**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЛ В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ КВАДРАТОВ**

**ГАЙВАРОНСКАЯ ВИКТОРИЯ**

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Введение | 3 |
| 1 | Рождественская теорема Ферма | 4 |
| 2 | От простых чисел к составным. Наблюдения и выводы | 6 |
|  | Заключение | 11 |
|  | Список использованных источников | 12 |
|  |  |  |

**ВВЕДЕНИЕ**

В теории чисел широко известна Рождественская теорема Ферма о том, что любое простое число вида $4k+1 $представимо в виде суммы двух квадратов. С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему – поэтому её и называют Рождественской) был найден не один десяток разных доказательств. Александр Васильевич Спивак нашёл элементарное доказательство этой теоремы [4].

Изучив доказательство Рождественской теоремы, возникли вопросы.

*Вопрос 1*. Вот если взять некоторое натуральное число, не обязательно простое, например, 65. Его не только можно представить в виде суммы двух квадратов, но и таких представлений может быть несколько: $65=8^{2}+1^{2}=7^{2}+4^{2}.$

*Вопрос 2*. Наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух квадратов равно 3. И числа 6, 12, 15, 21 – кратные 3, так же не представимы в виде суммы двух квадратов, а вот число 18 – кратно 3, и представимо в виде суммы двух квадратов: $18=3^{2}+3^{2}.$

Последнее равенство позволяет предположить, что числа, кратные 3, но не кратные 9, не представимы в виде суммы двух квадратов. А будут ли слагаемые кратны 3, если их сумма кратна трём?

Эти вопросы и определили **цель исследования**: Какие целые положительные числа представимы в виде суммы квадратов целых чисел.

**Задачи исследования:**

1. Изучить доказательство Рождественской теоремы Ферма, предложенной А.В. Спиваком.
2. Составить таблицы сумм квадратов натуральных чисел. По таблицам выявить, какие числа могут быть представлены в виде суммы квадратов натуральных чисел.
3. **РОЖДЕСТВЕНСКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА** [1, 4, 5, 6]

 Пусть $p$ – простое число вида $4k+1$. Рассмотрим все такие тройки целых неотрицательных чисел $(x, y, z)$, что$ p=4xy+z^{2}$. Наша цель – доказать, что среди них есть хотя бы одна тройка, для которой $x=y$: тогда $p=(2x)^{2}+z^{2}$ – сумма двух квадратов. Все тройки, для которых $x\ne y$, разбиваются на пары $(x, y, z)(y, x, z)$. Поэтому достаточно доказать, что количество наших троек нечётно (тогда все они разбиться на пары не могут). Пришло время добавить к разговорам картинки. По каждой тройке $(x, y,z)$ мы нарисуем клетчатую фигуру («крылатый квадрат»): начнём с квадрата $z×z$ и приставим к нему (начиная с правого верхнего угла) 4 равных прямоугольника $x×y$ (рис. 1). Если $p=4xy+z^{2}$, мы получим крылатый квадрат площади $p$.

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 1 |

 Но если число $p$ простое, то почти каждый крылатый квадрат площади $p$ можно получить ровно из двух троек! Действительно, как восстановить тройку, имея в распоряжении крылатый квадрат? Надо разрезать его на обычный квадрат и четыре одинаковых прямоугольника: взять один из «вогнутых» углов и начать от него отрезать либо по горизонтали, либо по вертикали (рис. 2).

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 2 |

 Единственное исключение (единственное, если $p$ простое) – крест, соответствующий тройке $\left(1, k, 1\right)$, где $p=4k+1$(рис. 3).

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 3 |

А все остальные тройки мы разбили на пары. Значит, общее количество троек нечётно, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим вопрос о представимости произвольных целых положительных чисел в виде суммы двух квадратов.

