ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. Е. ЕВСЕВЬЕВА»

Факультет физико-математический

Кафедра математики и методики обучения математике

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ОБЪЕМОВ МНОГОГРАННИКОВ В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

Автор работы\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Я. О. Владимирова

Направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль Математика. Информатика

Руководитель работы \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Н. Н. Дербеденева

канд. пед. наук, доцент

Оценка \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Саранск 2023

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc136366065)

[1 Теоретические основы изучения темы «Объемы многогранников» в курсе геометрии 10-11 классов 6](#_Toc136366066)

[1.1 Анализ учебной программы по математике 10-11 классов 6](#_Toc136366067)

[1.2 Анализ учебников геометрии 10-11 классов 8](#_Toc136366068)

[1.3 Различные подходы к определению объема многогранников 11](#_Toc136366069)

[1.4 Цели изучения темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии 15](#_Toc136366070)

[2 Методика изучения темы «Объемы многогранников» 19](#_Toc136366071)

[2.1 Пропедевтика изучения темы «Объемы многогранников» 19](#_Toc136366072)

[2.2 Методика изучения темы «Объем. Объем призмы. Объемы прямоугольного параллелепипеда» 22](#_Toc136366073)

[2.3 Методика изучения темы «Объемы пирамиды» 27](#_Toc136366074)

[Заключение 29](#_Toc136366075)

[Список использованных источников 31](#_Toc136366076)

# Введение

Одной из важных задач математического образования является развитие пространственного мышления учащихся, которое позволяет лучше ориентироваться в пространстве и решать задачи, связанные с геометрией. Одним из важных разделов геометрии является стереометрия, которая изучает объемы тел и их свойства. Изучение объемов многогранников в курсе стереометрии является важной задачей математического образования, поскольку оно позволяет развивать пространственное мышление и решать задачи, связанные с геометрией.

Для продуктивной деятельности в современном информационном мире требуется достаточно прочная базовая математическая подготовка, поэтому изучение темы «Объемы фигур» очень актуально, так как они необходимы для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования.

Тема «Объемы» – одна из центральных тем в курсе стереометрии средней школы. Проблема организации уроков по изучению объемов многогранников одна из самых актуальных, так как она занимает значительную часть в курсе стереометрии. Если педагог не знает методики, особенностей проведения уроков по тому или иному учебнику, то в классе не может идти речи об усвоении программного материала по математике.

Ни один предмет ученики так ни готовы воспринимать, как наглядную геометрию, в то же время, ни один предмет не начинают изучать в школе с таким опозданием, как геометрию. Процесс геометрического образования должен быть непрерывным (не допускать периодов бездействия), равномерным (не допускать перегрузок на каких-либо этапах), разнообразным [25].

Именно при изучении многогранников и их объемов решение данной задачи выступает наиболее ярко, и их рассмотрению должно быть уделено больше внимания, потому что многогранники дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для развития того соединения живого пространственного воображения со строгой логикой, которая составляет сущность геометрии.

*Объектом* исследования является процесс обучения стереометрии в средней школе.

*Предмет* исследования – изучение объемов многогранников в курсе стереометрии.

Основная *цель* исследования – разработать методические рекомендации по изучению темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии.

*Гипотеза исследования:* изучение объемов многогранников в курсе стереометрии в средней школе будет более эффективным, если:

* формировать понятие объема на наглядно-интуитивном уровне с привлечением жизненного опыта учащихся;
* целенаправленно работать по формированию понятия объема и навыков решения основных типов задач в 5-6 классах;
* систематически обращаться к задачам на объемы многогранников в старших классах.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи:*

* проанализировать программу по математике для 10-11 классов и ряд учебников по геометрии в соответствии с программой;
* проанализировать учебно-методическую и научно- педагогическую и математическую литературу по теме исследования;
* выделить различные подходы к определению понятия «Объемы многогранников»
* рассмотреть теоретические аспекты методики изучения объемов многогранников;
* определить методы развития математического мышления при изучении объемов многогранников.

Структура данной курсовой работы включает в себя введение, две главы, заключение, список использованных источников.

# 1 Теоретические основы изучения темы «Объемы многогранников» в курсе геометрии 10-11 классов

## 1.1 Анализ учебной программы по математике 10-11 классов

Проанализировав учебную программу по математике [22], можно заметить, что основной целью изучения свойств геометрических тел в пространстве является развитие пространственных представлений учащихся, освоение способов вычисления практически важных геометрических величин и дальнейшее развитие логического мышления учащихся.

Курсу присущи систематизирующий и обобщающий характер изложения, направленность на закрепление и развитие умений и навыков, полученных в неполной средней школе. При доказательстве теорем и решении задач активно используются изученные в курсе планиметрии свойства геометрических фигур, применяются геометрические преобразования, векторы и координаты. Высокий уровень абстрактности изучаемого материала, логическая строгость систематического изложения соединяются с привлечением наглядности на всех этапах учебного процесса и постоянным обращением к опыту учащихся. Умения изображать важнейшие геометрические тела, вычислять их площади поверхностей и объемы имеют большую практическую значимость. [1]

Другой подход к структурированию курса математики старших классов связан с реализацией профильной дифференциации обучения. Вводятся два курса – курс А и курс В разного объема и уровня.

Курс А ориентирован на тех учащихся, которые рассматривают математику как элемент общего образования и не предполагают использовать ее непосредственно в своей будущей профессии.

