

Аннотация

Проект "Геометрия в комплексных числах: эффективные решения геометрических задач" посвящен исследованию применения комплексных чисел в решении различных геометрических задач. В работе рассматриваются основные принципы и методы, позволяющие использовать комплексные числа для упрощения вычислений и визуализации геометрических объектов. Мы анализируем, как комплексные числа могут быть эффективно применены для решения задач, связанных с трансформациями, расстояниями, углами и другими геометрическими характеристиками. Проект направлен на демонстрацию преимуществ комплексного подхода в геометрии и предлагает практические примеры, иллюстрирующие его эффективность и универсальность.

Ключевые слова

Точка, треугольник, декартова форма, комплексное число, действительная часть комплексного числа, мнимая часть комплексного числа, модуль и аргумент, геометрические преобразования.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Основная часть	5
1.1. Из истории комплексных чисел	5
1.2. Основные понятия	5
1.3. Формы представления комплексного числа	6
1.4. Действия над комплексными числами	9
Глава 2. Практическая часть	11
2.1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	11
2.2. Использование комплексных чисел для решения геометрических задач	12
Заключение	16
Библиография	17
Приложения	18

Введение

Математика охватывает практически все сферы человеческой деятельности, что способствует ускорению научно-технического прогресса. С момента начала учебы в школе мы сталкиваемся с задачами, которые от начала до конца обучения неизменно помогают формировать правильные математические понятия, углублять понимание взаимосвязей в окружающем мире и применять теоретические знания на практике. В то же время, решение задач развивает наше логическое мышление. Поэтому важно быть осведомленным о способах решения различных задач.

Комплексные числа представляют собой важный раздел математики, который находит широкое применение в различных областях науки и техники. Они состоят из действительной и мнимой частей и могут быть представлены в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Комплексные числа превратили геометрию в более доступный и понятный предмет, став настоящим прорывом в решении геометрических задач. Если раньше математикам приходилось пробираться через заросли сложных вычислений и громоздких формул, то теперь они получили мощный инструмент для элегантных решений. Вместо того чтобы часами выписывать координаты точек и считать площади фигур по сложным формулам, можно использовать комплексные числа как универсальный ключ к решению. Они позволяют описывать геометрические фигуры и их преобразования на комплексной плоскости, делая расчёты более наглядными и эффективными.

Меня заинтересовала эта тема, потому что метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи с помощью прямого вычисления, используя заранее подготовленные формулы, которые зависят от условий задачи. Эта методика обладает удивительной простотой по сравнению с векторными и координатными методами, геометрическими преобразованиями и конструктивно-синтетическим методом, которые иногда требуют значительных усилий и длительного поиска, хотя итоговое решение может быть очень кратким.

Умение работать с комплексными числами открывает новые горизонты для выявления фактов и формирования обобщений. Широкое применение комплексных чисел в математике и физике, с одной стороны, подтверждает их реальность и практическую значимость для школьников. С другой стороны, навыки работы с комплексными числами представляют собой интересную и важную область знаний, особенно для будущих студентов технических вузов. Поэтому изучение комплексных чисел на факультативных занятиях в старших классах с математическим уклоном, а также их применение в геометрии, тригонометрии и физике, может значительно повысить уровень математической подготовки учащихся.

Проект направлен на демонстрацию эффективности и удобства использования комплексных чисел в геометрии, а также на выявление их значимости в современном математическом анализе.

Цель проекта: изучение использования комплексных чисел для решения разнообразных геометрических задач

Задачи проекта:

- провести теоретический анализ метода комплексных чисел, изучив его основные принципы и свойства;
- изложить особенности геометрии треугольника с использованием комплексных чисел, анализируя их применение в различных задачах;
- привести примеры использования комплексных чисел для решения геометрических задач, связанных с треугольниками и другими фигурами;
- обобщение полученных результатов и выводы о значимости комплексных чисел в геометрии;
- представить результаты исследования учащимся 10-х классов школы.

Объект исследования – комплексные числа.

Предмет исследования – метод комплексных чисел как инструмент для решения геометрических задач в планиметрии.

Глава 1. Основная часть

1.1. Из истории комплексных чисел

История комплексных чисел уходит своими корнями в далекое прошлое и тесно связана с эволюцией алгебры и математики в целом. Однако использование комплексных чисел, которые включают как действительную, так и мнимую части, начало активно развиваться только в XVII веке.

Одним из первых, кто осознал необходимость введения комплексных чисел, был итальянский математик Джироламо Кардано. В своей знаменитой работе «Великое искусство, или об алгебраических правилах», опубликованной в 1545 году, он отметил, что квадратный корень из отрицательного числа не может быть представлен как действительное число.

Позже анонимный математик Рафаэле Бомбелли представил практический подход к работе с комплексными числами в своем труде «Алгебра» в 1572 году, придавая им символическое обозначение. Тем не менее, долгое время концепция комплексных чисел оставалась неясной и трудной для понимания.

Существенный шаг вперед был сделан в XVIII веке швейцарским математиком Эйлером, который ввел символ i для обозначения мнимой единицы. Благодаря его исследованиям стало возможным выполнять алгебраические операции с комплексными числами. С тех пор они нашли широкое применение не только в математике, но и в физике, инженерии и других научных дисциплинах.