1. **ОТ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ К СОСТАВНЫМ. НАБЛЮДЕНИЯ И ВЫВОДЫ**

Рассмотрим таблицу, в верхней строке и левом столбце которой расположены квадраты целых чисел, а в других клетках — суммы квадратов.

|  |
| --- |
| Таблица 1 – Таблица сумм квадратов |
|

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 |
| 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 | 50 | 65 | 82 | 101 | 122 | 145 | 170 | 197 | 226 |
| 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 29 | 40 | 53 | 68 | 85 | 104 | 125 | 148 | 173 | 200 | 229 |
| 9 | 10 | 13 | 18 | 25 | 34 | 45 | 58 | 73 | 90 | 109 | 130 | 153 | 178 | 205 | 234 |
| 16 | 17 | 20 | 25 | 32 | 41 | 52 | 65 | 80 | 97 | 116 | 137 | 160 | 185 | 212 | 241 |
| 25 | 26 | 29 | 34 | 41 | 50 | 61 | 74 | 89 | 106 | 125 | 146 | 169 | 194 | 221 | 250 |
| 36 | 37 | 40 | 45 | 52 | 61 | 72 | 85 | 100 | 117 | 136 | 157 | 180 | 205 | 232 | 261 |
| 49 | 50 | 53 | 58 | 65 | 74 | 85 | 98 | 113 | 130 | 149 | 170 | 193 | 218 | 245 | 274 |
| 64 | 65 | 68 | 73 | 80 | 89 | 100 | 113 | 128 | 145 | 164 | 185 | 208 | 233 | 260 | 289 |
| 81 | 82 | 85 | 90 | 97 | 106 | 117 | 130 | 145 | 162 | 181 | 202 | 225 | 250 | 277 | 306 |
| 100 | 101 | 104 | 109 | 116 | 125 | 136 | 149 | 164 | 181 | 200 | 221 | 244 | 269 | 296 | 325 |
| 121 | 122 | 125 | 130 | 137 | 146 | 157 | 170 | 185 | 202 | 221 | 242 | 265 | 290 | 317 | 346 |
| 144 | 145 | 148 | 153 | 160 | 169 | 180 | 193 | 208 | 225 | 244 | 265 | 288 | 313 | 340 | 369 |
| 169 | 170 | 173 | 178 | 185 | 194 | 205 | 218 | 233 | 250 | 269 | 290 | 313 | 338 | 365 | 394 |
| 196 | 197 | 200 | 205 | 212 | 221 | 232 | 245 | 260 | 277 | 296 | 317 | 340 | 365 | 392 | 421 |
| 225 | 226 | 229 | 234 | 241 | 250 | 261 | 274 | 289 | 306 | 325 | 346 | 369 | 394 | 421 | 450 |

 |

Некоторые числа представимы несколькими способами (это отмечалось во введении), например, $25=5^{2}+0^{2}=4^{2}+3^{2}.$ Или $65=8^{2}+1^{2}=7^{2}+4^{2}. $Не все числа первой и второй сотни представимы в виде суммы двух квадратов. Например, числа 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, ... – отсутствуют в таблице, это значит, что они не представимы в виде суммы двух квадратов, по крайней мере для чисел первых двух сотен.

***Наблюдение 1*.** Самое первое число в таблице, которое не представимо в виде суммы квадратов целых чисел – это число 3. Кратные 3 числа 6, 12, 15, 21 тоже не представимы, а вот числа $9=3^{2}+0^{2}, 18=3^{2}+3^{2}$— представимы.

Возникает *гипотеза*: числа, которые кратны 3, но не кратны 9, не представимы в виде суммы двух квадратов. Эта гипотеза верна. Верно даже более сильное утверждение: если сумма квадратов двух целых чисел кратна 3, то слагаемые тоже кратны 3.

*Доказательство*. Остатками от деления целого числа на 3 могут быть числа 0, 1, 2.

Запишем эти числа в общем виде: $n=3k, n=3k+1, n=3k+2, k\in Z.$ Тогда их квадраты могут иметь остатки: $n^{2} =\left(3k\right)^{2}+0,$

$$ n^{2}=\left(3k+1\right)^{2}, n^{2}=9k^{2}+6k+1=3\left(3k^{2}+2\right)+1;$$

$$ n^{2}=\left(3k+2\right)^{2}=9k^{2}+12k+4=3\left(3k^{2}+4k+1\right)+1.$$

То есть, остатками чисел $\left(3k\right)^{2}, \left(3k+1\right)^{2},\left(3k+2\right)^{2} $могут быть числа 0 и 1, и никакие другие. Сумма же остатков квадратов двух чисел при делении на 3 может равняться либо ноль (0+0), либо единице (0+1), либо двум (1+1). Значит, суммы квадратов кратны 3 тогда и только тогда, когда каждое слагаемое кратно 3. Доказано.