Цель изучения курса А в 10-11 классах – дать учащимся представление о роли математики в современном мире, о способах применения математики как в технических, так и в гуманитарных сферах. При изучении в этом курсе элементов анализа опора делается на наглядно-интуитивное представление учащихся, роль формальных рассуждений и доказательств невелика. Основной акцент делается на формирование умений применить изученные факты в простейших случаях.

Курс В предназначен для учащихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира. В рамках этого курса сохраняются традиции деления на два предмета – алгебра и начала анализа и геометрия.

Изучение алгебры и начал анализа и геометрии как составляющих курса В предполагает реализацию тех же целей, которые ставятся перед этими математическими дисциплинами в общеобразовательном курсе, но на более высоком и усложненном уровне [28].

Изучение программного материала по теме «Объемы многогранников» дает возможность учащимся:

* получить представление о широте применения геометрии в различных областях человеческой деятельности; познакомиться с некоторыми фактами истории геометрии;
* усвоить систематизированные сведения о пространственных формах;
* научиться проводить аналогию плоскими и пространственными конфигурациями, видеть общность и различие свойств аналогичных структур на плоскости и в пространстве, использовать планиметрические сведения для описания и исследования пространственных фигур;
* научиться иллюстрировать и моделировать проекционным чертежом пространственные формы, решать позиционные задачи (в частности, задачи на сечения) на проекционном чертеже;
* решать задачи на нахождение площадей поверхностей и объемов тел, на вычисление линейных и угловых элементов пространственных конфигураций;
* решать задачи на доказательство;
* овладеть набором приемов, часто применяемых для решения стереометрических задач на вычисление и доказательство.
* уровень обязательной подготовки по теме «Объемы многогранников» ограничивается следующими требованиями:
* уметь распознавать на моделях и по описанию основные пространственные тела (призма, пирамида), указывать их основные элементы, узнавать эти формы в окружающих предметах;
* уметь иллюстрировать условие стереометрической задачи либо чертежом, либо моделью;
* уметь вычислять значение геометрических величин (длин, площадей, объемов), применять изученные формулы;
* уметь решать несложные задачи на вычисление с использованием изученных свойств и формул (свойства параллельности прямых и плоскостей, многогранников и тел вращения).

В содержание материала по теме «Объемы многогранников» входят разделы: «Объем прямоугольного параллелепипеда». «Объемы прямой призмы и цилиндра». «Объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса». «Объем шара и площадь сферы». «Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора».

Это обязательный минимум, которым должны овладеть учащиеся, изучая тему «Объемы многогранников» [6].

## 1.2 Анализ учебников геометрии 10-11 классов

Исходя из требований программы, различные авторские коллективы предлагают ряд учебников геометрии 10-11 классов. Рассмотрим некоторые из них.

Учебник [10] является продолжением и развитием учебника для 7-9 классов того же авторского коллектива. Изложение теоретического материала более строгое, чем на предыдущей ступени обучения. Теоретические тексты кратки и доступны. Система упражнений последовательна, содержит задачи разного уровня сложности, примеры решения наиболее важных задач, причем данные решения наиболее трудных задач потребуются ученикам как опорные, при доказательстве теорем, следствий из теорем и т. д. Имеются дополнительные задания, которые идут после всей главы. Для решения этих задач необходимо знать не только материал изученной главы («Объемы тел»), но и применить знания, умения и навыки, полученные при изучении других тем. В процессе их решения очень хорошо развивается логика, воображение. Другими словами можно сказать, что при решении дополнительных задач у учащихся развиваются три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

На изучение темы «Объемы тел» отводится 19 ч. Входят такие разделы, как: объем прямоугольного параллелепипеда, объемы прямой призмы и цилиндра, объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса, объем шара и площадь сферы, объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

Основная цель – продолжить систематическое изучение многогранников и тел вращения в ходе решения задач на вычисление их объемов. В курсе стереометрии понятие объема вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры, и формулируются основные свойства объемов.

Основная теория в начале курса стереометрии изучается с опорой на геометрические тела, что повышает доступность материала, а значит, и результативность обучения [19].

Учебник И. Ф. Шарыгина [9] реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Его характеризует отказ от аксиоматического метода и акцент на использование наглядных методов в процессе построения теории и решения задач. В учебнике нетрадиционно изложены многие необходимые теоретические факты. Учебные тексты написаны хорошим литературным языком.

Теоремы в учебнике нацелены не столько на «прохождение программы», сколько на создание необходимого запаса сведений для решения задач.

Система упражнений в учебнике позволяет реализовать идею уровневой дифференциации. Здесь есть задачи, отмеченные звездочкой, предназначенные для углубленной подготовки; специально выделены полезные (П), важные (В) и трудные (Т) задачи.

Учебник И. М. Смирновой [4] для естественнонаучного профиля является одним из нескольких учебных пособий, написанных И. М. Смирновой и В. А. Смирновым. Эти учебники объединяет единая концепция авторского подхода к геометрии как науке и учебному предмету, а их отличия связаны с учебными задачами, которые ставятся в том или ином профиле. Больше внимания в учебнике уделено изучению кривых и поверхностей, рассматриваются аналитические способы задания фигур. Наряду с декартовыми координатами в пространстве используются полярные и сферические координаты.