1.2. Основные понятия.

Комплексное число z определяется как упорядоченная пара чисел (x, y) , над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение, умножения, деления, возведение в степень. Результаты всех этих операций также являются комплексными числами, что делает комплексные числа замкнутым множеством относительно указанных операций.

Алгебраическая форма комплексного числа z называется выражение $z = x + iy$. В этом выражении x и y называются действительными числами, i – мнимой единицей, которая определяется соотношением $i^2 = -1$. Таким образом, любое комплексное число можно представить как комбинацию действительной и мнимой частей, что позволяет выполнять над ними различные арифметические операции, такие как сложение, вычитание, умножение и деление, результаты которых также будут комплексными числами.

При этом число x называется действительной частью числа z ($x = \operatorname{Re} z$), а y – мнимой частью ($y = \operatorname{Im} z$).

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно – сопряженными.

Комплексные числа имеют геометрическое представление, которое позволяет визуализировать их на комплексной плоскости. Комплексная плоскость представляет собой двумерное пространство, где горизонтальная ось (ось абсцисс) - это действительная ось (Re), по ней откладывается действительная часть комплексного числа (x) и вертикальная ось (ось ординат) - это мнимая ось (Im), по ней откладывается мнимая часть комплексного числа (y). Каждое комплексное число $z = x + iy$ можно представить как точку с координатами (x, y)

В этой плоскости действительная часть комплексного числа $z = x + iy$ откладывается по оси абсцисс (горизонтальной оси), а мнимая часть y — по оси ординат (вертикальной оси). Таким образом, каждое комплексное число отображается как точка в двумерном пространстве.

Множество комплексных чисел можно рассматривать как расширение множества действительных чисел, поскольку оно включает в себя как действительные, так и мнимые числа.

Таким образом, комплексные числа не только обобщают понятие чисел, но и предоставляют мощный инструмент для решения различных математических задач, включая геометрические, алгебраические и аналитические.

Каждое комплексное число соотносится с уникальной точкой в двумерном пространстве, что позволяет удобно проводить геометрические операции, такие как сложение и умножение комплексных чисел. Например, сложение двух комплексных чисел соответствует векторному сложению на плоскости, а умножение может быть истолковано как преобразование масштабирования и вращения. Этот геометрический подход помогает глубже понять свойства и приложения комплексных чисел в математике и физике. (Приложение 1)

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа x , а на оси OY – мнимые – y .

Из геометрических соображений видно, что $z = x + iy = r \cos\varphi + ir \sin\varphi$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа – это способ представления комплексного числа через его модуль (длина радиус-вектора комплексного числа) и аргумент (угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором).

Тригонометрическая форма является мощным инструментом для работы с комплексными числами, особенно когда требуется выполнить сложные математические операции или решить геометрические задачи на комплексной плоскости

1.3. Формы представления комплексного числа

Существует четыре формы представления комплексного числа:

- Алгебраическая (удобна для арифметических операций);
- Геометрическая (для визуализации);
- Тригонометрическая (для умножения, деления и возведения в степень);

- Показательная (для вычислений с большими степенями и корнями).

Каждая форма имеет свои преимущества и используется в зависимости от решаемой задачи, что делает комплексные числа универсальным математическим инструментом.

Алгебраическая форма – это представление комплексного числа в виде суммы $z = x + iy$.

Геометрическая форма комплексного числа действительно позволяет наглядно представить его на комплексной плоскости. Комплексное число $z = x + iy$ соответствует точке с координатами (x, y) , где x — действительная часть, а y — мнимая часть.

Основные геометрические характеристики комплексных чисел:

1. Модуль комплексного числа $|z|$: расстояние от начала координат до точки (x, y) на комплексной плоскости. Вычисляется по формуле: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Сопряженное комплексное число $\{z\}$: определяется как: $\{z\} = x - iy$. Геометрически это соответствует отражению точки относительно действительной оси чисел.

3. Аргумент комплексного числа угол φ : угол между вектором z и положительным направлением оси действительных чисел. Аргумент вычисляется как: $\text{Arg}(Z) = \varphi$. Из этого определения выводятся следующие соотношения:

$$\text{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{ctg}\varphi = \frac{x}{y} \quad \cos\varphi = \frac{x}{|z|} \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

Главным значением аргумента называется такое значение φ , при котором $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Обозначается: $\text{Arg}(Z)$.

Также справедливы следующие свойства аргумента:

1. $\text{Arg}|Z| = -\text{Arg}|Z|$ – аргумент от сопряженного комплексного числа равен отрицательному значению аргумента от этого числа.
2. $\text{Arg}|Z_1 Z_2| = \text{Arg}|Z_1| + \text{Arg}|Z_2|$ – аргумент от произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов этих чисел.
3. $\text{Arg}\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \text{Arg}|Z_1| - \text{Arg}|Z_2|$ – аргумент частного двух комплексных чисел равен разности аргументов этих чисел.
4. $\text{Arg}|Z^n| = n\text{Arg}|Z|$

Эти характеристики являются фундаментальными при работе с комплексными числами и широко используются в различных областях математики, физики и инженерии.