***Наблюдение 2***. Следующее после 3 и 6 не представимое в виде суммы двух квадратов число — это 7. Кратные 7 числа 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63 не представимы в виде суммы квадратов. Опять возникает гипотеза: если сумма$ x^{2}+y^{2}$ кратна 7, то и сами целые числа $x, y$ кратны 7.

*Доказательство.* Запишем числа в общем виде: $7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$ (остатками при делении на 7 могут быть числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Тогда квадраты этих чисел при делении на 7 могут иметь остатки: ноль, так как $\left(7k\right)^{2}\vdots 7; $единицу, так как $\left(7k+1\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k\right)+1 и \left(7k+6\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k+5\right)+1$; четвёрку, так как $ \left(7k+2\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k\right)+4$ и $\left(7k+5\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k+3\right)+4$; двойку, так как $\left(7k+3\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k+1\right)+2$ и $\left(7k+4\right)^{2}=7\left(7k^{2}+2k+2\right)+2$.

Поскольку сумма никаких двух из чисел 0, 1, 2, 4 не кратна 7, гипотеза доказана.

***Наблюдение 3***. Заметим, что в таблице есть числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов разными способами. Например,$65=8^{2}+1^{2}=7^{2}+4^{2}.$Но, число $65=13∙5.$ Причём, каждый из множителей и $13, и 5$ – простое число и представимо в виде$ 4k+1$.

Ещё один пример получен из наблюдений таблицы:

 $145=5∙29=\left(2^{2}+1^{2}\right)\left(5^{2}+2^{2}\right)=12^{2}+1^{2}=9^{2}+8^{2}.$ И числа $5и29$ тоже простые и представимы в виде $4k+1$.

То же происходит с числом $205=5∙41=13^{2}+6^{2}=9^{2}+14^{2}$

Можно предположить, что, если число представимо в виде произведения двух простых чисел, каждое из которых представимо в виде $4k+1$. Это означает, что каждый из двух простых множителей представим в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Но, в таблице есть и такие числа, как например 170 $\left(170=5∙2∙17\right),$ которые имеют в разложении уже три множителя, причём каждый множитель – простое число, которое можно представить в виде суммы квадратов двух чисел. В частности, $170=5∙2∙17=\left(2^{2}+1^{2}\right)\left(1^{2}+1^{2}\right)\left(4^{2}+1^{2}\right).$

Если рассмотреть число 200 в таблице, то его тоже можно представить двумя различными представлениями, причём множители не обязательно числа вида $4k+1$.

$200=16^{2}+2^{2}=10^{2}+10^{2}=100∙2=40∙5$*.*

Значит можно предположить, что если множитель можно представить в виде в виде суммы двух квадратов, то и произведение представимо в виде суммы двух квадратов. Докажем эту гипотезу.

*Доказательство*.

Пусть числа $M$ и $N$ представимы в виде суммы двух квадратов, то есть

$M=a^{2}+b^{2}$ и $N=c^{2}+d^{2}$, тогда

$$MN=\left(a^{2}+b^{2}\right)\left(c^{2}+d^{2}\right)=a^{2}c^{2}+a^{2}d^{2}+b^{2}c^{2}+b^{2}d^{2}=$$

$$=\left(a^{2}c^{2}+b^{2}d^{2}\right)+\left(a^{2}d^{2}+b^{2}c^{2}\right)=$$

$$=\left(a^{2}c^{2}+2abcd+b^{2}d^{2}\right)+\left(a^{2}d^{2}-2abcd+b^{2}c^{2}\right)=$$

$=\left(ac+bd\right)^{2}+\left(ad-bc\right)^{2}$*.* То есть гипотеза доказана.

Из доказанного можно вывести ещё одно правило.

*Следствие 1.* Если число, представлено произведением нескольких множителей, каждый из которых можно представить в виде суммы квадратов, то и их произведение – представимо в виде суммы квадратов целых чисел.

Доказательство. Пусть, число $M=M\_{1}∙М\_{2}∙М\_{3}∙\cdots ∙М\_{K}. $ Так как, по теореме выше, $ M\_{1}∙M\_{2}=x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}, то ((M\_{1}∙M\_{2})∙M\_{3}=x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}$. Продолжая этот процесс последовательно, получим, что $M=x\_{m}^{2}+y\_{m}^{2}.$ Следствие доказано.