 Учебник [11] написан кратко и просто, в нем реализован аксиоматический подход к построению курса. В теоретической части учебника авторы выделяют основные теоремы, из которых остальные получаются как следствия. В учебнике обращается внимание на практическое применение геометрии, на ее связь с искусством, архитектурой. Изложение теоретического материала строгое. Четкая структура, высокая научность, доступность изложения, простота и краткость – отличительные черты этого учебника. Авторы представляют геометрию, как науку, тесно связанную с окружающим миром. Появлению абстрактного понятия предшествует реальная картина, которая аргументирует необходимость этой абстракции.

К каждому параграфу дается набор задач. Среди них выделены основные задачи, то есть обязательные для всех.

По учебнику [11] на изучение темы «Объемы тел и площади их поверхностей» отводится 20 ч. Входят такие параграфы, как: определение объема, представление объема интегралом, объемы некоторых тел – цилиндра (в том числе призмы), конуса (в том числе пирамиды), шара; площадь поверхности, площадь сферы, площадь поверхности цилиндра и конуса.

Основная цель – продолжить ознакомление учеников с геометрическими величинами.

В учебнике И. М. Смирновой и др. [7] реализован курс, несколько меньший по объему, чем в обычных классах, он рассчитан на 2 часа в неделю в течение полутора лет. В нем сохранены основные вопросы традиционной программы по стереометрии.

После теоретического материала имеются задания для самоконтроля по теории и различные задачи, среди которых выделены важные задачи, используемые при решении других задач. Главы заканчиваются списком задач, с помощью которых можно повторить содержание главы.

Таким образом, в настоящее время действующих учебников по геометрии для 10-11 классов очень много. Каждый авторский коллектив вносит в содержание своих учебников что-то новое, отличающее их от других.

## 1.3 Различные подходы к определению объема многогранников

Задача определения объемов тел относится к глубокой древности. Она возникла в связи с практической деятельностью людей. Говоря простым языком, объем – это часть пространства, занимаемая телом. Точнее: объем – некоторая физическая, а именно геометрическая величина, характеризующая то свойство тел, что они трехмерны или занимают часть пространства. [27]

Прежде всего, величины можно измерять, получая при этом именованные числа. Будем считать, что величина, или именованное число, которое ее выражает, – это одно и то же. [26]

Тогда: 1) величина не может принимать отрицательных значений; 2) если тело (или носитель величины) разбито на части, то сумма величин частей равна величине целого. Величины одного рода можно складывать; 3) для двух величин одного рода существует отношение – отвлеченное число, которое не зависит от способа измерения величин [3].

Рассмотрим конкретный пример.

Представим себе два сосуда: один в форме куба, а второй произвольной формы. Пусть оба сосуда доверху наполняются жидкостью. Допустим, выяснилось, что для наполнения первого сосуда понадобилось m кг жидкости, а для наполнения второго сосуда понадобилось n кг жидкости. Естественно считать, что второй сосуд в раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй сосуд больше первого, мы будем называть объемом второго сосуда. Первый сосуд является единицей измерения. Из этого определения понятия объема получаются следующие его свойства:

* Во-первых, так как для заполнения каждого сосуда требуется определенное количество жидкости, то каждый сосуд имеет определенный (положительный) объем.
* Во-вторых, для заполнения равных сосудов потребуется одно и то же количество жидкости. Поэтому равные сосуды имеют равные объемы.
* В-третьих, если данный сосуд разделить на две части, то количество жидкости, необходимое для заполнения всего сосуда, состоит из количества жидкости, необходимой для заполнения его частей. Поэтому объем всего сосуда равен сумме объемов его частей [23].

По данному определению для того, чтобы узнать объем сосуда, надо заполнить его жидкостью. В жизни, однако, требуется решать обратную задачу. Требуется узнать количество жидкости, необходимой для заполнения сосуда, не производя самого заполнения. Если бы мы знали объем сосуда, то количество жидкости мы бы получили, умножая объем сосуда на количество жидкости, необходимой для заполнения единицы объема.

Тело мы будем называть простым, если его можно разбить на конечное число тетраэдров, то есть треугольных пирамид. [29] В частности, такие тела как призма, пирамида, вообще выпуклый многогранник, являются простыми.

Рассмотрим другое определение объема многогранников.

Число, характеризующее величину внутренней области многогранника, называется объемом многогранника.

Смежными многогранниками называются такие многогранники, которые имеют одну или несколько общих граней, причем остальные точки каждого из многогранников расположены вне другого.

Условимся рассматривать объем многогранника как величину, обладающую следующими свойствами:

1. Два равных многогранника имеют один и тот же объем, независимо от их расположения в пространстве.

2. Объем многогранника, представляющего собой сумму двух смежных многогранников, равен сумме объемов этих многогранников.

3. Если из двух многогранников первый содержится целиком внутри второго, то объем первого многогранника не превосходит объема второго.

Многогранники, имеющие равные объемы, называются равновеликими [30]. За единицу объема принимается объем куба, ребро которого равно единице длины (мм, см, дм, м и т.п.).

Естественно, такие определения понятия объема многогранников даются на строгом математическом языке. Рассмотрим подходы к определению понятия объемов многогранников в школьных учебниках.

Во всех учебниках объем вводится аналогично площади, с той лишь разницей, что в учебнике [10] определения нет, а в учебниках [12] и [11] они имеются: в учебнике [12] – это положительная величина, а в учебнике [11] – неотрицательная.

