МОУ «ТИРАСПОЛЬСКИЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»

Исследовательская работа

Секция: Геометрия

Тема «Задавать квадрики или строить коники»

Автор работы: Пашун Мария Денисовна,
учащаяся 10 класса физико-математического отделения ТОТЛ

Руководитель: Легась Е.В.,
учитель математики высшей квалификационной категории

г. Тирасполь
2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Если спросить школьника, что он знает о параболе, то практически каждый ответит, что это линия, которая отражает график квадратичной функции. Более подготовленные учащиеся добавят, что у параболы есть вершина и ветви, которые могут быть направлены вверх или вниз (зависит от знака старшего коэффициента квадратного трехчлена, задающего квадратичную функцию). Учащиеся школ умеют находить вершину параболы, строить эту линию в прямоугольной системе координат, задавать уравнение параболы по координатам трех ее точек (или по координатам вершины и точки).

Кажется, что о параболе ученики знают практически все. Но это вовсе не так. Учитель математики как-то заметила, что у параболы есть… директриса. Замечание было настолько интересным, что нами было решено исследовать этот вопрос более подробно. Поиски информации в интернете позволили установить, что парабола – это одна из коник, или плоских квадрик. Название этих математических объектов весьма забавны, тем более, что в обыденной жизни слова «коники» и «квадрики» используются в другом значении. Изучению именно этих математических объектов и посвящена наша работа.

Мы ***полагаем***, что парабола и гипербола – это геометрические фигуры, обладающими определенными свойствами, изучение которых на уроках математики будет способствовать более глубокому пониманию не только алгебры, геометрии, но и физики.

Цель работы: изучить свойства параболы и гиперболы как геометрических фигур, выяснить их практическое применение в технике.

Для достижения этих целей необходимо решить следующие задачи:

1) выяснить, что означают понятия «коники», «квадрики», а для этого отобрать и изучить литературу по данной теме;
2) дать геометрическое определение гиперболе, параболе и эллипсу и установить, как связаны между собой алгебраическое и геометрическое определение этих кривых;
3) доказать, что эллипс, парабола и гипербола являются не только кониками, но и квадриками;
4) изучить свойства параболы, гиперболы и эллипса, их практическое применение в технике;
5) изучить альтернативные способы построения кривых.

Мы использовали следующие ***методы***:

- ✓ сбор и обработка информации,
- ✓ наблюдение,
- ✓ сравнение, анализ, синтез
- ✓ моделирование,

- ✓ эксперимент.

Изучению свойств гиперболы, параболы и эллипса посвящено достаточно много работ. Считаем, что ***отличием*** данной работы является попытка рассмотреть в одной работе параболу, эллипс и гиперболу одновременно как алгебраический, так и геометрический объект, а также объяснить физические свойства параболоида, гиперболоида и эллипсоида с помощью геометрии.

Практическая ценность работы состоит в том, что материал, содержащийся в данной работе, может быть использован не только во внеурочной деятельности (на занятиях в математическом кружке, различных внеклассных мероприятиях и пр.), но и на уроках математики для развития навыков решения задач.

Коники и квадрики

Итак, что же такое коники с точки зрения математики? Коники – множественное число. Как правильно говорить в единственном числе: коник или коника? Давайте разберемся.

Согласно толковому словарю Ушакова [3], существительное «коник» мужского рода, слово имеет несколько значений:

1) конек (уменьш. к конь);
2) в крестьянских избах скамья с находящимся под ней ящиком.

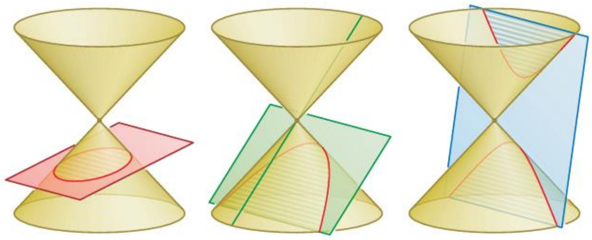
Очевидно, существительное мужского рода никакого отношения к математике не имеет.

Толковый словарь живого великорусского языка В.И. Даля указывает, что существительное «коника» женского рода, и употребляется в значении «растение чернобыль, быльняк» [4]. Такое же толкование можно найти и в Википедии. Однако Свободная энциклопедия указывает, что слово «коника» употребляется еще и в значении «П- или Г-образная конструкция для перевозки леса-кругляка и других крупногабаритных длинномерных материалов на большегрузных автомобилях» [5]. А еще более привычно для нас слышать это слово в составе идиоматического выражения: выкидывать коники, строить коники – взбрыкивать, вести себя резко, непредсказуемо, капризничать [5].

А вот во множественном числе слово «коники» употребляется математиками в качестве общего названия конических сечений.

Сечением называют изображение фигуры, получающейся при мысленном рассечении предмета одной или несколькими плоскостями. Если для этих целей взять конус, то полученные в результате его сечения фигуры и есть коники.

Коническими сечениями, или ***кониками***, называют кривые, по которым бесконечный в обе стороны прямой круговой конус (точнее, коническая поверхность) пересекается с плоскостью.



(источник: https://zadachi.mccme.ru/plak/index.html)

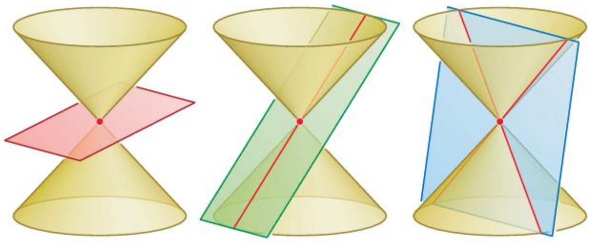
Три основных типа конических сечений возникают, если плоскость не проходит через вершину конуса:

• если плоскость пересекает только одну полу конуса, то сечение является ***эллипсом***, и в частности, окружностью, если плоскость сечения параллельна плоскости, содержащей направляющую конуса;

• если плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса, то сечение является ***параболой***;

• если плоскость пересекает обе полы конуса, то сечение является ***гиперболой***.

Кроме гиперболы, параболы и эллипса (окружности) в сечении конуса можно получить точку, прямую или пару прямых. Для этого плоскость сечения должна проходить через вершину конуса:



(источник: https://zadachi.mccme.ru/plak/index.html)

Т.е. в случае, если плоскость проходит через вершину конуса, то вместо эллипса (окружности) в сечении получаем точку, вместо параболы – прямую, а вместо гиперболы – две прямые. Поэтому такие сечения называют вырожденными коническими сечениями, а коники – невырожденными коническими сечениями. Значит, с точки зрения математика, строить коники – это значит строить невырожденные конические сечения, а вовсе не капризничать.

Открывателем конических сечений предположительно считается Менехм (4 в. до н.э.), ученик Платона и учитель Александра Македонского. Менехм использовал параболу и равнобочную гиперболу для решения задачи об удвоении куба. Трактаты о конических сечениях, написанные Аристеем и Евклидом в конце 4 в. до н.э., были утеряны, но материалы из них вошли в знаменитые Конические сечения Аполлония Пергского (ок. 260–170 до н.э.), которые сохранились до нашего времени. Аполлоний отказался от требования перпендикулярности секущей плоскости образующей конуса и, варьируя угол ее наклона, получил все конические сечения из одного кругового конуса, прямого или наклонного. Аполлонию мы обязаны и современными названиями кривых – эллипс, парабола и гипербола. [6]

Именно Аполлоний использовал в своих построениях двухполостной круговой конус.

Какое отношение же коники имеют к квадрикам?