И наоборот, если число $MN$ представимо в виде суммы двух квадратов, а числа $M$ и $N$ взаимно просты (не имеют общих делителей), то и $M$, и $N$ тоже представимы в виде суммы двух квадратов (это непростой факт, пока доказать не смогла).

***Наблюдение 4.*** Это наблюдение за числами таблицы возникло как следствие предыдущих наблюдений. Например, рассмотрим число 245 (выделено синим). Так как $245=7^{2}+14^{2}, $то сразу видно, что$ (7^{2}+14^{2})\vdots 7$, но и число 245, в своём разложении имеет множитель $7^{2} (245=7^{2}∙5).$ Но число 7 имеет вид $4k+3$.

Можно сделать предположение:число $N$ представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда каждое простое число вида $4k+3,$ входящее в разложение числа $N$ на простые сомножители, входит в него в чётной степени.

Проверим на числах.

Таблица 2 – Таблица числового эксперимента

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | $$392=7^{2}∙8=\left(7^{2}+0^{2}\right)\left(2^{2}+2^{2}\right)=\left(14+0\right)^{2}+\left(14-0\right)^{2}=14^{2}+13^{2}$$ |
| 2 | $$2057=11^{2}∙17=\left(11^{2}+0^{2}\right)\left(4^{2}+1^{2}\right)=\left(44+0\right)^{2}+\left(11-0\right)^{2}=44^{2}+11^{2}$$ |
| 3 | $$6370=2∙5∙7^{2}∙13=\left(1^{2}+1^{2}\right)\left(2^{2}+1^{2}\right)\left(7^{2}+0^{2}\right)\left(3^{2}+2^{2}\right);$$$$\left(1^{2}+1^{2}\right)\left(3^{2}+2^{2}\right)=\left(3+2\right)^{2}+\left(2-3\right)^{2}=5^{2}+1^{2};$$$$\left(5^{2}+1^{2}\right)\left(2^{2}+1^{2}\right)=\left(10+1\right)^{2}+\left(5-2\right)^{2}=11^{2}+3^{2};$$$$(11^{2}+3^{2})\left(7^{2}+0^{2}\right)=\left(77+0\right)^{2}+\left(0-21\right)^{2}=77^{2}+21^{2};$$$$6370=77^{2}+21^{2}. $$ |

Полученные числовые данные говорят о том, что предположение имеет право быть. Но его нужно доказать.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В результате проведённого исследования была изучена Рождественская теорема Ферма; исследованы возможности представимости натурального числа в виде суммы квадратов двух целых чисел; сформулирована и доказана гипотеза: числа, которые кратны 3, но не кратны 9, не представимы в виде суммы двух квадратов. Эта гипотеза верна. Верно даже более сильное утверждение: если сумма квадратов двух целых чисел кратна 3, то слагаемые тоже кратны 3; сформулирована и доказана гипотеза: если сумма$ x^{2}+y^{2}$ кратна 7, то и сами целые числа $x, y$ кратны 7; сформулирована и доказана гипотеза: если множители в разложении числа можно представить в виде в виде суммы двух квадратов, то и произведение представимо в виде суммы двух квадратов; на основе числового эксперимента сформулировано правило о представлении числа в виде суммы двух квадратов: число $N$ представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда каждое простое число вида $4k+3,$ входящее в разложение числа $N$ на простые сомножители, входит в него в чётной степени. Это правило нужно будет доказывать.

В целом, поставленные задачи решены.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Мерзон. Г. Рождественская теорема Ферма и Крылатые квадраты Спивака. // Квантик, № 5, 2022. С. 2-4.
2. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике: Кн. Для учащихся 5-7 кл. /А.В. Спивак. – М. Просвещение, 2002. – 207 с.
3. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. М.: Посев, 2003. 128 с.
4. Спивак А.В. Арифметика. (Библиотечка Квант). М., Изд-во: Бюро Квантум. 2007, 158 с.
5. Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа. //Квант №3, 1999. С. 14 – 22 с.
6. [Стюарт Я.](http://kvant.mccme.ru/au/styuart_ya.htm)  Сказка о рождественской теореме Ферма. //Квант, № 9, 1991. С. 12 – 19.