Существуют два подхода к определению объема [13]:

*1 подход.* Понятие объема вводится аксиоматически. Объем – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

- равные тела имеют равные объемы;

- если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей;

- объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Такой подход реализован в учебниках [12] и [11]. Причем, как говорилось выше, перед понятием объема проговаривается аналогия с понятием площади.

*2 подход.* Понятие вводится конструктивно. Будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см. называют кубическим сантиметром и обозначают см3.

Такой подход реализован в учебнике [10]. Отличие также состоит в том, что аксиомы, сформулированные в учебнике [12] в определении, в учебнике [10] прописаны отдельной чертой как свойства.

Дальнейшее изучение происходит по-разному.

Во всех учебниках первой формулой вводится объем прямоугольного параллелепипеда, как произведения трех его измерений. Что касается учебного пособия [11], то в нем изложение материала отличается от других учебников. Это связано с тем, что предназначен он для классов с углубленным изучением математики. Материал построен таким образом, что сначала сформированные наглядные представления расширяются, причем отталкиваясь от реальности. Затем, переходя от наглядности, осуществляется точная словесная формулировка. Имеется также дополнение к главе, где рассматривается вопрос равновеликости и равносоставленности. Практическая часть пособия представлена достаточным количеством задач, при этом их тематика довольно обширная по сравнению с другими учебниками. Отличительной чертой задач является то, что учащиеся должны искать и, решая, проводить самостоятельно аналогию с курсом планиметрии.

Проанализировав учебные пособия по данной теме при дальнейшем рассмотрении учебников будем опираться только на учебники [10] и [12], так как в них изложение материала и построение курса более понятно для изучения школьниками.

В младших и средних классах (I-V) понятие объема фигуры употребляется по существу как первичное, неопределяемое. У учащихся формируется убежденность в том, что окружающие их физические тела имеют определенный объем, это убеждение по интуиции переносится и на геометрические тела. По отношению к кубу и прямоугольному параллелепипеду в IV классе предлагаются формулы, которые иллюстрируются (для случая целых измерений) с помощью разбиения данной фигуры на единичные кубики.

В курсе VIII класса учащиеся знакомятся с общей задачей нахождения объемов многогранников и некоторых других фигур.

## 1.4 Цели изучения темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии

Широкие возможности для развития пространственных представлений открываются при использовании различных наглядных пособий и ТСО. [5] Можно организовать работу по изготовлению наглядных пособий силами учащихся. Эта работа потребует от них и определенных знаний, и достаточно развитого пространственного воображения. Работа по изготовлению самодельных учебных наглядных пособий проводится под руководством учителя в классе, во внеурочное время, в кружках и школьных производственных мастерских. Помимо положительного влияния на усвоение курса математики, такая работа содействует повышению эффективности урока.

Использование наглядных моделей многогранников способствует решению разных дидактических задач. Они будут полезны на уроках геометрии. Наборы многогранников (каркасные модели, деревянные, из бумаги) демонстративны, дают необходимые представления о форме. Они могут служить объектами для измерения и определения площадей поверхностей и объемов.[15] Тела из стекла прозрачны и позволяют видеть элементы фигур, сечения тела, которые показываются либо стеклянными вкладышами, либо с помощью натянутых нитей. Эти модели могут демонстрироваться целому классу.

Полезно иметь в кабинете и разбирающиеся наборы геометрических тел, сделанные из картона или плотной бумаги. Учащиеся могут самостоятельно изготовить развертки многогранников.

Также при изучении многогранников и их объемов можно использовать различные рабочие и справочные таблицы. Рабочие таблицы – это такие таблицы, по материалу которых можно организовать активную мыслительную деятельность учащихся, как по усвоению нового теоретического материала, так и по его закреплению. С помощью рабочих таблиц можно осуществить выполнение большого числа упражнений, способствующих выработке и закреплению у учащихся определенных навыков. По ним можно проводить опрос учащихся или создать проблемную ситуацию перед классом. В отличие от рабочих таблиц, справочные таблицы, то есть таблицы для запоминания, предназначены для длительного воздействия на зрительный аппарат учащихся. Такие таблицы могут быть вывешены в кабинете математики на длительное время. Таким образом, основным свойством справочных таблиц является (помимо наглядности, которая в ряде случаев играет важную роль) их дидактическая направленность. Таблицы эти предназначены для принудительного воздействия на память учащегося с целью запоминания основных фактов, формул, графиков и др.

Большие возможности воспитания самостоятельности и активности открываются при использовании тетрадей с печатной основой. В настоящий момент они все чаще появляются в школах. Тетради с печатной основой предназначаются для организации самостоятельной работы на этапе закрепления и повторения пройденного материала. Тетради с печатной основой включают большое число заданий. Цель заданий различна. Задания могут дать ученику образец способа рассуждений, решения. Данные в тетради могут содержать пропуски в тексте, которые ученики должны заполнить при работе с тетрадью (причем пропущены не случайные слова, а такие, которые заставляют ученика лишний раз обратиться к определениям, задуматься над последовательностью операций).

Готовясь к конкретному уроку, учитель выбирает те средства, с которыми легче организовать необходимую работу учащихся, то есть наиболее простые в данный момент для их восприятия.