Квадрикой на плоскости (или кривой второго порядка) [7] называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению 2-го порядка с двумя неизвестными, т.е. уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (*)$$

где $a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{12}{}^2 \neq 0$

Из школьного кура алгебры известно, что уравнение параболы имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Если в этом уравнении все слагаемые перенести в одну часть уравнения, то получим уравнение:

$$ax^2 + bx + c - y = 0, \text{ где } a \neq 0. \ (**)$$

Заметим, что если $a_{11} = a, a_{12} = 0,\ a_{22} = 0, 2a_1 = b, 2a_2 = -1, a_0 = c$, то $a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{12}{}^2 = a^2 + 0^2 + 0^2 = a^2 \neq 0$. Т.е. уравнение параболы (**) является частным случаем уравнения (*). Это значит, что парабола является квадрикой!

На плоскости существует 8 видов квадрик: пустое множество, точка, прямая, две параллельные прямые, две пересекающиеся прямые, парабола, эллипс, гипербола. Т.е. коники – это частные случаи квадрик.

В переводе с греческого «парабола» — сопоставление, сравнение, «эллипс» — выпадение, опущение, «хиперболе» — преувеличение. Рассмотрим каждую фигуру.

Парабола – квадрика или коника

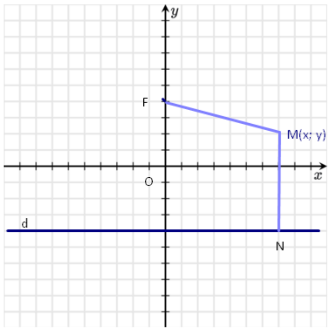
Поскольку парабола является и квадрикой, и коникой одновременно, то можно дать два определения параболы. Предварительно рассмотрим задачу:

Задача. *Найти множество всех точек, для каждой из которых расстояние до данной прямой равно расстоянию до данной точки, не лежащей на данной прямой.*

Решение.

1) *Пусть d – данная прямая, F - данная точка, p – расстояние между ними. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось ординат проходила бы через точку F перпендикулярно прямой d, а начало координат*

выберем в точке, которая является серединой перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d.



Тогда точка F будет иметь координаты $\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$,

а прямую d *можно задать уравнением* $y = -\frac{p}{2}$.

2) *Отметим на плоскости произвольную точку M (x; y), расстояния от которой до прямой* d *и до точки F равны.*
3) *Пусть* $MN\ \perp d, N \in d$. *Тогда расстояние от точки M до прямой N – это длина отрезка MN. Т.к. точка N лежит на прямой* d, *то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т.е. вторая координата точки N равна* $-\frac{p}{2}$.

   Т.к. $MN\ \perp d$, $\mathrm{M}\ (x;\ y)$ и $d\ \parallel Ox$, *то первая координата точки N равна x. Таким образом, N* $\left(x;\ -\frac{p}{2}\right)$. *Длина отрезка MN будет равна*

$$\sqrt{(x-x)^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right| \ \textbf{(1)}$$

4) *С другой стороны, расстояние между точками M(x;y) и F*$\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ *равно*

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \textbf{(2)}$$

5) *Т.к. по условию задачи MF = MN, то* $\sqrt{x^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$ ***(3).***

Т.к. обе части уравнения (3) неотрицательны, возведем их в квадрат, получим равносильное уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2y \cdot \frac{p}{2} + y^2 = y^2 + 2y \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2 = 2py,$$

т.е.

$$y = \frac{1}{2p} x^2 \ \textbf{(4)}$$

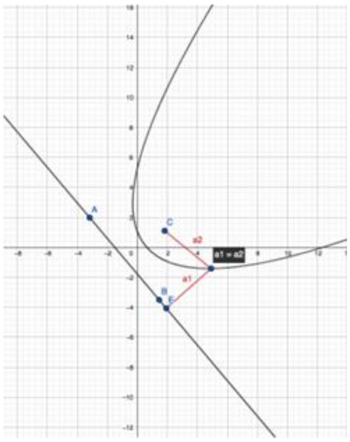
В процессе решения мы использовали только равносильные преобразования, поэтому уравнения (3) и (4) равносильны. Но уравнение (4) есть уравнение параболы с центром в точке (0; 0). Таким образом, искомое множество точек представляет собой параболу.

<u>Ответ:</u> искомое множество точек - парабола, центр которой совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Замечание. Точка F называется ***фокусом*** параболы, а прямая d – ***директрисой*** этой параболы.

В курсе алгебры ***параболой*** *называется кривая (линия), являющаяся графиком квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$, *где* $a \neq 0$.

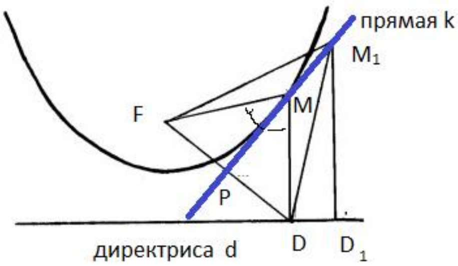
С точки зрения геометрии, ***параболой*** *называют геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки, называемой фокусом, и фиксированной прямой, называемой директрисой, не проходящей через фокус.*

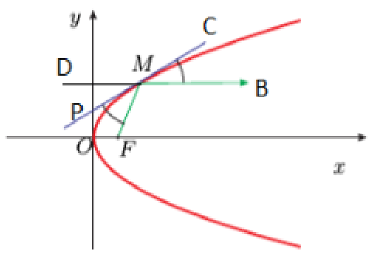


(источник: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/analytic-geometr-penskoy-M.pdf)

Получается, для любой параболы существует прямая (директриса параболы) и точка (фокус параболы), такие, что расстояние от любой точки параболы до директрисы и расстояние от этой точки до фокуса параболы равны.

Но почему эта замечательная точка называется фокусом (латинское focus - очаг, пламя)? Оказывается, парабола обладает интересным ***оптическим свойством***: *любой луч света, исходящий из фокуса, после отражения от параболы становится параллельным оси параболы.*





(источник: https://reshimvse.com/zadacha.php?id=29145)

Докажем это.

1) *Пусть d – директриса параболы, F- ее фокус, M – произвольная точка параболы,* $MD \perp d$, $D \in d$. *Тогда по определению параболы FM = MD. Тогда треугольник FMD - равнобедренный.*

2) Проведем MP – высоту, биссектрису и медиану равнобедренного треугольника MD. Прямая MP является серединным перпендикуляром к отрезку FD.

3) Докажем, что MP – касательная к параболе, т.е. точка M – единственная общая точка параболы и прямой MP. Применим метод от противного. Предположим, что на прямой MP есть еще одна точка M_1, принадлежащая также и параболе, отличная от точки M. По свойству параболы $FM_1 = M_1D$.

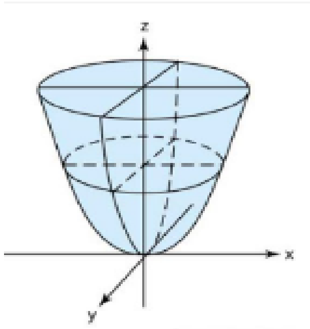
4) Проведем перпендикуляр $M_1D_1 \perp d$ (d – директриса). По свойству серединного перпендикуляра $FM_1=M_1D$. Но т.к. $M_1D_1 \perp d$, то наклонная M_1D больше перпендикуляра M_1D_1. Значит, $FM_1 > M_1D$, что противоречит свойству параболы (см. п. 3 доказательства). Полученное противоречие доказывает, что точка M – единственная общая точка параболы и прямой MP, т.е. MP – касательная к параболе.