Комплексно-сопряженными числами (см. рис. 3), называются два числа вида $Z = x + iy$ и $Z = x - iy$. (Приложение 2)

Эти понятия позволяют не только лучше понять свойства комплексных чисел, но и эффективно использовать их в различных математических задачах, включая решение уравнений, анализ функций и изучение геометрических свойств.

Такие числа симметричны относительно действительной оси комплексной плоскости. Комплексно-сопряженные числа действительно обладают симметрией относительно

действительной оси на комплексной плоскости. Если $z = x + iy$ — комплексное число, то его сопряженное число обозначается как $\{z\} = x - iy$:

$$|Z| = |\bar{Z}|;$$

$$Z + \bar{Z} = 2x;$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2.$$

$\dot{Z} = Z$ (сопряженное к сопряженному есть исходное).

Тригонометрическая форма комплексного числа связана с геометрической. Если вещественную и мнимую части комплексного числа $Z = x + iy$ выразить через модуль $r = |Z|$ и аргумент комплексного числа φ в виде $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то любое ненулевое комплексное число можно представить как $Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. (Приложение 3)

Тригонометрическая форма является мощным инструментом в работе с комплексными числами, особенно когда требуется геометрическая интерпретация или выполнение операций, связанных с углами и модулями. Она позволяет существенно упростить многие вычисления и является основой для перехода к показательной форме записи комплексных чисел.

Показательная форма комплексного числа вытекает из формулы Эйлера, которая является одним из важнейших результатов в комплексном анализе и устанавливает фундаментальную связь между тригонометрическими функциями и комплексной экспоненциальной функцией. Формула Эйлера утверждает, что для любого действительного числа φ выполняется следующее равенство:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \text{ где } e - \text{число Эйлера, } i - \text{мнимая единица, } \varphi = \text{Arg}(Z).$$

Соединив это равенство с тригонометрической формой комплексного числа, получим:

$$Z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Для тригонометрической формы записи верны следующие свойства:

1. $Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$;

2. $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$;

3. $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

Для показательной формы комплексного числа записи действуют следующие свойства:

1. $Z = r \cdot e^{i\varphi}$;

2. $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

3. $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

4. $Z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

1.4. Действия над комплексными числами

Математические операции с комплексными числами включают в себя: сложение; вычитание; умножение; деление; возведение в степень; извлечение корня; введение под знак модуля. Рассмотрим каждую из них.

Даны два комплексных числа $Z_1 = a + bi$ и $Z_2 = c + di$, где a, c – их вещественные части, а b, d – мнимые.

Сложение и вычитание комплексных чисел можно интерпретировать как векторные операции на комплексной: $Z_1 \pm Z_2 = (a \pm c) + (b + d)i$

Умножение комплексных чисел: $Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Деление комплексных чисел: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Для возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа будем применять формулу Муавра ($Z^n = r^n (\cos \varphi n + i \sin \varphi n)$): $\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$

Модулем комплексного числа $Z = x + iy$ называется число $|Z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

История комплексных чисел охватывает множество значимых этапов и вкладов различных ученых.

Комплексные числа начали развиваться в XVI веке, когда математики, такие как Герон и Кардано, начали рассматривать решения квадратных уравнений, которые приводили к отрицательным корням. Однако в то время комплексные числа не имели четкого определения и понимания. В XVII веке математики, такие как Декарт и Вьет, начали формализовать понятие комплексных чисел. В XVIII веке Лейбниц и Эйлер сделали значительный вклад в развитие алгебраической модели комплексных чисел и их обозначение. В XIX веке математики, такие как Гаусс, начали использовать комплексные числа в геометрическом контексте, представляя их на комплексной плоскости. Гаусс также ввел понятие аргумента и модуля комплексного числа, что позволило лучше понять их свойства. С начала XIX века началось систематическое исследование функций комплексного переменного, которое стало основой для формирования теории комплексного анализа. Математики, такие как Коши и Риман, разработали теорию аналитических функций, которая стала основой для комплексного анализа. Коши сформулировал основные теоремы, такие как теорема Коши о интегралах, а Риман ввел понятие римановых поверхностей. Современные исследования: В XX веке и далее комплексные числа и функции комплексного переменного стали важными инструментами в различных областях математики, физики и инженерии. Они нашли применение в теории сигналов, квантовой механике, электротехнике и многих других областях.

Таким образом, развитие комплексных чисел и функций комплексного переменного стало важной вехой в математике, открывшей новые горизонты для исследований и приложений.

Комплексные числа образуют свое собственное множество, обозначаемое обычно как \mathbb{C} . Отличительной их особенностью является то, что сравнивать комплексные числа не так просто, как в случае действительных чисел. Это связано с тем, что векторы в двумерном пространстве (где отображаются комплексные числа) не имеют однозначного порядка. Комплексное число не может быть просто больше или меньше другого числа, как это происходит с действительными числами. Комплексные числа можно только сравнивать на равенство/неравенство, но не сравнивать по величине в привычном смысле слова. Это фундаментальное свойство комплексных чисел, которое отличает их от действительных чисел.