Таким образом, чтобы достигнуть основной цели изучения многогранников – это развитие пространственных представлений и пространственного воображения учащихся – необходимо использовать на уроках геометрии наглядность и ТСО.

Рассмотрим развитие логического мышления. Данная цель реализуется через правильно подобранный задачный материал и разумное сочетание логики и интуиции учащихся. Заданный материал по теме «Объем многогранников» дает возможность применения различных методов. Одна и та же задача может быть решена по-разному. Целенаправленная работа учителя по решению «опорных» задач (задач, часто встречающихся и являющихся элементами других задач по теме «Объем многогранников»), по обучению умению применять различные методы при их решении, по отбору задач для демонстрации эффективности того или иного метода решения дает ощутимые результаты.

Материал учебника, различных пособий представляет учителю богатые возможности для дальнейшего развития логического мышления учащихся. Здесь вводятся много новых понятий, определений, доказываются теоремы, при этом возможно эффективное применение различных методов (координатный, векторный и др.). Решение задач на построение или задач, включающих построение как промежуточный элемент, требует логического обоснования, умелой записи. При работе над определением, теоремой нельзя ограничиваться воспроизведением текста учебника, нужно так организовать работу на уроке, чтобы учащиеся поняли необходимость каждого из свойств, фигурирующих в определении понятия, умели распознать понятие по его определению, умели выделять условие и заключение теоремы. [17]

Необходимо также помнить, что при изучении объемов многогранников, как и при изучении других разделов курса стереометрии, должно осуществляться разумное сочетание интуиции учащихся и логики. Педагогически нецелесообразно стремиться строго определять те понятия, о которых учащиеся имеют достаточно четкое и правильное представление из собственного жизненного опыта.

# 2 Методика изучения темы «Объемы многогранников»

## 2.1 Пропедевтика изучения темы «Объемы многогранников»

Как по ранее действовавшей, так и по новой программе тема «Прямоугольный параллелепипед и его объем» изучается в 5 классе и увязывается с изучением законов арифметических действий. Изложение этого материала содержит максимально полное рассмотрение вопросов, связанных с первоначальными пространственными представлениями, прямоугольным параллелепипедом и понятием объема. Эксперимент, проведенный во многих школах, показал, что такое изложение темы требует 15-16 уроков, в то время, как новая программа отводит на этот материал (вместе с решением задач) несколько меньшее время. [16]

Во-первых, учащиеся должны понимать, что такое прямоугольный параллелепипед. У учащихся должны быть сформированы первоначальные пространственные представления: поверхность и каркас прямоугольного параллелепипеда, четверки параллельных ребер, измерения прямоугольного параллелепипеда, равенство противоположных граней, развертка и т. д.

Каким бы простым телом ни казался параллелепипед, учащимся требуется определенное время на знакомство с ним. Каждый ученик должен иметь на уроке и дома какую-нибудь модель параллелепипеда. При этом важно, чтобы учащиеся не просто рассматривали параллелепипед, но и задействовали при его изучении и другие виды восприятия.

Результатом подобного изучения параллелепипеда должно стать осознание целого ряда особенностей. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники, и всего их шесть; напротив друг друга расположены равные грани, таких пар равных граней три; в каждой вершине сходится три неравные грани. Аналогичные выводы можно сделать и о ребрах: всего их 12; есть равные ребра – три группы по четыре ребра; в каждой вершине сходится три ребра разной длины. Наконец, вершины: их 8, по четыре вершины в каждой из противолежащих граней. Такое всестороннее и внимательное изучение параллелепипеда, однако, не предполагает, что предлагаемые далее задания выполняются учащимися в умственном плане без опоры на модели и рисунки.

Особенностью рассмотрения параллелепипеда является комбинированный характер большинства рассматриваемых задач, который заключается не только в активной работе пространственного воображения, но и в привлечении изученных ранее понятий в новых ситуациях и сочетаниях: ломаная, составленная из ребер куба, периметр грани, площадь поверхности и др. Это создает определенные сложности для учащихся, поэтому выполнение таких упражнений требует дополнительных комментариев и разъяснений учителя. [4]

Во-вторых, учащиеся должны получить первоначальное представление об объеме тела как о месте, занимаемом этим телом в пространстве. Эта задача нам представляется особенно важной. Учащиеся должны получить внутреннее убеждение о том, что объем – это объективное свойство окружающих предметов [2].

Начать изучение пункта «Объем параллелепипеда» полезно с напоминания о том, как измеряются длины и площади (выбор единицы измерения и др.)

Вывод правила вычисления объема параллелепипеда аналогичен выводу правила вычисления площади прямоугольника, поэтому сначала полезно повторить вывод последнего. Важно сопроводить вывод правила нахождения объема параллелепипеда практическим выполнением учащимися описанных в учебнике действий. Полезно дать каждому учащемуся возможность повторить эти действия самостоятельно, проговаривая и поясняя их.

В-третьих, учащиеся должны усвоить формулу вычисления объема прямоугольного параллелепипеда. При этом они должны четко понимать, что, например, формула дает не определение объема прямоугольного параллелепипеда, а способ его вычисления.

Учащиеся должны уметь приблизительно представлять кубические единицы измерения: 1 см3, 1 дм3, 1 м3, знать, что 1 дм3 = 1 л, представлять объемы некоторых сосудов, например, объем стакана равен 1/4л = 250 мл = 250 см3, уметь осуществлять переход от одних единиц измерения в другие [20].