5) Касательная к параболе MP – биссектриса $\angle FMD$, т.е. $\angle FMP = \angle MPD$; $\angle MPD = \angle BMC$ (как вертикальные). Получим, что $\angle FMP = \angle BMC$.

Т.е. касательная к параболе составляет равные углы с прямой FM и лучом MB, выходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы. Угол падения равен углу отражения, это означает, что луч, направленный из фокального радиуса в точку M параболы, отразится в направлении луча MB, т.е. по прямой параллельной оси Ox (оси симметрии параболы).

Это и есть ***__оптическое свойство параболы__***: ***свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей. И наоборот, пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе.***

Если вращать параболу вокруг своей оси, то получим фигуру, которую математики называют параболоидом (параболоидом вращения). Поскольку фокус параболы лежит на ее оси, то эта же точка будет и фокусом параболоида. Параболоид имеет те же оптические свойства, что и парабола. Это свойство было открыто еще в Древней Греции Аполлонием Пергским.



(источник: https://function-x.ru/surfaces_of_the_second_order.html)

Сегодня оптическое свойство используется во многих технических устройствах.

- Параболическое зеркало дает более направленный пучок света и используются во всех крупнейших ***телескопах.***

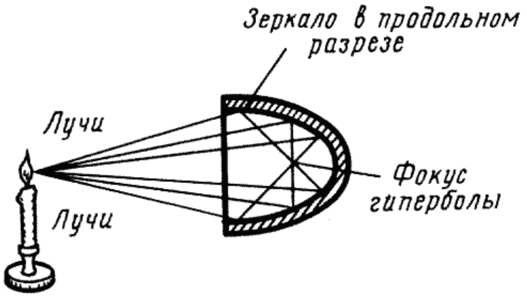
- ***В карманном фонарике*** параболическое зеркало создает узкий направленный световой луч (для этого лампочку помещают в фокус).
- ***Солнечная зажигалка*** также представляет собой параболическое зеркало из нержавеющей стали. Почти такое же используется для зажигания Олимпийского огня в Афинах.

- В СССР были разработаны специальные ***параболические нагреватели***, состоящие из лампы и параболического зеркала, которые были предназначены для интенсивного прогрева участка тела, так называемые рефлекторы.

- Для фото и кино, телевидения, сцены и оптических приборов применяются ***галогеннные лампы*** – рефлекторные лампы с отражателем.
- ***Рентгеновский коллиматор*** (прибор для создания параллельного пучка света) представляет собой дополнительное устройство для рентгеновского аппарата в виде муфты или стакана, которое формирует пучок ионизирующего излучения и определяет его направление. Это обеспечивает максимальное поглощение побочного ионизирующего излучения и дополнительную защиту оператора от воздействия радиации.

- ***Коллиматорный прицел*** обеспечивает высокую скорость прицеливания — примерно в 2—3 раза выше, чем традиционные открытые прицелы, поскольку излучение от источника света в таком прицеле отражается линзой коллиматора в глаз наблюдателя параллельным потоком, В результате зрачок наблюдателя не обязан находиться на оптической оси прицела, достаточно, чтобы он находился в пределах проекции линзы прицела вдоль этой оси.

В 1927 году Алексей Толстой завершил свой фантастический роман ***«Гиперболоид инженера Гарина»*** - невероятную историю талантливого ученого, мечтающего обрести власть над всем миром при помощи созданного им теплового чудо-луча, оказавшегося в его руках грозным оружием. Аппарат, испускающий тепловой луч огромной мощности, способный разрушить любые преграды, в романе назван гиперболоидом, хотя более правильным названием устройства Гарина должно было бы быть параболоид. Алексей Толстой соглашался с этим и говорил, что об этом знает, однако выбрал слово «гиперболоид» из-за более внушительного звучания. [5]



(источник: https://www.miloliza.com/aleksej-tolstoj-proizvedeniya-dlya-podrostkov/490-giperboloid-inzhenera-garina/17475-glava-43)

Добавим, что коники имеют еще одну интересную числовую характеристику – ***эксцентриситет***, которая показывает степень отклонения коники от окружности. Другими словами, эксцентриситет – это число, равное отношению расстояния от точки конического сечения до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы. Согласно определению параболы, расстояние от точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы параболы, поэтому ***эксцентриситет параболы*** равен 1.

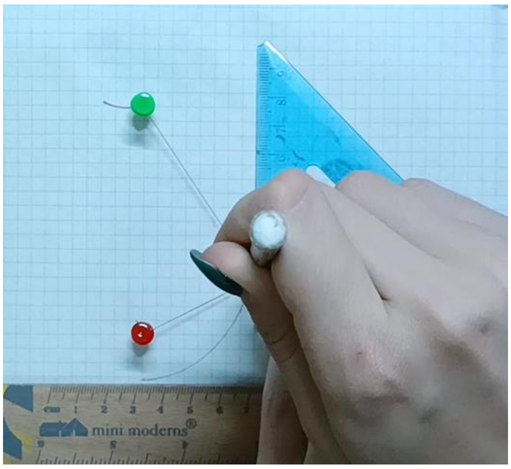
Утверждается, что геометрическое определение параболы позволяет выполнить ее построение, используя в качестве инструмента только угольник, линейку, да еще нить. Подтвердим это утверждение с помощью эксперимента.

Эксперимент № 1. Построение параболы с помощью нити

Цель: выяснить, можно ли построить параболу с помощью натянутой нити.

Ход эксперимента: Закрепим один конец нити в вершине угольника, не лежащей на линейке, другой конец нити - кнопкой на листе бумаги. Карандашом будем прижимать нить к катету угольника так, чтобы она всегда была натянута.

Возьмём длину нити равной вертикальному катету угольника. Прижмём карандашом нить к угольнику, обогнём её вокруг карандаша и зафиксируем конец нити рядом с угольником кнопкой. Тем самым, грифель будет серединой отрезка между кнопкой и линейкой.



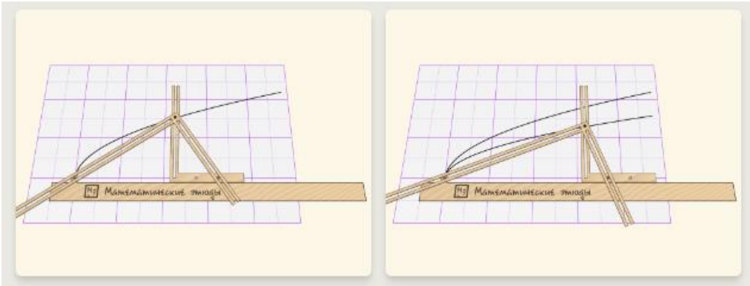
Результат: При движении угольника грифель карандаша всегда остаётся равноудалённым от линейки и кнопки. А значит, согласно геометрическому определению параболы, грифель нарисует на листе бумаги параболу с фокусом в кнопке и директрисой — линейкой.

Вывод: парабола может быть построена с помощью натянутой нити.

Параболограф Кавальери

Красивый способ рисования параболы придумал итальянский математик Бонавентура Кавальери (итал. Bonaventura Francesco Cavalieri, лат. Cavalerius, 1598—1657) ещё в XVII веке.

Параболограф Кавальери состоит из трёх частей: линейки и двух жёстких прямых углов, стороны которых имеют прорези.