Это делает комплексные числа уникальными в математике и позволяет им найти множество применений в различных областях, включая электротехнику, физику и теорию сигналов.

Комплексные числа можно представить в алгебраической, геометрической, тригонометрической и показательной формах, каждая из которых имеет свои преимущества и применения. Все формы записи эквивалентны и могут быть преобразованы друг в друга. Это многообразие форм представления делает работу с комплексными числами гибкой и эффективной в различных областях применения.

Эти разнообразные формы и свойства делают комплексные числа мощным инструментом в математике, физике, инженерии и других науках

Глава 2. Практическая часть.

2.1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Сопоставим точкам плоскости A, B, C, D комплексные координаты a, b, c, d соответственно.

Середина отрезка AB (точка O): $o = \frac{a+b}{2}$.

Прямые AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$) тогда, и только тогда, когда $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.

Коллинеарность точек A, B, C : $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$.

Прямые AB и CD перпендикулярны ($AB \perp CD$) тогда, и только тогда, когда $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.

Расстояние между двумя точками A и B : $|a - b|$; $AB^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$

Свойства единичной окружности

Для любой точки A единичной окружности выполняется равенство: $a\bar{a} = 1$.

Для хорды AB : $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$.

Если точка C принадлежит хорде AB , то $\bar{c} = \frac{a+b-c}{ab}$.

Координата точки пересечения касательных, проведенных в точках A и B : $\frac{2ab}{a+b}$.

Основание перпендикуляра, опущенного с точки C на хорду AB : $\frac{a+b+c-bc}{2}$.

Координата точки пересечения хорд AB и CD : $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Точки A, B, C и D лежат на одной окружности тогда, и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$ тогда, и только тогда, когда $c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.

Координата точки пересечения медиан треугольника (центроид): $\frac{a+b+c}{3}$.

Точка пересечения секущих к окружности при $AB \perp CD$: $\frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ab}{c})$

Для ортоцентра H и центра O описанной окружности треугольника ABC выполняется равенство: $h + 2o = a + b + c$

Треугольник ABC правильный тогда и только тогда, когда: $a+b+c = 0$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны тогда и только тогда когда $\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} = \frac{c-a}{b-a}$ или

$$\frac{c_1-a_1}{c-a} = \frac{b_1-a_1}{b-a} = k$$

2.2. Использование комплексных чисел для решения геометрических задач

Задача 1. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC, точка D – середина BC, точки E и F – проекции точки D на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что если точка M – середина EF, а точка O – центр описанной окружности треугольника ABC, то $DM \parallel AO$.

Решение: Представим точки A, B, C комплексными координатами a, b, c соответственно.

Окружность описанная вокруг треугольника единичная ($R=1$), т.е. для любой точки окружности выполняется равенство $a\bar{a} = 1$. (Приложение 4. Чертеж к задаче)

$$DM \parallel AO \Rightarrow \frac{d-m}{\bar{d}-\bar{m}} = \frac{a-o}{\bar{a}-\bar{o}}$$

Центр окружности, точка O, имеет координату (0;0), получаем $\frac{a-o}{\bar{a}-\bar{o}} = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2 \Rightarrow \frac{d-m}{\bar{d}-\bar{m}} = a^2$.

Выразим координаты точек d, m через координаты a, b, c.

Точка D – середина BC:

$$d = \frac{b+c}{2}, \text{ тогда сопряженная ему } \bar{d} = \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}.$$

Проекция точки D на AC- точка F $\Rightarrow DF \perp AC$. Запишем координату точки F, как основание перпендикуляра, опущенного с точки D на хорду AC:

$$f = \frac{a+c+d-ab\bar{d}}{2} = \frac{a+c+\frac{b+c}{2}-ac\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}}{2} = \frac{2a+2c+b+c-ac(\bar{b}+\bar{c})}{4} = \frac{a+3c+b-ac\bar{b}}{4}.$$

Аналогично выразим точку E: $e = \frac{a+3b+c-ab\bar{c}}{4}$.

$$\text{Точка M – середина отрезка EF: } m = \frac{e+f}{2} = \frac{\frac{a+3b+c-ab\bar{c}}{4} + \frac{a+3c+b-ac\bar{b}}{4}}{2} = \frac{2a+4b+4c-ab\bar{c}-ac\bar{b}}{8},$$

$$\text{тогда сопряженная ему } \bar{m} = \frac{2\bar{a}+4\bar{b}+4\bar{c}-\bar{a}b\bar{c}-\bar{a}c\bar{b}}{8}.$$

$$\frac{d-m}{\bar{d}-\bar{m}} = \frac{\frac{b+c}{2} - \frac{2a+4b+4c-ab\bar{c}-ac\bar{b}}{8}}{\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \frac{2\bar{a}+4\bar{b}+4\bar{c}-\bar{a}b\bar{c}-\bar{a}c\bar{b}}{8}} = \frac{ab\bar{c}+ac\bar{b}-2a}{\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}c\bar{b}-2\bar{a}} \quad \because a\bar{b}c$$

$$\frac{d-m}{\bar{d}-\bar{m}} = \frac{a^2b^2+a^2c^2-2a^2bc}{c^2+b^2-2bc} = \frac{a^2(b^2+c^2-2b)}{c^2+b^2-2b} = a^2 \Rightarrow DM \parallel AO. \quad \text{ч.т.д.}$$

Задача 2. Докажите, что для любого треугольника длина отрезка, соединяющего основания перпендикуляров, опущенных из основания высоты на две другие стороны, является величиной постоянной, вне зависимости от выбора высоты.

