Методическая разработка занятия

по дисциплине МАТЕМАТИКА

по теме: «Комплексные числа. Преобразования комплексных чисел в алгебраической форме»

Разработал преподаватель: Нураева З.К.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

№ этапа	Этапы занятия, учебные вопросы, формы и методы обучения	Временная регламентация этапа (мин.)
1	Организационный этап:	3
	- проверка готовности студентов к занятию;	
	- проверка посещаемости;	
2	Мотивация учебной деятельности обучающихся Сообщение темы и цели занятия, объяснение практической и теоретической значимости изучаемого материала. Комплексные числа – одна из ведущих прикладных тем курса математики для техникумов, её содержание углубляется в общетехнических и специальных дисциплинах, например, в электротехнике, основах радиоэлектроники	7
3	Актуализация опорных знаний Предложить обучающимся ответить на вопросы: 1.Как решаются квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом? 2. Как извлечь квадратный корень из отрицательного числа? Обобщить ответы обучающихся и прийти к выводу, что выполнение операции извлечения корня чётной степени из отрицательного числа в теории действительных чисел невозможно, но она возможна на множестве других чисел-комплексных.	10
4.	Изучение нового материала **План** **1.** Проблема, приводящая к изучению комплексных чисел. **2.** Доклад обучающегося «История возникновения комплексных чисел» **3.** Форма записи. **4.** Действия над комплексными числами в алгебраической форме. **5.** Возведение в степень мнимой единицы. **6.** Упражнения	35
5.	Контроль усвоения знаний в течение всего занятия, обсуждение допущенных неточностей и ошибок и их коррекция.	5
6.	Применение знаний при решении типовых примеров и задач. Работа в парах	15
7.	Обобщение и систематизация полученных знаний..	5
8	Подведение итогов занятия	
8.1	Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению: [1]стр.490, [2]стр.229	5
8.2	Обсуждение и оценка результатов самостоятельной работы (рефлексия)	5

Комплексные числа. Преобразования комплексных чисел в алгебраической форме.

I. Организационный момент.

Сообщение темы и цели занятия, план работы. (Изучить новое множество чисел. Ввести понятие комплексного числа и действий над комплексными числами в алгебраической форме.)

II. Изложение материала.

1. Мотивация.

Какие виды чисел вам известны? (Натуральные, целые, рациональные, действительные). Как появились натуральные числа? Как появились целые числа? Как появились **рациональные** числа? Как появились **действительные** числа? Для перечисленных выше множеств чисел справедливо следующее высказывание: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Проблема:

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 = -1$. Оно на множестве действительных чисел решений не имеет, так как среди действительных чисел нет такого числа, квадрат которого отрицателен.

Таким образом, действительных чисел явно недостаточно, чтобы построить такую теорию квадратных уравнений, в рамках которой каждое квадратное уравнение было бы разрешимо. Это приводит к необходимости расширять множество действительных чисел до множества, в котором было бы разрешимо любое квадратное уравнение. Такое множество называется множеством комплексных чисел и обозначается С.

Мы пришли к введению понятия мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$. Т.е. множество действительных чисел расширяется до множества комплексных чисел за счет мнимой единицы.

2. Введение понятия комплексного числа.

Мнимые числа, которыми мы дополняем действительные числа, записываются в виде bi, где i – мнимая единица, причем $i^2 = -1$.

Исходя из этого, получим следующее определение комплексного числа.

Определение. Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. i *–мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* ($\operatorname{Re} z$) комплексного числа z, число b называется *мнимой частью* ($\operatorname{Im} z$) комплексного числа z.

Определение. Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Комплексные числа записывают в различных формах:

$a + bi$ *– алгебраическая форма комплексного числа*

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа
$z = r \cdot e^{i\varphi}$ – тригонометрическая форма комплексного числа

Доклад подготовить студенту (на 2-3 мин)

История возникновения комплексных чисел была самой сложной среди других видов чисел. Первое их упоминание в истории, можно отнести к 50 веку до нашей эры. Тогда студент Герон из Александрии, пытаясь вычислить объем пирамиды столкнулся с тем, что должен был взять квадратный корень из разности 81-144. Но тогда он посчитал это невозможным и очень быстро сдался.

В 1545 году математик Джироламо Кордано предложил создать новый вид чисел. Он предположил, что система уравнений, не имеющая решений в области действительных чисел, вполне может иметь решением числа новой природы. Только нужно было условиться как всем действовать над такими числами.

А название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт.

В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы), т.е. $i^2=-1$.

Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году.

Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. образующих единое целое.

3. Алгебраическая форма комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ *называют* алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.

Комплексное число $a + bi$ *считается* равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ *при* $b = 0$ *считается* совпадающим с действительным числом а: $a + 0i = a$.

Комплексное число $a + bi$ *при* $a = 0$ *называется* чисто мнимым и обозначается

bi: $0 + bi = bi$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) **Сложение**.