(источник: https://etudes.ru/models/conic-sections-cavalieri-parabolograf/?ref=calso?hl=%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0)

По неподвижной относительно листа линейке один прямой угол скользит так, что его горизонтальная сторона постоянно соприкасается с линейкой. Второй прямой угол образует с линейкой прямоугольный треугольник. Вершина при прямом угле снабжена грифелем и скользит по направляющей прорези вертикальной стороны первого прямого угла. Две другие стороны второго прямого угла скользят своими прорезями по направляющим штифтам, один из которых жёстко закреплён на линейке, а другой — на горизонтальной стороне подвижного угла. При движении параболографа Кавальери грифель рисует параболу. Если штифт переставить, кривая будет другой, но тоже параболой. [8]

Гипербола как квадрика

Этимологически слово гипербола имеет греческое происхождение: hyper — через, сверх и bole — бросок, метание. Далее в 18 веке оно стало использоваться в латинском языке hyperbole — преувеличение.

Филологи используют слово «гипербола» ни чуть не реже, чем математики, и рассматривают гиперболу как языковое средство усиления эмоциональной оценки, заключающееся в чрезмерном преувеличении каких-либо явлений, качеств, свойств или процессов.

На уроках математики мы рассматриваем гиперболу как график функции вида $y = \frac{k}{x-m} + n$, где k, m и n – некоторые числа, причем $k \neq 0$, а x, y – переменные.

Покажем, что гипербола является квадрикой. Для этого преобразуем формулу:

$$y = \frac{k}{x-m} + n \Rightarrow y \cdot (x-m) = k + n(x-m) \Rightarrow yx - mx - k - nx + mn = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy - (m+n)x + (mn-k) = 0 \ (***)$$

Теперь сравним формулу (***) с формулой (*).

Положим $a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} = \frac{1}{2}, \ \ a_1 = -\frac{m+n}{2}, a_2 = 0, a_0 = mn - k.$ Тогда

$$a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{12}{}^2 = 0^2 + 0^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4} \neq 0$$

Т.е. уравнение гиперболы (***) является частным случаем уравнения (*). Это значит, что гипербола является квадрикой.

Заметим, что для большинства школьников гипербола ассоциируется с графиком функции $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$. Это частный случай уравнения $y = \frac{k}{x-m} + n$, где $m = n = 0$.

Как и в случае с параболой, можно дать определение гиперболы, не связанное с системой координат.

Гиперболой *называется линия, состоящая из всех таких точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, имеет одно и то же значение, меньшее чем F_1F_2.* [2]

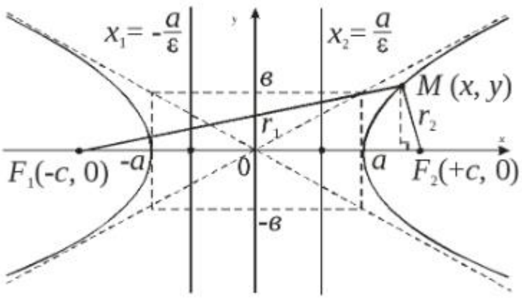
Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами гиперболы***.

Используя данное определение, мы получили уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (****)$$

Вывод уравнения представлен нами в Приложении 1 (*задача 2*).

Уравнение (****) называют ***каноническим уравнением гиперболы***. Множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, образую гиперболу следующего вида:



(источник: https://studfile.net/preview/1722141/page:4/)

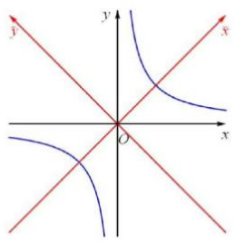
Ветви гиперболы расположены между прямыми, уравнения которых можно найти. Прямые проходят через начало координат и точки с координатами соответственно (-a; b) и (a; b). Из курса алгебры: уравнение прямой, проходящей через начало координат, задается уравнением: $y = kx$. Найдем коэффициент k для каждой прямой:

$b = -ak_1 \Longrightarrow k_1 = -\frac{b}{a}$ и $b = ak_2 \Longrightarrow k_2 = \frac{b}{a}$

Прямые $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Заметим, что каноническое уравнение отличается от привычного нам уравнения $y = \frac{k}{x}$. Как они связаны?

Положим в каноническом уравнении гиперболы $a^2 = b^2 = 2k.$ Тогда асимптотами гиперболы будут прямые $y = -x$ и $y = x.$ Такую гиперболу называют равнобочной. А ее асимптоты являются биссектрисами координатных углов и взаимно перпендикулярны.



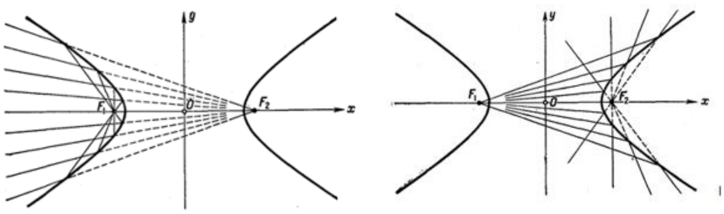
Нетрудно заметить, что если координатную плоскость повернуть на 45° вокруг начала координат, то мы получим привычную нам гиперболу $y = \frac{k}{x}$.

У параболы есть фокус и директриса. У гиперболы мы обнаружили два фокуса. Есть ли у гиперболы директриса? Если есть, то ***гиперболу*** можно определить как *геометрическое место плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная больше единицы и называемая его эксцентриситетом*.

В Приложении 1 (*задача 7*) мы доказали, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная, и равна $\frac{c}{a}$. Т.е. мы показали, что прямые $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{c}}$ и $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{c}}$ являются директрисами гиперболы, а ее эксцентриситет равен $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$, обычно обозначают $\mathrm{e} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$. Тогда директрисы гиперболы $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}}$ и $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}}$

Заметим, что $\mathrm{c} > \mathrm{a}$, поэтому $e = \frac{c}{a} > 1.$

Гипербола также обладает ***оптическим свойством***: *если луч света выходит из одного фокуса гиперболы, то продолжение его отражения от гиперболы за гиперболу проходит через ее другой его фокус.*

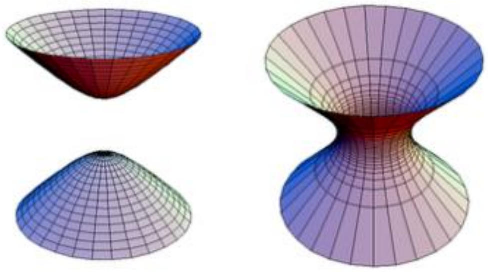


(источник: https://studopedia.su/6_33003_opticheskoe-svoystvo-giperboli.html)

Это свойство обусловлено тем, что *касательная к гиперболе в точке M образует равные углы с прямым, проходящими через данную точку M и фокусы гиперболы.*

Последнее утверждение является теоремой. Доказательство теоремы мы привели в Приложении 1 (*задача 5*).

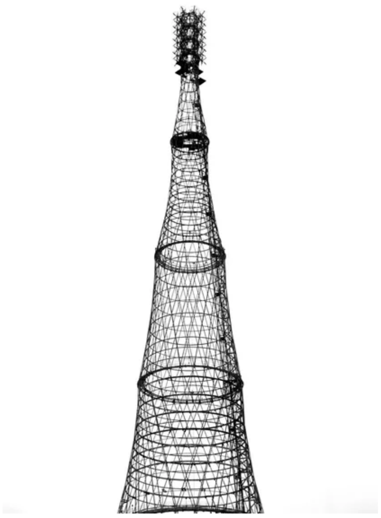
Если вращать гиперболу вокруг оси ординат, то получим фигуру, которую математики называют ***двуполостным гиперболоидом***. А если вращать гиперболу вокруг оси абсцисс, то получим ***однополосный гиперболоид***.