Решение: Окружность, описанная около треугольника ABC, имеет уравнение $z\bar{z} = 1$. CD - высота треугольника, тогда комплексную координату точки D можно выразить $d = \frac{a+b+c-ab\bar{c}}{2}$.

(Приложение 5. Чертеж к задаче)

Определим комплексные координаты перпендикуляров М и N, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно: $m = \frac{a+b+d-ab\bar{d}}{2}$ и $n = \frac{b+c+d-bc\bar{d}}{2}$.

$$\text{Найдем: } m - n = \frac{a-b+c\bar{d}(b-a)}{2} = \frac{(a-b)+(1-c\bar{d})}{2} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}.$$

Так как $|a| = |b| = 1$, то $|m - n| = \frac{(a-b)(c-a)(b-c)}{4}$. Данное выражение обладает симметрией относительно a, b, c, т.е. расстояние MN остается неизменным независимо от того, какую высоту треугольника выбрали.

Ч.т.д.

Задача 3. ABCDE – вписанный пятиугольник, у которого AB=BD, P – точка пересечения AC и BE, Q – точка пересечения BC и DE. Докажите, что PQ и AD параллельны.

Решение: Запишем равенство отрезков AB и BD через определения модуля:

$$AB=BD \Rightarrow |a - b| = |d - b| \Rightarrow (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = (d - b)(\bar{d} - \bar{b}) \Rightarrow$$

Возведем это равенство в квадрат и распишем квадрат модуля как $|a|^2 = a\bar{a}$.

Раскрывая скобки и не теряя общности, считаем, что окружность на которой лежат точки A, B, C, D, E является единичной.

$$a\bar{a} - \bar{a}b - \bar{b}a + b\bar{b} = d\bar{d} - \bar{d}b - \bar{b}d + b\bar{b} \Rightarrow$$

$$\bar{a}b + a\bar{b} = \bar{b}d + b\bar{d}$$

Тогда, чтобы избавиться от сопряженных чисел, домножим равенство на abd и используем равенство $a\bar{a}=1$, получаем

$$b^2d + a^2d = ad^2 + ab^2 \Rightarrow b^2(d - a) = ad(d - a) \Rightarrow b^2 = ad$$

Найдем координаты точек P и Q, как координаты точек пересечения хорд единичной окружности.

$$p = \frac{ac(b+e)-be(a+c)}{ac-be} = \frac{acb+ace-abe-b}{ac-be} \quad q = \frac{bc(d+e)-de(b+c)}{bc-de} = \frac{bcd+bce-deb-de}{bc-de}$$

\bar{p} и \bar{q} находим, взяв сопряженное от p и q и домножив числитель и знаменатель дроби на $abce$ и $bcde$.

$$\bar{p} = \frac{\overline{acb+ace-abe-b}}{\overline{ac-be}} = \frac{e+b-c-a}{be-ac} \quad \bar{q} = \frac{\overline{bcd+bce-deb-de}}{\overline{bc-de}} = \frac{d+e-b-c}{de-bc}.$$

Запишем условие параллельности двух прямых, учитывая, что a,d – точки единичной окружности и $b^2 = ad$:

$$PQ \parallel AD \Leftrightarrow \frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = \frac{a-d}{\bar{a}-\bar{d}} = \frac{a^2d-d^2a}{d-a} = -ad \Rightarrow p - q = -b^2(\bar{p} - \bar{q})$$

Преобразуем выражения в левой части равенства:

$$p - q = \frac{acb+ace-abe-bce}{ac-be} - \frac{bcd+bce-deb-dce}{bc-de} \quad /d \text{ первую дробь}$$

$$p - q = \frac{d(acb + ace - abe - bce)}{d(ac - be)} - \frac{bcd + bce - deb - dce}{bc - de}$$

Заменим $b^2 = ad$

$$p - q = \frac{b^3c + b^2ce - b^3e - bcde}{b^2c - bde} - \frac{bcd + bce - deb - dce}{bc - de} = \frac{b^2c - b^2e - bcd + deb}{bc - de}$$

Преобразуем выражения в правой части равенства:

$$\bar{p} - \bar{q} = \frac{e+b-c-a}{be-a} - \frac{d+e-b-c}{de-} \quad / \cdot b \text{ вторую дробь}$$

$$\bar{p} - \bar{q} = \frac{d(e+b-c-a)}{d(be-ac)} - \frac{b(d+e-b-c)}{b(de-bc)}$$

Заменим $b^2 = ad$

$$\bar{p} - \bar{q} = \frac{ed + bd - cd - b^2}{bde - b^2c} - \frac{bd + be - b^2 - cb}{bde - b^2c} = \frac{ed - cd - eb + cb}{b(de - bc)}$$

Проверим равенство: $p - q = -b^2(\bar{p} - \bar{q})$

$$-b^2(\bar{p} - \bar{q}) = \frac{-b^2(ed - cd - eb + cb)}{b(de - bc)} = \frac{bed + b^2c - bcd - b^2e}{bc - de} = p - q.$$

Ч.т.д.