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i.$$

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1º. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2º. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3º. Комплексное число $-a - bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю:

$$z + (-z) = 0$$

Пример 1. Выполните сложение $(3 - i) + (-1 + 2i)$.

$$(3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)\, i = 2 + 1i.$$

Пример 2. Самостоятельно: $Z_1=-4+10i$ $Z_2=5+3i$ Ответ: $Z=1+13i$

2) **Вычитание**.

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Вычитание комплексных чисел определяется правилом:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i.$$

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

Пример 3. Выполните вычитание $(4 - 2i) - (-3 + 2i)$.

$$(4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)\, i = 7 - 4i.$$

Пример 4. Самостоятельно: $Z_1=-5+10i$ $Z_2=1+3i$ Ответ: $Z=-6+7i$

3) **Умножение.**

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+ b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$ называется комплексное число z, определяемое равенством:

$$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i.$$

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1º. Коммутативность: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

2º. Ассоциативность: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

3º. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

4º. $z \cdot \tilde{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

Пример 5. Выполните умножение $(2 + 3i)(5 - 7i)$.

1 способ. $(2 + 3i)(5 - 7i) = (2 \cdot 5 - 3 \cdot (- 7)) + (2 \cdot (- 7) + 3 \cdot 5)i =$

$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i.$

2 способ. $(2 + 3i)(5 - 7i) = 2\cdot 5 + 2\cdot(-7i) + 3i\cdot 5 + 3i\cdot(-7i) =$
$= 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i.$

Пример 6. Самостоятельно: Z_1=5-2i Z_2=1-4i Ответ: Z=-3-22i

Пример 7. Самостоятельно: (2+ 8i)(2 – 8i)= $2^2 + 8^2$

Вывод: $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$. Следовательно, *произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

4) **Деление.**

Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$
$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю.

Пример 8. Найти частное $\frac{2-3i}{5+2i}$.

1 способ. $\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot 2}{5^2 + 2^2} + \frac{5\cdot(-3) - 2\cdot 2}{5^2 + 2^2} i = \frac{10-6}{25+4} + \frac{-15-4}{25+4} i = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i$

2 способ. $\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10 - 4i - 15i - 6}{5^2 - (2i)^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i.$

Пример 9. Найти $\frac{8+i}{2-3i} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i$

Пример 10. Вычислить: $\frac{3-i}{1+i}$ -(2+7i)(1-i)=-8-7i

Пример 11. Вычислить: $\frac{-7-12i}{-12+7i} - \frac{13+i}{7-6i}$ =-1

Работа в парах

Вариант 1.

1. Даны два комплексных числа $Z_1= (10 + 2i)$ и $Z_2= (1 – 6i)$. Найдите их сумму, разность, произведение и частное.

2. Проверьте правильность следующих утверждений:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=2i$, $Z_2=-3i$

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=-5i$, $Z_2=3i$

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=10i$

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=7i$, $Z_2=3$

Фамилия, имя:________________ Оценка:_______

Фамилия, имя:________________ Оценка:_______

Вариант 2.

Даны два комплексных числа $z_1= (12 + 2i)$ и $z_2=(3 – 4i)$. Найдите их сумму, разность, произведение и частное.

2. Проверьте правильность следующих утверждений:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=2i$, $Z_2=-3i$

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=-5i$, $Z_2=3i$

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=10i$

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=7i$, $Z_2=3$

Фамилия, имя:________________ Оценка:_______

Фамилия, имя:________________ Оценка:_______

Ответы:

Вариант 1

1) $Z_1 + Z_2 = 11 - 4i$ 2) $Z_1 - Z_2 = 9 + 8i$ 3) $Z_1 Z_2 = 22 - 58i$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{2}{37} + \frac{62}{37}i$

Вариант 2

1) $Z_1 + Z_2 = 15 - 2i$ 2) $Z_1 - Z_2 = 9 + 6i$ 3) $Z_1 Z_2 = 44 - 42i$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{28}{25} + \frac{54}{25}i$

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

$Z_1 = 2i$, $Z_2 = -3i$, $Z_1 + Z_2 = -i$, $Z_1 - Z_2 = 5i$

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

$Z_1 = -5i$, $Z_2 = 3i$, $Z_1 \cdot Z_2 = 15$

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

$Z = 10i$, $Z^2 = -100$

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

$Z_1 = 7i$, $Z_2 = 3$, $Z_1 \cdot Z_2 = 21i$

III. Домашнее задание.

Дома учащимся предлагается выполнить задание на повторение и закрепление пройденного материала.

Домашнее задание:

1. Найти их сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел:
   а) $z_1 = (4 + 2i)$ и $z_2 = (1 - 3i)$, в) $z_1 = (5 + 2i)$ и $z_2 = (2 - 5i)$.

IV. Подведение итогов урока.

Рефлексия. Свое отношение к уроку я выражаю смайликом: (выберите нужный)

- Мне больше всего удалось…
- Для меня было открытием то, что …
- За что ты можешь себя похвалить?
- Что на ваш взгляд не удалось? Почему? Что учесть на будущее?
- Мои достижения на уроке.