(источник: https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/889598)

Двуполостный гиперболоид как раз и обладает свойством отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус. Это свойство используется в телескопах системы Кассегрена.

Свойства гиперболоида нашли широкое применение в ***архитектуре***. Оказалось, что гиперболоидные конструкции обладают высокой прочностью.



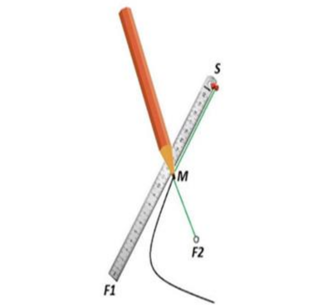
Гиперболоидную форму конструкций ввёл в архитектуру российский архитектор В. Г. Шухов (патент Российской Империи № 1896; от 12 марта 1899 года, заявленный В. Г. Шуховым 11.01.1896). Первая в мире стальная сетчатая башня в форме гиперболоида вращения была построена Шуховым для крупнейшей дореволюционной Всероссийской промышленной и художественной выставки в Нижнем Новгороде, в 1896 году.

(*источник:* https://ru.depositphotos.com/stock-photos/%D1%88%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F-%D0%B1%D0%B0%D1%88%D0%BD%D1%8F.html)

Эксперимент 2. Построение гиперболы с помощью натянутой нити

Цель: выяснить, можно ли построить гиперболу с помощью натянутой нити.

Ход эксперимента: Выберем на плоскости две точки F_1 и F_2 – фокусы гиперболы. Возьмем линейку и закрепим ее одним концом в точке F_1. Закрепим нить в точках F_2 и S (где S - другой конец линейки). Острием карандаша прижмем ее, натягивая, к линейке. Начнем вращать линейку вокруг точки F_1.



(источник: https://studopedia.su/6_33003_opticheskoe-svoystvo-giperboli.html)

Результат: Острие карандаша рисует гиперболу.

Действительно, F1S и MF2 + MS (длина нити) - величины постоянные (нить короче линейки).

Тогда MF1 – MF2 = (MF1 + MS) – (MF2 + MS) = F1S – (MF2 + MS) = const.

Т.е. множество полученных таким образом точек есть гипербола.

Вывод: гипербола может быть построена с помощью натянутой нити.

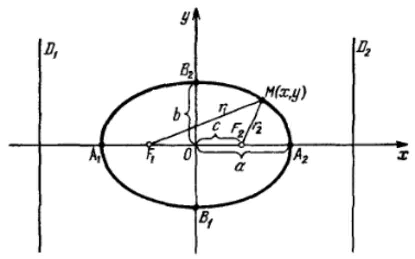
Безугольник, долгокруг, овал

Какие только названия не давали этой кривой: безугольник, долгокруг, овал. С точки зрения словарей все это синонимы слова «эллипс». Однако, математики с этим могут не согласится. Поскольку не всякий безугольник или овал является эллипсом.

Эллипс в школьном курсе математики не изучается ни как геометрическая фигура, ни как кривая какого-либо уравнения. Подробно изучается лишь частный случай эллипса – окружность.

Рассмотрим ***геометрическое определение*** эллипса:

Э***ллипсом*** *называется геометрическое место точек (ГМТ) таких, что сумма расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами) постоянно*.



Эти фиксированные точки называют ***фокусами эллипса***.

Если используя данное определение, найти уравнение эллипса, то получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (*****)$$

Вывод уравнения эллипса представлен нами в Приложении 1 (*задача 3*).

Уравнение (*****) называется ***каноническим уравнением эллипса***. Величины a и b называют соответственно ***большой и малой полуосями*** эллипса.

Покажем, что эллипс является квадрикой. Для этого преобразуем формулу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow b^2x^2 + \ a^2y^2 - \ a^2b^2 \ = 0 \ (******)$$

Теперь сравним формулу (******) с формулой (*).

Положим $a_{11} = b^2, \ a_{22} = a^2, a_{12} = 0, \ \ a_1 = 0, a_2 = 0, a_0 = - \ a^2b^2.$ Тогда

$$a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{12}{}^2 = \ b^2 + a^2 + 0^2 \neq 0$$

Т.е. уравнение эллипса (*****) является частным случаем уравнения (*). Это значит, что эллипс также является квадрикой.

Эллипс можно также определить как *геометрическое место плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная меньше единицы и называемая его эксцентриситетом*.

Рассмотрим прямую $x = \frac{a^2}{c}$. Найдем расстояние p от точки М($x;\ y$) эллипса до этой прямой: $p = \left|x - \frac{a^2}{c}\right|$.

Расстояние от точки М до фокуса равно $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Из уравнения эллипса можно выразить y^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2},\ b^2 = a^2 - c^2.$$

Тогда расстояние от точки М до фокуса равно

$$\sqrt{(x-c)^2 + \frac{(a^2-c^2)(a^2-x^2)}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(x-c)^2+(a^2-c^2)(a^2-x^2)}{a^2}}$$

Тогда отношение расстояния от точки М до фокуса к расстоянию от точки М до этой прямой равно

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2(x-c)^2+(a^2-c^2)(a^2-x^2)}{a^2}}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|} = \sqrt{\frac{a^2(x-c)^2+(c^2-a^2)(x^2-a^2)}{a^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2(x-c)^2+(c^2-a^2)(x^2-a^2)}{(cx-a^2)^2}} =$$

$$= \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+c^2x^2-a^2c^2-a^2x^2+a^4}{(cx-a^2)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{-2a^2xc+c^2x^2+a^4}{c^2x^2-2a^2xc+a^4}} = \frac{c}{a}$$

Т.е. прямая $x = \frac{a^2}{c}$ является директрисой эллипса, а ее эксцентриситет равен $\frac{c}{a}$, обычно обозначают $e = \frac{c}{a}$. Тогда директриса эллипса $x = \frac{a}{e}$.

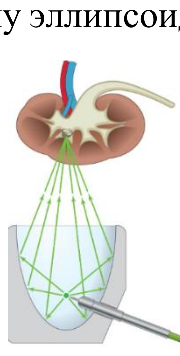
Аналогично доказывается, что прямая $x = -\frac{a}{e}$ является второй директрисой эллипса.

Заметим, что $c < a$, поэтому $e = \frac{c}{a} < 1$.

Эллипс также обладает ***оптическим свойством***: *лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса после отражения от эллипса возвращаются в другой его фокус (отраженным считается луч, отраженный от касательной к эллипсу по правилу "угол падения равен углу отражения").*

Доказательство этого свойства аналогично доказательству оптического свойства гиперболы.

Широкое применение свойства эллипса нашли ***в медицине***. При вращении эллипса вокруг прямой, проходящей через фокусы, получается эллипсоид вращения. В каждом сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через ось вращения, получаются равные эллипсы с общими фокусами, поэтому эллипсоид тоже обладает оптическим свойством.