Задача 4. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого являются касательными к описанной окружности треугольника ABC в вершинах, является гомотетичным треугольнику с вершинами в основаниях $A_1B_1C_1$ высот треугольника ABC в соответствии с рисунком. (Приложение 6. Чертеж к задаче)

Решение: Примем описанную окружность за единичную. Пусть точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ имеют комплексные координаты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ соответственно.

Выразим a_1, b_1, c_1 , как точки пересечения касательных: $a_1 = \frac{2b}{b+c}$; $b_1 = \frac{2ac}{a+c}$; $c_1 = \frac{2ab}{a+b}$ и

точки a_2, b_2, c_2 как основания высот:

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{bc}{a} \right); \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ac}{b} \right); \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right).$$

Проверим равенство: $\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} = k$

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{-4a}{(a+c)(b+c)(a+b)} \quad \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} = \frac{-4abc}{(a+c)(b+c)(a+b)}$$

Получаем: $\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} = 1.$

Следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны.

Ч.т.д.

Задача 5. Докажите, что если средняя линия четырехугольника делит его на два четырехугольника, то середины диагоналей этих двух четырехугольников либо образуют вершины параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

Решение: Пусть точки $A, B, C, D, M, N, P, Q, R, S$ имеют комплексные координаты $a, b, c, d, m, n, p, q, r, s$ соответственно. Выразим m, n, p, q, r, s через a, b, c, d . (Приложение 7. Чертеж к задаче)

Точки М и N – середины сторон АВ и CD имеют координаты: $m = \frac{a+b}{2}$; $n = \frac{c+d}{2}$.

Точка Р – середина BN: $p = \frac{\frac{c+d}{2}+b}{2} = \frac{c+d+2b}{4}$, тогда сопряженная ему $\bar{p} = \frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{b}}{4}$.

Точка Q – середина MC: $q = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$, тогда сопряженная ему $\bar{q} = \frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}}{4}$.

Точка S – середина MD: $s = \frac{\frac{a+b}{2}+d}{2} = \frac{a+b+2d}{4}$, тогда сопряженная ему $\bar{s} = \frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{d}}{4}$.

Точка R – середина AN: $r = \frac{\frac{c+d}{2}+a}{2} = \frac{c+d+2a}{4}$, тогда сопряженная ему $\bar{r} = \frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{a}}{4}$.

Докажем, что $PQ \parallel SR \Rightarrow \frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = \frac{s-r}{\bar{s}-\bar{r}}$:

$$\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = \frac{\frac{c+d+2b}{4} - \frac{a+b+2c}{4}}{\frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{b}}{4} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}}{4}} = \frac{-a+b-c+d}{-\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}+\bar{d}}$$

$$\frac{s-r}{\bar{s}-\bar{r}} = \frac{\frac{a+b+2d}{4} - \frac{c+d+2a}{4}}{\frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{d}}{4} - \frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{a}}{4}} = \frac{-a+b-c+d}{-\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}+\bar{d}}$$

$$\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} = \frac{s-r}{\bar{s}-\bar{r}} \Rightarrow PQ \parallel SR$$

Аналогично докажем, что $PS \parallel QR \Rightarrow \frac{p-s}{\bar{p}-\bar{s}} = \frac{q-r}{\bar{q}-\bar{r}}$:

$$\frac{p-s}{\bar{p}-\bar{s}} = \frac{\frac{c+d+2b}{4} - \frac{a+b+2d}{4}}{\frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{b}}{4} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{d}}{4}} = \frac{-a+b+c-d}{-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{d}}$$

$$\frac{q-r}{\bar{q}-\bar{r}} = \frac{\frac{a+b+2c}{4} - \frac{c+d+2a}{4}}{\frac{\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}}{4} - \frac{\bar{c}+\bar{d}+2\bar{a}}{4}} = \frac{-a+b+c-d}{-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{d}}$$

$$\frac{p-s}{\bar{p}-\bar{s}} = \frac{q-r}{\bar{q}-\bar{r}} \Rightarrow PS \parallel QR$$

PQRS – параллелограмм.

Ч.т.д.

Заклучение

Применение комплексных чисел в решении геометрических задач значительно упрощает вычисления и улучшает наглядность. Комплексные числа позволяют эффективно представлять геометрические объекты, такие как точки и векторы, в виде чисел на комплексной плоскости. Это дает возможность использовать алгебраические методы для решения задач, связанных с расстояниями, углами и преобразованиями, такими как вращение и отражение.

Комплексные числа можно интерпретировать как точки или векторы на комплексной плоскости, что позволяет визуализировать операции сложения, вычитания, умножения и деления. Эта геометрическая интерпретация делает комплексные числа мощным инструментом в различных областях, таких как электротехника, квантовая механика, теория сигналов и многие другие, где важны преобразования и симметрия.