Очень важный момент в теме «Объемы» – это переход от одних единиц измерения к другим.

Особое место при изучении объема тел занимает обучение сравнению, в частности сравнению факта, выраженного словесно, с его интерпретацией на чертеже. Чертеж может служить опровержением какого-то общего высказывания. Учась опровергать неверные высказывания, школьники постепенно привыкают к доказательствам. А это необходимый вид деятельности при изучении геометрии.

Итак, разносторонняя работа с рисунком, чертежом не только способствует общему умственному развитию школьников, но развивает пространственное воображение, обеспечивая более полное и продуктивное изучение геометрии, и начинать эту работу необходимо в 5-6 классах при изучении математики.

Задание:

1) Имеются два сосуда вместимостью 4 л и 6 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 5 л воды?

2) Какими могут быть размеры комнаты, объем которой равен 80 м3?

3) Изготовьте каркасную модель куба объемом 1дм3.

4) Куб с ребром 2 м разрезали на кубики с ребром 2 см и выстроили в один ряд. Какой длины получится ряд?

5) Вычислите объем вашей комнаты, где вы занимаетесь дома [14].

Отметим, что при изучении объемов тел необходимо уделять внимание и разверткам геометрических тел. Начать работу по изучению этого материала необходимо с практической деятельности: изготовления развертки и сворачивания ее в пространственное тело. Важно при этом обращать внимание учащихся на сам процесс сворачивания, на то, какие грани оказались противоположными, а какие – соседними, какие отрезки и точки совместились. Переход от практического решения к мысленному должен осуществляться постепенно, с учетом индивидуального развития учащихся.

Задание:

1) Куб сложен из 8 маленьких кубиков. Сколько прямоугольных параллелепипедов содержится в этом кубе?

2) Деревянный куб покрасили со всех сторон, потом распилили его на 25 одинаковых кубиков. Сколько среди них имеют одну, две, три окрашенные грани? Сколько кубиков не окрашено?

3) Какой длины получится полоса, если кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в одну линию?

## 2.2 Методика изучения темы «Объем. Объем призмы. Объемы прямоугольного параллелепипеда»

При планировании данной темы следует предварительно разбить ее на логически законченные части. Это поможет учителю правильно организовать повторение, проводить систематически учет и контроль знаний учащихся, своевременно и постепенно готовить средства наглядности, сгруппировать умения и навыки в соответствии с указаниями программы, заблаговременно подобрать соответствующие задачи и упорядочить их, подготовить тематику и содержание самостоятельных и контрольных работ, а также другие дидактические материалы.

Тема «Объемы многогранников» изучается в 11 классе. На уроки геометрии в 11 классе отводится по два часа в неделю, всего 68 часов. Из них на объемы многогранников отводится 15-19 часов (в зависимости от учебника).

Подготовительной работой к началу изучения темы «Объемы многогранников» может служить повторение темы «Многоугольники», свойств и формул площадей многоугольников, многогранников, задач на построение сечений из курса 10 класса.

Уже в 7-9 классах учитель может включать в уроки задания типа:

1) Чему равна площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, у которого длины ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c?

2) Сколько краски потребуется, чтобы окрасить куб с ребром 2,5 см, если на покраску одного квадратного метра требуется 200 г краски?

3) Вычислите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 9 см.

4) На рис. 2.1 изображена развертка четырехугольной призмы. Выполните необходимые измерения и вычислите площадь полной поверхности призмы.



Рисунок 2.1 **Развертка четырехугольной призмы**

Основная цель уроков – ввести понятие объема тела, рассмотреть свойства объемов, теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда и следствие об объеме прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

Для введения понятия объема учащимся понадобятся знания из курса планиметрии, которые необходимо повторить, а именно: понятие многоугольника, его площадь, свойства площадей, знание формул для нахождения площадей некоторых многоугольников, понятие многогранника, их виды, свойства.

Необходимо напомнить известные учащимся понятия призмы и прямоугольного параллелепипеда. Подчеркнуть, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело и отделяет его от остальной части пространства. Если следовать строго дедуктивному пути изложения школьного курса стереометрии по учебнику [10], надо определить такие понятия как «геометрическое тело», «ограниченность тела», «простое тело», которые лежат в основе определения объема многогранника. Однако на любом этапе обучения в средней школе следует руководствоваться принципом педагогической целесообразности при введении понятия.

Считаем, что полезно перед изучением определения «Объем» провести с учениками беседу по теме «Многогранники и его элементы».

1. Объясните, что такое:

 а) многогранник;

 б) поверхность многогранника.

1. Дан выпуклый многогранник. Что называют его гранью, ребром, вершиной?
2. Назовите известные вам многогранники. Выпуклым или невыпуклым является каждый из них? Сколько граней, ребер, вершин у каждого из них?
3. Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер, граней имеет полученный многогранник?
4. Какие фигуры можно получить в сечении куба плоскостью, проходящей через:

а) одно из ребер;

б) одну из диагоналей;

в) одну из его вершин?

1. Приведите пример, показывающий, что объединение выпуклых фигур может не быть выпуклой фигурой. [21]

Для формирования понятия объема тела авторами учебника [10] предлагается использовать следующие типы задач:

* нахождение объемов тел с помощью формул;
* нахождение элементов тел по их объему;
* вычисление объемов многогранников, используя свойство аддитивности.