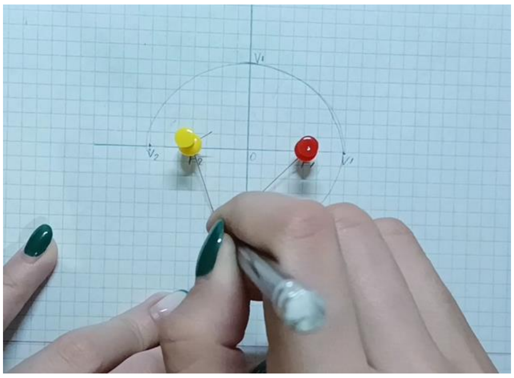


Литотрипсия (от древнегреческого λίθος — камень) — один из методов дистанционного разрушения камней с помощью ударных волн. Принцип работы многих аппаратов дистанционного воздействия основан на геометрических свойствах эллипса. Отражатель аппарата дистанционной литотрипсии — часть эллипсоида, «чаша», примыкающая к одному из фокусов, в котором размещается источник излучения. Пациента помещают так, чтобы совместить положение второго фокуса и положение камня — мишени волновой атаки. Конечно, излучение проходит и через ткани, окружающие камень, но только в фокусе одномоментно концентрируется вся энергия излучения, становясь и разрушающей, и целительной силой. [12]

Эксперимент № 3. Построение эллипса с помощью нити

Цель: выяснить, можно ли построить эллипс с помощью натянутой нити.

Ход эксперимента: Забьем в доску два гвоздика, затем тонкую веревку свяжем в кольцо и наденем веревочное кольцо на оба гвоздика. Натянув веревку карандашом, вычертим им фигуру.



Результат: При движении грифеля карандаша сумма расстояний от грифеля до двух точек остаётся равным длине нити. А значит, согласно геометрическому определению эллипса, грифель нарисует на листе бумаги эллипс с фокусами в местах, обозначенных гвоздиками

Вывод: эллипс может быть построен с помощью нити.

В процессе подготовки материала для исследования мы обнаружили любопытный факт: согласно ***I закону Кеплера*** каждая планета солнечной системы вращается вокруг Солнца по эллипсоидной орбите, в одном из фокусов которого находится Солнце. Иссак Ньютон установил, что поскольку формы орбит и скорости, с которыми движутся по ним небесные тела, определяются силой всемирного тяготения, то траектории движения небесных тел имеют форму эллипса, параболы или гиперболы.

Изученные в процессе исследования определения и свойства кривых позволяют решать целый класс интереснейших математических задач, которые мы представили в приложении 1 к работе.

Выводы

В процессе выполнения работы мы познакомились с новыми математическим понятиями «квадрика» и коника». Привычные для школьника парабола, гипербола и эллипс предстали в новом свете:

✓ Установлено, что каждая из трех линий может быть определена как геометрическое место точек, для каждой из которых отношения расстояния до данной точки, называемой фокусом, к расстоянию до данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус, равно одному и тому же положительному числу, называемому эксцентриситетом.

✓ Если эксцентриситет равен 1, то данная фигура является параболой; если эксцентриситет больше 1, то данная фигура является гиперболой; и если эксцентриситет меньше 1, то данная фигура является эллипсом.

Такое впечатление, что имеешь дело с бутоном прекрасного цветка: чуть раскрылся – эллипс, еще больше – парабола, раскрылся полностью – гипербола.

Это определение объясняет способы построения эллипса, параболы, гиперболы с помощью натянутой нити. Все способы изучены и экспериментально апробированы в ходе выполнения работы.

✓ В работе доказано, что касательные, проведенные к этим кривым, образуют равные углы с прямой, проходящей через точку касания и фокус кривой.

✓ Это геометрическое свойство определяет оптические свойства кривых:

- лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса после отражения от эллипса возвращаются в другой его фокус;
- если луч света выходит из одного фокуса гиперболы, то продолжение его отражения от гиперболы за гиперболу проходит через ее другой его фокус;
- лучи света, исходящие из фокуса произвольной параболы после отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси этой параболы.

Геометрическое свойство квадрики позволяет лучше понять и объяснять наблюдаемые физические явления.

✓ Оптические свойства кривых нашли широкое применение в технике. В работе представлены примеры технических устройств, работа которых основана на оптических свойствах рассмотренных коник.

✓ Широкое применение свойства рассмотренных квадрик нашли в астрономии, поскольку траектории движения небесных тел имеют форму эллипса, параболы или гиперболы.

✓ Подобраны, составлены и решены математические задачи, описывающих свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Представленный в работе материал может быть использован для изучения на уроках математики и физики, а также в рамка работы математических кружков.

Кроме того, в процессе исследования мы познакомились с фантастическим романом Алексея Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».

Таким образом, в результате работы полностью доказана гипотеза о том, что парабола и гипербола – это геометрические фигуры, обладающими определенными свойствами, изучение которых на уроках математики способствует более глубокому пониманию не только алгебры, геометрии, но и физики.

Все задачи выполнены. Цель работы достигнута: изучены свойства параболы, гиперболы и эллипса рассмотрено их практическое применение.

Работа над темой помогла увидеть тесную связь между алгеброй, геометрией и физикой, укрепила в мысли о том, что «математика - царица наук».

Литература

1. В.Ф. Очков, А. Диаз Фалькони. Информатика, алгебра, геометрия: четыре арифметические кривые с покемоном. ISSN 2221-1993. Информатика в школе. 2016 № 9 (122)
2. Геометрия. Доп. главы к учебнику 9 кл.: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. Математики / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадмцев и др. – 5-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2005.
3. Толковый словарь Ушакова. Интернет-ресурс: https://ushakovdictionary.ru/
4. Толковый словарь живого великорусского языка В.И. Даля. Интернет-ресурс: https://gufo.me/dict/dal
5. ВикипедиЯ. Свободная энциклопедия. Интернет-ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B3%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0
6. Энциклопедия Кругосвет. Универсальная научно-популярная энциклопедия.
Интернет-ресурс: https://www.krugosvet.ru/enc/matematika/konicheskie-secheniya
7. Б.М. Верников. Классификация квадрик на плоскости. Уральский федеральный университет, Институт математики и компьютерных наук, кафедры алгебры и дискретной математики. Интернет-ресурс: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://kadm.kmath.ru/files/angeom13.pdf
8. Параболическая антенна // Математическая составляющая / Ред.-сост. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин. — Второе издание, расширенное и дополненное. — М. : Математические этюды, 2019.
9. Толстой А.Н. Гиперболоид инженера Гарина; Аэлита: Роман и повесть / Худож. Н.Кривов. — М.: ЭКСМО-Пресс, 2000. — 447 с.: ил. — (Б-ка приключений).
10. СтудопедиЯ. Интернет-ресурс: https://studopedia.su/13_15212_krivie-vtorogo-poryadka.html
11. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. –М.: МЦНМО, 2007. – 136с.
12. Математическая составляющая. Интернет-ресурс: https://book.etudes.ru/articles/ellipse/

Приложение 1

Задачи по теме «Парабола, гипербола, конус»

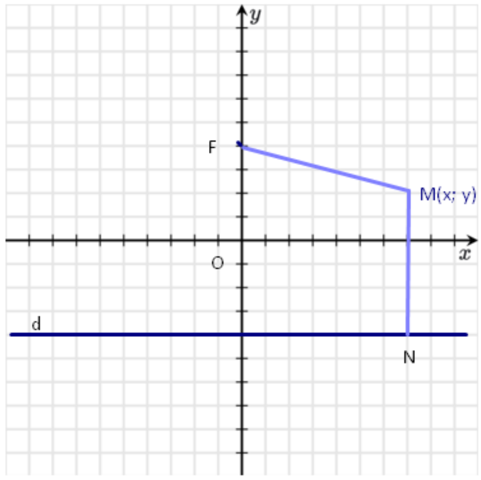
Задача 1.

Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от которых до данной точки F (которая называется фокусом параболы) и данной прямой d (называемой директрисой) равны. Согласно другому определению, парабола — это кривая, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением $y = kx^2$. Докажите эквивалентность этих определений.