Многие свойства комплексных чисел, такие как модуль и аргумент, сохраняются при различных преобразованиях, что позволяет использовать их для анализа симметрии геометрических фигур и нахождения инвариантных свойств.

Применение тригонометрической и показательной форм комплексных чисел упрощает операции, такие как умножение и деление, а также позволяет легко находить углы между векторами и расстояния между точками.

Исследование комплексных чисел и их применения в геометрии открывает новые горизонты для решения более сложных задач, включая задачи оптимизации, анализ кривых и поверхностей, а также изучение динамических систем.

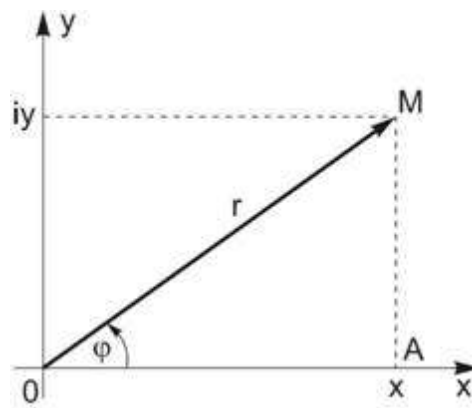
Метод комплексных чисел является не только эффективным инструментом решения геометрических задач, но и важным средством развития математической культуры и формирования аналитического мышления. Его изучение и применение открывает новые возможности для исследования геометрических закономерностей и решения практических задач.

В ходе работы были выбраны и решены примеры, демонстрирующие использование комплексных чисел в геометрии. Также была проведена оценка их значимости и роли в решении различных геометрических задач. Все задачи, поставленные в рамках исследования, были успешно выполнены. Цель, заключающаяся в изучении комплексных чисел и определении их важности и перспектив применения в различных сферах человеческой деятельности, была достигнута.

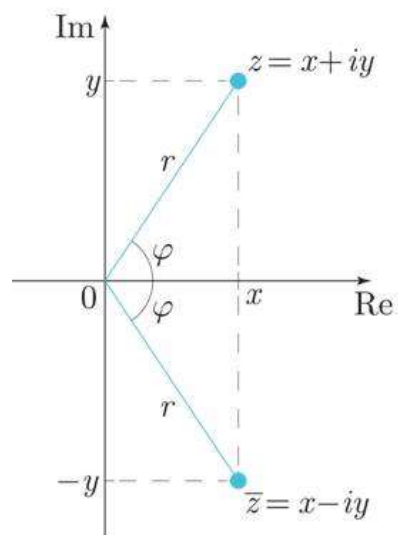
Библиография

1. Бурба, В. И. Комплексные числа в математике и физике. М.: ЛКИ, 2010 г.
2. Гельфанд, И. М., & Шпикер, А. А. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 2000 г.
3. Костюков, А. В. Комплексные числа и их применение в инженерии. М.: Инфра-М, 2015 г.
4. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ю. М. Колякин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. – 7-е изд. – М. : Просвещение, 2019. – 384 с. : ил.
5. Косяков, В. И. Комплексные числа и их приложения. М.: Физматлит, 2005 г.
6. Смирнов, Н. Н. Курс высшей математики. М.: Наука, 2003 г.
7. [//bigenc.ru/mathematics/text/2087169](http://bigenc.ru/mathematics/text/2087169) (25.11.2022).
8. [//centr-tsiryulnik.ru/primenenie-kompleksnyx-cisel-v-razlicnyx-oblastyax-zizni-ot-fiziki-i-elektrotexniki-do-ekonomiki-i-muzyki](http://centr-tsiryulnik.ru/primenenie-kompleksnyx-cisel-v-razlicnyx-oblastyax-zizni-ot-fiziki-i-elektrotexniki-do-ekonomiki-i-muzyki) (6.01.2024).
9. <https://studfile.net/preview/7164822/page:3> (29.11.2022).
10. <https://studopedia.info/3-26036.html>
11. https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_16_0.php (25.11.2022).

