theoretical Physics. 2014. T. 53, № 6. C. 1840–1847. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1985-5>.
- [4] Li Yuan-hua, Nie Li-ping. Bidirectional Controlled Teleportation by Using a Five-Qubit Composite GHZ-Bell State // International Journal of Theoretical Physics. 2013. T. 52, № 5. C. 1630–1634. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1484-8>.
- [5] Yan An. Bidirectional Controlled Teleportation via Six-Qubit Cluster State // International Journal of Theoretical Physics. 2013. T. 52, № 11. C. 3870–3873. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1694-0>.
- [6] Bidirectional Quantum Controlled Teleportation via a Maximally Seven-qubit Entangled State / Ya-Jun Duan, Xin-Wei Zha, Xin-Mei Sun [и др.] // International Journal of Theoretical Physics. 2014. T. 53, № 8. C. 2697–2707. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-014-2065-1>.
- [7] Chen Yan. Bidirectional Controlled Quantum Teleportation by Using Five-Qubit Entangled State // International Journal of Theoretical Physics. 2014. T. 53, № 5. C. 1454–1458. URL: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1943-2>.
- [8] Braunstein Samuel L., Kimble H. J. Teleportation of Continuous Quantum Variables // Phys. Rev. Lett. 1998. Jan. T. 80. C. 869–872. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.869>.
- [9] Nesterova E. A., Korolev S. B. Bidirectional quantum teleportation in continuous variables. 2024. URL: <https://arxiv.org/abs/2408.06081>.

- [10] Korolev S B, Golubeva T Yu, Golubev Yu M. Finding the optimal cluster state configuration. Minimization of one-way quantum computation errors // *Laser Physics Letters*. 2020. apr. T. 17, № 5. C. 055205. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1612-202X/ab83ff>.
- [11] Quantum computing with continuous-variable clusters / Mile Gu, Christian Weedbrook, Nicolas C. Menicucci [и др.] // *Phys. Rev. A*. 2009. Jun. T. 79. C. 062318. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.062318>.
- [12] Bogoljubov N. N. On a new method in the theory of superconductivity // *Il Nuovo Cimento*. 1958. T. 7, № 6. C. 794–805.
- [13] Error of an arbitrary single-mode Gaussian transformation on a weighted cluster state using a cubic phase gate / E. R. Zinatullin, S. B. Korolev, A. D. Manukhova [и др.] // *Phys. Rev. A*. 2022. Sep. T. 106. C. 032414. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.106.032414>.
- [14] Gottesman Daniel, Kitaev Alexei, Preskill John. Encoding a qubit in an oscillator // *Phys. Rev. A*. 2001. Jun. T. 64. C. 012310. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.012310>.
- [15] Menicucci Nicolas C. Fault-Tolerant Measurement-Based Quantum Computing with Continuous-Variable Cluster States // *Phys. Rev. Lett*. 2014. Mar. T. 112. C. 120504. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.120504>.
- [16] Korolev S.B., Golubeva T.Yu. Error correction of the continuous-variable quantum hybrid computation on two-node cluster states: Limit of squeezing // *Physics Letters A*. 2022. T. 441. C. 128149. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960122002316>.