Используя модели многогранников (куб, тетраэдр, параллелепипед, призма и др.) необходимо назвать его элементы: вершины, грани, диагонали граней, диагонали рассматриваемых тел. Важно, чтобы школьники усвоили эти понятия, что позволит правильно понимать формулировку задач, не смешивая названия различных элементов в процессе их решения. Также эти знания понадобятся в дальнейшем при выводе формул для нахождения объемов тел.

В настоящее время в школьных программах по геометрии все чаще используют учебные пособия [10] и [12].

Доказательство теоремы в учебнике [10] разбито на два случая:

1) измерения a, b, c - конечные десятичные дроби,

2) хотя бы одно из измерений a, b, c - бесконечная десятичная дробь. При этом автор делает ссылку, что доказательство этой теоремы не является обязательным для изучения. В первом случае (a, b, c - бесконечная десятичная дробь), автор предлагает разбить каждое ребро параллелепипеда на равные части длины 1/10n, а затем через эти точки провести плоскости, перпендикулярные данному ребру. После находят объем каждого такого куба (с опорой на понятие объема), а затем по свойствам объема находят объем данного тела, то есть прямоугольного параллелепипеда.

По учебнику [12] при выводе данной формулы вначале доказывают утверждение о том, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты. При доказательстве этого утверждения автор также предлагает разбить ребро одного из параллелепипедов на большое число n равных частей, а ребро другого параллелепипеда на m равных частей.

Преимущество учебника [10] в том, что после каждого пункта идет список вопросов и задач, в то время, как в учебнике [12] практическая часть представлена небольшим количеством задач. Но основная тематика задач двух учебников похожа друг на друга. Далее порядок изучения тем расходится. В учебнике [12] предлагается рассмотреть объем наклонного параллелепипеда, причем доказательство сводится к добавлению и отсечению треугольной призмы. Тогда доказательство будет опираться на формулу прямоугольного параллелепипеда.

Используя следствие теоремы и свойства объемов, доказывается формула объема прямой призмы, также в два этапа. Сначала для прямой призмы, в основании которой лежит произвольный треугольник, а затем более общий случай – для произвольной призмы. При доказательстве авторский коллектив учебника [10] опирается на выведенную формулу объема прямой призмы, в основании которой прямоугольный треугольник. Поэтому на втором этапе учащиеся легко могут доказать формулу для произвольной прямой призмы, разбив основание на треугольники.

Автор учебника [12] при доказательстве теоремы об объеме призмы, дополняет сначала её до параллелепипеда; используется свойство симметрии для того, чтобы показать, что достроенная призма симметрична исходной, а следовательно их объемы равны. Учащиеся уже умеют находить объем параллелепипеда, а площадь основания (состоящая из двух треугольников) они умеют находить еще из планиметрии. Следовательно, они смогут найти объем призмы. Далее Погорелов рассматривает произвольную призму. Так же как и Атанасян, Погорелов разбивает основание призмы на треугольники. Затем находит объем каждой такой призмы, а уже затем по определению объемов находит объем данной призмы (как сумма объемов треугольных призм, её составляющих).

## 2.3 Методика изучения темы «Объемы пирамиды»

На изучение темы «Объем пирамиды» целесообразно отвести три урока.

На первом уроке следует рассмотреть доказательство теоремы об объеме пирамиды. Основная цель данного урока – вывести формулу для нахождения объема пирамиды, показать применение теории к решению задач.

Для этого необходимо предложить ученикам задачи на нахождение площади поверхности пирамиды, вспомнить основные элементы, свойства. Предложить учащимся задачи на нахождение площади основания и т.д.

 Используя текст учебника, необходимо подробно разобрать, как получается выражение для площади сечения пирамиды через площадь ее основания:

.

Вычислить интеграл учащиеся могут самостоятельно.

Второй урок можно посвятить повторению вопросов теории и решению задач. При подведении итогов урока можно использовать вопросы 4, 5 к главе VII учебника [10], а также задачи:

* Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (рис. 2.2). Какие многоугольники могут быть основанием таких пирамид?
* Докажите, что если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенных из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 2.2). Какие многоугольники могут быть основанием таких пирамид?



Рисунок 2.2 **Пример задач при изучении темы «Объем пирамиды»**

На третьем уроке выводится формула объема усеченной пирамиды как следствие теоремы об объеме пирамиды. В учебнике [6] предлагается вывести эту формулу самостоятельно.

В конце данного урока проводится самостоятельная работа по учебнику [10] контролирующего характера (на 6-8 мин):

Вариант I: задача № 686 (а) для l = 10 см,  = 300.

Вариант II: задача № 688 (а) для Н = 10 см,  = 600.

Вывод формулы объема пирамиды в учебнике [10] рассматривается в два этапа. Вначале автор предлагает рассмотреть для треугольной пирамиды, а затем – для произвольной. Автор проводит ось, рассматривает сечение плоскостью, выражает площадь сечения через площадь основания, применяет основную формулу для вычисления объемов (определенный интеграл). В доказательстве автор также использует признаки подобия.

# Заключение

В целом, применение методики изучения объемов многогранников в курсе стереометрии является эффективным способом повышения качества обучения математике. Однако, для достижения максимальных результатов необходимо использовать не только теоретические, но и практические приемы, учитывая особенности каждого ученика.