Доказательство

6) *Пусть d – данная прямая, F - данная точка, p – расстояние между ними. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось ординат проходила бы через точку F перпендикулярно прямой d, а начало координат выберем в точке, которая является серединой перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d.*

   Тогда точка F будет иметь координаты $\left(0; \frac{p}{2}\right)$, а прямую d можно задать уравнением $y = -\frac{p}{2}$.



7) *Отметим на плоскости произвольную точку M (x; y), расстояния от которой до прямой d и до точки F равны.*
8) *Пусть $MN \perp d, N \in d$. Тогда расстояние от точки M до прямой N – это длина отрезка MN. Т.к. точка N лежит на прямой d, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т.е. вторая координата точки N равна $-\frac{p}{2}$.*

   Т.к. $MN \perp d$, M $(x;\ y)$ и $d \parallel Ox$, то первая координата точки N равна x. Таким образом, N $\left(x;\ -\frac{p}{2}\right)$. Длина отрезка MN будет равна

$$\sqrt{(x-x)^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right| \quad \textbf{(1)}$$

9) *С другой стороны, расстояние между точками M(x;y) и F$\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ равно*

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \quad \textbf{(2)}$$

10) *Т.к. по условию задачи MF = MN, то* $\sqrt{x^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$ ***(3).***

Т.к. обе части уравнения (3) неотрицательны, возведем их в квадрат, получим равносильное уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2y \cdot \frac{p}{2} + y^2 = y^2 + 2y \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2 = 2py,$$

т.е.

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \quad \textbf{(4)}$$

Если положить в уравнении (4) $\frac{1}{2p} = k$, *то получим* $y = kx^2$.

Эквивалентность определений доказана.

<u>Задача 2.</u>

Гипербола — геометрическое место точек M, для которых величина $|F_1M - F_2M|$ постоянна (точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы). Согласно другому определению, гипербола — это кривая, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Докажите эквивалентность этих определений.

Доказательство

Обозначим расстояние между данными точками F_1 и F_2 как 2c, а постоянную величину, равную модулю разности расстояний от произвольной точки гиперболы до точек F_1 и F_2, через 2a. Тогда по условию $2a < 2c$, *т.е.* $a < c$.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат совпадало бы с серединой отрезка F_1F_2. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты: $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Пусть M(x; y) – произвольная точка плоскости, для которой абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 равно 2a. найдем расстояния между точкам M и F_1, M и F_2:

$MF_1 = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Заметим, что $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Следовательно, $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$ *(1)*

Преобразуем уравнение, возведя обе его части в квадрат (1):

$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2$

Еще раз возведем в квадрат:

$((x+c)^2 + y^2) \cdot ((x-c)^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2,$

Откуда

$(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x^2 + c^2 + y^2) + 2xc)((x^2 + c^2 + y^2) - 2xc) = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2c^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2c^2 + a^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Заметим, что $a < c$. *Тогда* $c^2 - a^2 > 0$. *Обозначим* $c^2 - a^2 = b^2$. *Тогда последнее уравнение перепишем:* $x^2 \cdot b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

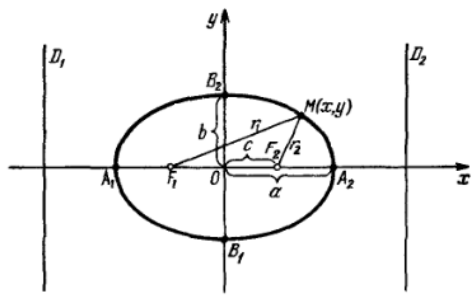
Разделим уравнение на a^2b^2 $(a \neq 0, b \neq 0)$*:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эквивалентность определений доказана.

Задача 3.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F1, F2 (которые называются фокусами эллипса) постоянна. Согласно другому определению, эллипс — это кривая, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Докажите эквивалентность этих определений.



Доказательство

Пусть даны точки F_1 и F_2. Обозначим расстояние между данными точками F_1 и F_2 как 2c, а постоянную величину, равную сумме разности расстояний от произвольной точки эллипса до точек F_1 и F_2, через 2a.

Тогда по условию $2a > 2c$, *т.е.* $a > c$.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат совпадало бы с серединой отрезка F_1F_2. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты: F_1(-c; 0) и F_2(c; 0).

Пусть M(x; y) – произвольная точка плоскости, для которой сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 равно 2a. Найдем расстояния между точкам M и F_1, M и F_2:

$\mathrm{M}F_1 = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$,

$\mathrm{M}F_2 = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Заметим, что $MF_1 + MF_2 = 2a$

Следовательно, $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ *(1)*

Преобразуем уравнение, возведя обе его части в квадрат (1):

$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2c^2+2y^2 + 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a^2-(x^2+c^2+y^2)$$

Еще раз возведем в квадрат:

$$((x+c)^2+y^2)\cdot((x-c)^2+y^2) = (2a^2-(x^2+c^2+y^2))^2,$$

Откуда

$$(x^2+2xc+c^2+y^2)(x^2-2xc+c^2+y^2) = (x^2+y^2+c^2-2a^2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x^2+c^2+y^2)+2xc)((x^2+c^2+y^2)-2xc) = ((x^2+y^2+c^2)-2a^2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2 = (x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2c^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2-a^2c^2+a^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Заметим, что $a > c$. *Тогда* $a^2-c^2 > 0$. *Обозначим* $a^2-c^2 = b^2$. *Тогда последнее уравнение перепишем:* $-x^2\cdot b^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$.

Разделим уравнение на $(-a^2b^2)$ $(a \neq 0, b \neq 0)$*:*

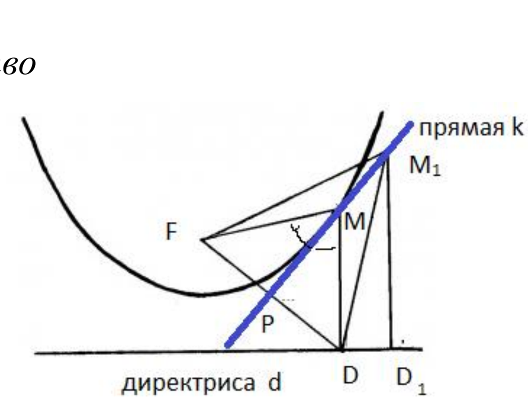
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эквивалентность определений доказана.

Задача 4.

Докажите, что касательная к параболе, проведённая в точке M, образует равные углы с прямой MF и осью параболы.

Доказательство



6) *Пусть d – директриса параболы, F- ее фокус, M – произвольная точка параболы,* $MD \perp d$, $D \in d$. *Тогда по определению параболы FM = MD. Тогда треугольник FMD - равнобедренный.*
7) *Проведем MP – высоту, биссектрису и медиану равнобедренного треугольника MD. Прямая MP является серединным перпендикуляром к отрезку FD.*
8) *Докажем, что MP – касательная к параболе, т.е. точка M – единственная общая точка параболы и прямой MP. Применим метод от противного.*

Предположим, что на прямой MP есть еще одна точка M_1, принадлежащая также и параболе, отличная от точки M.
По свойству параболы $FM_1 = M_1D$.