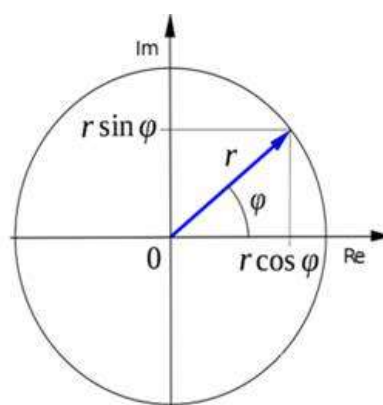
Приложение 1



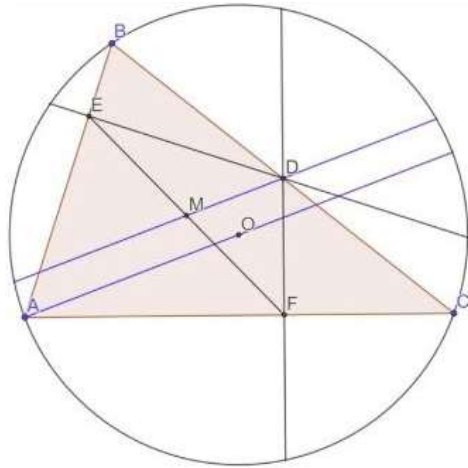
Приложение 2



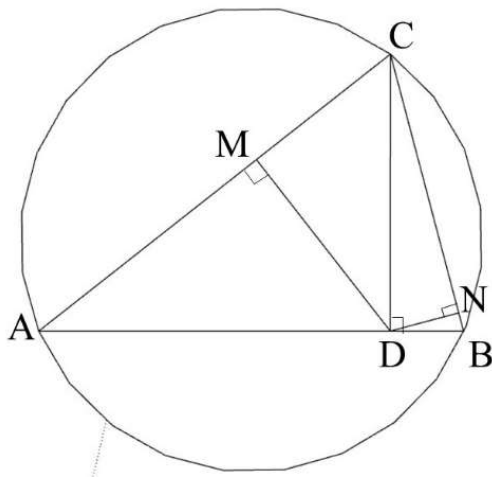
Приложение 3



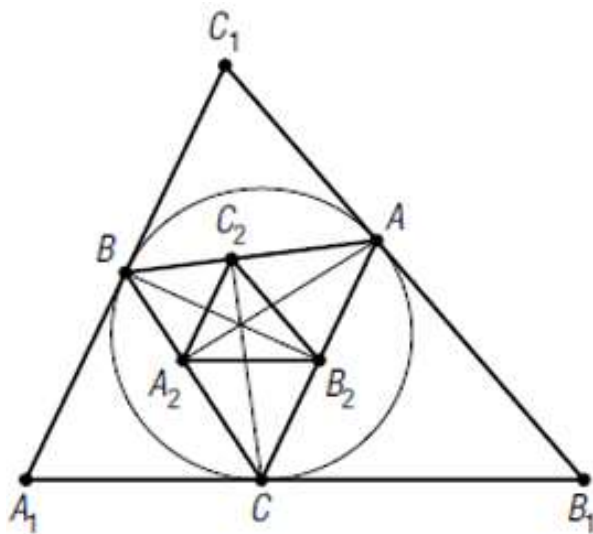
Приложение 4



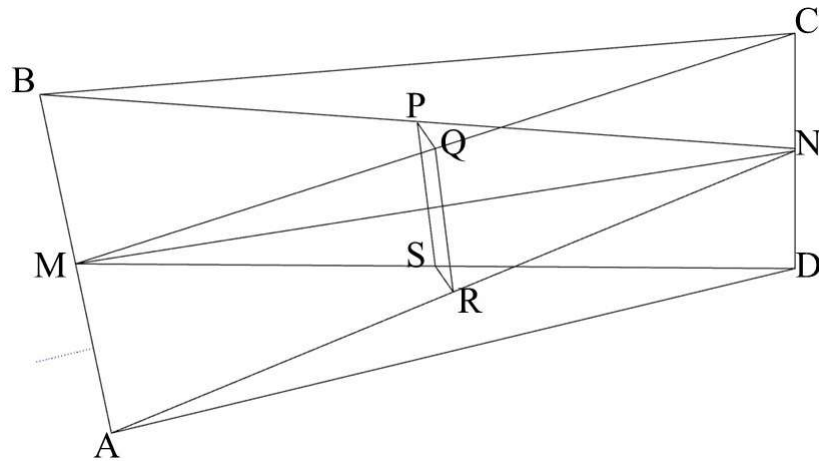
Приложение 5



Приложение 6



Приложение 7



Приложение 8



Справка о проверке на наличие заимствований

Имя файла:

Геометрия_в_комплексных_числах_Эффективные_решения_геометрических_задач.docx

Автор: Казакова В.В.

Заглавие: Геометрия в комплексных числах. Эффективные решения геометрических задач

Год публикации: 2025

Комментарий: *Не указан*

Подразделение: 6 Инженерный факультет / Электрификация и автоматизация АПК / ~ / ~

Коллекции: Интернет 2.0, Научные статьи 2.0, Википедия, Англоязычная Википедия, Коллекция Энциклопедий, Библиотека Либрусек, Университетская библиотека, Коллекция КФУ, ВКР Российского университета кооперации, Коллекция АПУ ФСИН, Коллекция ПГУТИ, Репозиторий открытого доступа СПб гос. ун-та, Научная электронная библиотека "КиберЛенинка", ЦНМБ Сеченова, Авторефераты ВАК, Диссертации ВАК, Диссертации РГБ, Авторефераты РГБ, Готовые рефераты, ФИПС. Изобретения, ФИПС. Полезные модели, ФИПС. Промышленные образцы, Коллекция Руконт, Библиотека им. Ушинского, Готовые рефераты (часть 2), Открытые научные источники, НЭБ, БиблиоРоссика, Правовые документы I, Правовые документы II, Правовые документы III, Собрание законодательства Российской Федерации



📄 Результат проверки

Оценка оригинальности документа: **74%**

Оригинальные фрагменты: 74,11%

Обнаруженные заимствования: 21,45%

Цитирование: 4,43%