При изучении объемов многогранников в стереометрии ученики могут столкнуться с различными проблемами и трудностями. Некоторые из них могут быть связаны с математической подготовкой, а другие - с особенностями самого предмета.

Исследование перспектив дальнейшего развития методики изучения объемов многогранников в курсе стереометрии и возможности ее применения в других областях математики является важным шагом для улучшения качества обучения математике. [18] Некоторые перспективные направления развития методики могут включать:

* Использование технологий виртуальной реальности для создания интерактивных симуляций и тренировок, позволяющих учащимся более глубоко и эффективно изучать объемы многогранников.
* Интеграция методики изучения объемов многогранников в курс алгебры и геометрии, чтобы учащиеся могли более глубоко понимать алгебраические и геометрические концепции.
* Развитие новых методов проверки знаний учащихся, которые позволят более точно оценить их понимание объемов многогранников и определить области, требующие дополнительного изучения.
* Разработка индивидуальных программ обучения, учитывающих различия в уровне математической подготовки и способностях учащихся.
* Разработка методов, позволяющих учащимся лучше понимать применение объемов многогранников в реальной жизни, например, в архитектуре, инженерии и дизайне.

Исследование перспектив дальнейшего развития методики изучения объемов многогранников и ее применения в других областях математики может помочь улучшить качество обучения математике и подготовить учащихся к успешной карьере в будущем.

# Список использованных источников

1. Абашеева, А. А. Формирование познавательной мотивации старших школьников при обучении математике // Евразийский Союз Ученых. 2014.
2. Антоновский, М. Я. Формирование понятия объема в 4 классе [Текст] / М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1970. – №4. – С. 15.
3. Бескин, Л. Н. Стереометрия [Текст]: кн. для учителя / М.: Просвещение, 1960.
4. Бондарь, А. А. О развитии подходов в формировании понятия «Многогранник» в школьном курсе, геометрии // Педагогическое образование в России. 2021.
5. Быкова, Д. С., Утеева Р.А. Метода аналогии и обобщения в школьном курсе математики // Вестник магистратуры. 2016.
6. Гаджимурадов, М. А. Об учебниках геометрии нового поколения // Известия ДГПУ. Психолого-педагогические науки. 2009.
7. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для гуманитарного профиля [Текст] / И. М. Смирнова [и др.]. – М.: Просвещение, 2001.
8. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для ест.- научного профиля [Текст] / И. М. Смирнова [и др.]. – М.: Просвещение,2003.
9. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для общеобразовательных учебных заведений [Текст] / И. Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа,1999.
10. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян [и др.] – М.: Просвещение, 2003.
11. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений [Текст] / Александров А. Д. [и др.] – М.: Просвещение, 1998.
12. Геометрия 7-11 кл. сред. шк. [Текст] / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение,1991.
13. Горшкова, Ю. М. О задачах вычисления объёмов многогранников с данным комбинаторным строением и длинами рёбер в курсе геометрии // Известия ПГУ им. В.Г. Белинского. 2009.
14. Долбинин, Н. П. О необходимости курса наглядной геометрии в младших классах [Текст] / Н. П. Долбинин, И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1990. – №6. – С. 19.
15. Калабугина, Е. А. Инновационный подход к изучению тел вращения в школьном курсе геометрии // Современная высшая школа: инновационный аспект. 2012.
16. Львова, И. С. Методика преподавания математики в средней школе / И.С. Львова. — Москва : Просвещение, 2015. — 368 с.
17. Ляшенко, В. С. Использование инновационных форм и методик в процессе обучения математике // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2020.
18. Мамонтова, Т. В. Стереометрия : учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / Т. В. Мамонтова, Т. П. Ковалева. — Москва : Издательство «Дрофа», 2018. — 224 с.
19. Марина, Е. В., Использование устных упражнений при изучении стереометрии в средней школе // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. 2012.
20. Математика 5-6 [Текст]: кн. для учителя / С. Б. Суворова, Л. В.Кузнецова. – М.: Просвещение, 2006, – 191 с.
21. Методика преподавания математики в ср. шк. Частная методика [Текст]: учеб. пособие для студентов пединститутов по специальности «Математика» / А. Я. Блох [и др.]; сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987.
22. Павлова, О. Н. Учебная программа 10-11 кл. [Текст] / О. Павлова // Математика. – 2003. – №37.
23. Погорелов, А. В. Элементарная геометрия [Текст] / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1974.
24. Подаева, Н. Г., Закономерности формирования научных понятий при обучении математике в школе: социокультурный подход // Ped.Rev.. 2017.
25. Саранцев, Г. И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях [Текст] / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 1991. – №6. – С. 38.
26. Утюмова, Е. А. Проектирование педагогом процесса обучения стереометрии в рамках рефлексивного подхода // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2008.
27. Хардт, Л. Н. Стереометрия : учебник / Л. Н. Хардт. — Москва : Наука, 2006. — 448 с.
28. Шевкин, Л. А. От реформы до реформы / попытка обзора учебников по математике // Школьное образование. – 2002. – №5.
29. Шелевер, Л. В. Повышение мотивации учащихся при изучении стереометрии через использование элементов дополненной реальности // Молодежный сборник научных статей «Научные стремления». 2018.
30. Шувалова, Э. В. Геометрия [Текст] / Э. В. Шувалова – М.: Наука, 1968.