9) *Проведем перпендикуляр $M_1D_1 \perp d$ (d – директриса). По свойству серединного перпендикуляра $FM_1=M_1D$. Но т.к. $M_1D_1 \perp d$, то наклонная M_1D больше перпендикуляра M_1D_1. Значит, $FM_1 > M_1D$, что противоречит свойству параболы (см. п. 3 доказательства). Полученное противоречие доказывает, что точка M – единственная общая точка параболы и прямой MP, т.е. MP – касательная к параболе.*
10) *Касательная к параболе MP – биссектриса ∠FMD, т.е. ∠FMP = ∠MPD; ∠MPD = ∠BMC (как вертикальные). Получим, что ∠FMP = ∠BMC.*

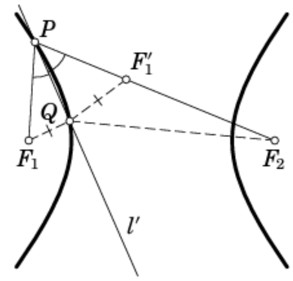
Т.е. касательная к параболе составляет равные углы с прямой FM и лучом MB, выходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы. Что и требовалось доказать.

Задача 5.

Докажите, что касательная к гиперболе образует равные углы с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами, и является биссектрисой угла F_1PF_2.

Доказательство

Рассмотрим гиперболу. Выберем на ней произвольную точку P и соединим ее с фокусами параболы F_1 и F_2. Построим биссектрису угла F_1PF_2. Покажем, что эта биссектриса является касательной к гиперболе, т.е. что данная прямая и гипербола не имеют других общих точек.

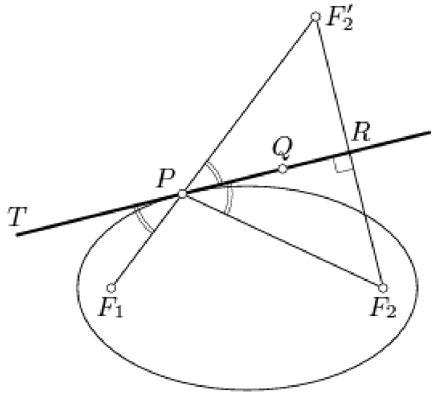


1) *Предположим, что существует еще одна общая точка Q биссектрисы угла F_1PF_2 и гиперболы, отличная от P. Для удобства будем считать, что точка Q лежит ближе к фокусу F_1. Обозначим через F'_1 точку, симметричную точке F_1 относительно построенной биссектрисы. Тогда $QF'_1 = F_1Q$, $PF'_1 = F_1P$, а также точки F'_1, F_2 и P лежат на одной прямой.*
2) *Рассмотрим треугольник F'_1, F_2Q. Заметим, что согласно неравенству треугольника $F'_1F_2 > |F_2Q - QF'_1|$.*
3) *С другой стороны, $F'_1F_2 = F_2P - PF'_1 = F_2Q - QF'_1$. Получили противоречие, которое доказывает, что наше предположение неверно, и другой общей точки биссектриса угла F_1PF_2и гипербола не имеют, т.е. биссектриса угла F_1PF_2 является касательной к гиперболе. Что и требовалось доказать.*

Задача 6.

Докажите, что касательная к эллипсу в точке P образует равные углы с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами, и является биссектрисой угла, смежного с углом F_1PF_2 (где F_1, F_2 — фокусы эллипса).

Доказательство



1) *Пусть прямая TP касается эллипса в точке P. Отразим фокус F_2 относительно касательной TP. Получим точку F_2', которую соединим с точкой P. Тогда $F_2P=F_2'P$. Поэтому ломаная F_1PF_2' имеет длину $F_1P+F_2P=2a$.*

2) *Для произвольной точки Q прямой TP сумма расстояний QF_1+QF_2 больше 2a, т.к. эта точка лежит вне ограниченной эллипсом области.*

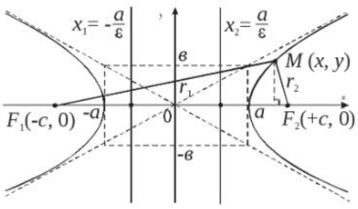
3) *Получим: ломаная F_1PF_2' короче ломаной F_1QF2', т.е. F_1PF_2' – это кратчайшее расстояние от F_1 до F_2. Значит, точки F_1, P и F_2' лежат на одной прямой, а углы TPF_1 и QPF_2' являются вертикальными, поэтому равны.*

4) *Углы QPF_2 и QPF_2' равны как симметричные, углы TPF_1 и QPF_2' равны как вертикальные, откуда следует равенство углов TPF_1 и QPF_2, а значит, касательная TP* образует *равные углы с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами. Что и требовалось доказать.*

Задача 7.

Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.

Доказательство



Рассмотрим прямую $x = \frac{a^2}{c}$. *Найдем расстояние p от точки M(x; y) до этой прямой:*

$$p = \left| x - \frac{a^2}{c} \right|.$$

Расстояние от точки M до фокуса равно $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. *Из уравнения гиперболы можно выразить* y^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2},\ b^2 = c^2 - a^2.$$

Тогда расстояние от точки M до фокуса равно:

$$\sqrt{(x-c)^2 + \frac{(c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(x-c)^2 + (c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}}$$

Получим, что отношение расстояния от точки M до фокуса к расстоянию от точки M до этой прямой равно

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2(x-c)^2 + (c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}}}{\left| x - \frac{a^2}{c} \right|} = \sqrt{\frac{a^2(x-c)^2 + (c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2(x-c)^2 + (c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{(cx - a^2)^2}} =$$

$$= \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2 + a^4}{(cx - a^2)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{-2a^2xc + c^2x^2 + a^4}{c^2x^2 - 2a^2xc + a^4}} = \frac{c}{a}$$

Т.е. прямая $x = \frac{a^2}{c}$ *является директрисой гиперболы, а ее эксцентриситет равен* $\frac{c}{a}$, *обычно обозначают* $e = \frac{c}{a}$. *Тогда директриса гиперболы* $x = \frac{a}{e}$.

Аналогично доказывается, что прямая $x = -\frac{a}{e}$ *является второй директрисой гиперболы.*

<u>Задача 8.</u>

Исследуйте какие линии определяются уравнениями:

а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$;

в) $x^2 + y + 2x + 10 = 0$

Решение

а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0 \Leftrightarrow 16(x^2 + 2x + 1 - 1) +$
$+25(y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4) - 284 = 0 \Leftrightarrow 16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 =$
$= 16 + 100 + 284 \Leftrightarrow 16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке (-1; 2) и полуосями a*=5,* b*=4. Вычислим* $c^2 = a^2 - b^2 = 9$*. Вычислим эксцентриситет:* $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

<u>Ответ:</u> данным уравнением определяется эллипс.

б) $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}$

Данное уравнение задает точку (0; 1).

Ответ: данным уравнением определяется точка (0; 1).

в) $x^2 + y + 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y = -9 \Leftrightarrow y = -(x+1)^2 - 9$

Данное уравнение задает параболу с вершиной в точке (-1; -9), ветви которой направлены вниз.

Ответ: данным уравнением определяется парабола с вершиной в точке (-1; -9), ветви которой направлены вниз.

<u>Задача 9.</u>

Даны координаты вершин треугольника ABC: (0; 0), (2; 2), (-2; 2). Точка M движется так, что сумма квадратов ее расстояний от трех сторон треугольника остается все время постоянной, равной 16. Найдите траекторию точки M.

Решение

Пусть точка M имеет координаты (x; y). Найдем расстояния AM, BM и CM:

$AM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$BM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$CM = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$

По условию:

$x^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+2)^2 + (y-2)^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 4y + 4x - 4y + 4 + 4 + 4 + 4 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 8y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Точка M движется по окружности с центром в точке $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ *и радиусом* $\frac{4}{3}$.

<u>Ответ:</u> точка M движется по окружности с центром в точке $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ *и радиусом* $\frac{4}{3}$.