МОУ «ТИРАСПОЛЬСКИЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»

Исследовательская работа

Секция: Геометрия

Тема: «Как просверлить квадратное отверстие»

Автор работы: Кирсанов Кирилл Олегович,
учащийся 10 класса физико-математического отделения ТОТЛ

Руководитель: Легась Е.В.,
учитель математики высшей квалификационной категории

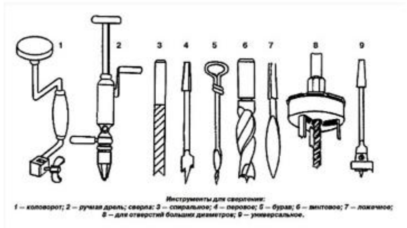
г. Тирасполь
2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Что вы представляете, услышав словосочетание «просверлить отверстие»? Скорее всего ваше воображение подскажет вам круглое отверстие. Для выполнения этой работы достаточно иметь соответствующий инструмент – дрель и сверло.

Сверла бывают разные. Однако конструкция практически любого сверла предполагает, что его режущая часть имеет траекторию движения либо в форме окружности, либо в форме винтовой поверхности, касательная к которой и будет плоскостью резания. Применение такого сверла позволяет получить отверстие круглой формы.



(источник: https://pellete.ru/trub/prisposoblenie-dlya-sverleniya-trub.html)

А какую форму еще могут иметь отверстия? Например, могут ли они иметь квадратную, треугольную форму? В поисках ответа на этот вопрос, я обратился к геометрии.

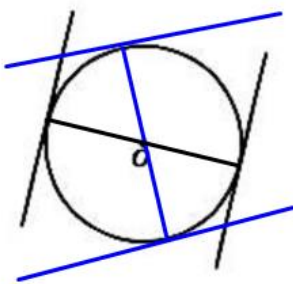
Скорее всего, отверстия имеют круглую форму, потому что именно такая форма наиболее практична. В качестве иллюстрации можно привести пример канализационного колодца и люка круглой формы, его покрывающего. Круглая форма колодца позволяет создать такое отверстие, в которое легко может пролезть человек. Если бы колодец имел в сечении квадратную форму, например, то его пришлось бы делать немного большим по площади. Это становится понятным, если сравнить площадь круга диаметра d и площадь квадрата со стороной d:

$$S_{\text{круг}} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4};\ S_{\text{квадрат}} = d^2, \text{ откуда } \frac{S_{\text{круг}}}{S_{\text{квадрат}}} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{d^2} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Получим, что площадь рассматриваемого круга меньше площади квадрата.

Кроме того, канализационные люки круглой формы никогда не провалятся в колодец, значит, лучше всего выполнят свою защитную функцию. Квадратная крышка люка может упасть в колодец, если ее засунуть ребром по диагонали отверстия.

Это соображение привело меня к заключению: круг, в отличии от квадрата, имеет «постоянную ширину»: при «обхвате» круга двумя параллельными прямыми ширина полосы между ними будет постоянной, независимо от направления прямых. Выяснилось, что в геометрии существует специальный термин для обозначения этого свойства круга: «***фигура постоянной ширины***».



Итак, круг является фигурой постоянной ширины. Но существуют ли другие фигуры, обладающие этим же свойством?

Гипотеза: существуют фигуры постоянной ширины, кроме окружности, свойства которых находят множество применений в технике.

Данная работа имеет ***целью*** выяснить, какие еще фигуры постоянной ширины существуют, и в каких технических устройствах применяются их свойства.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить свойства фигур постоянной ширины;
- рассмотреть практическое применение свойств геометрических фигур в технике;
- изучить биографии ученых, чьи имена получили фигуры постоянной ширины.

Эти задачи и определили ***методы***, которые были использованы в ходе выполнения работы:

- *моделирование*: построение моделей фигур постоянной ширины;

- *абстрагирование*: отвлечение от несущественных свойств фигур и фиксация внимания на существенных;

- *анализ*: выделение отдельных частей фигур постоянной ширины с целью изучения их свойств;

- *синтез*: соединение полученных при анализе свойств;

- *наблюдение*: изучение, осознание различных свойств и признаков рассматриваемой фигуры и их фиксация;

- *сравнение*: выявление сходства и различия сравниваемых фигур;

- *эксперимент*: воспроизведение свойств фигур постоянной ширины в практических целях.

Информация по данной теме, к сожалению, не содержится в школьных учебниках. Большую помощь в работе оказали материалы книги под редакцией Н.Н Андреева и Н.М. Панюнина «Математическая составляющая» [2].

Отличительной чертой этой работы является то, что в ней содержится не просто описание фигур постоянной ширины и их свойств, но и приведены геометрические доказательства собранных фактов, выполненные мною самостоятельно. В работе рассмотрены числовые характеристики фигур постоянной ширины. Все задачи рассматривались в общем виде, затем полученный результат интерпретировался для частных случаев. В процессе исследования удалось связать между собой ширину многоугольника Рёло, его периметр, площадь, а также длину стороны многоугольника, с помощью которого можно построить многоугольник Рёло, и радиус описанной около этого многоугольника окружности.

1. Треугольник Рёло

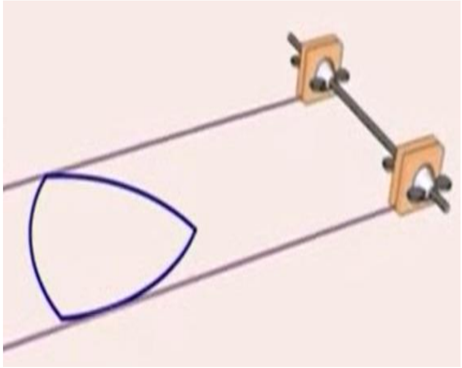
Самой известной фигурой постоянной ширины является треугольник Рёло. Можно предложить несколько способов построения этой фигуры.

Первый способ.

С помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой окружности выбирается произвольно, далее чертим окружность с центром в любой точке первой окружности, а центром третьей окружности является любая из двух точек пересечения первых двух. Образовавшаяся негладкая замкнутая кривая и есть треугольник Рёло.

Второй способ.

Треугольника Рёло можно построить при помощи равностороннего треугольника. На каждой стороне треугольника при помощи циркуля нужно провести дугу окружности, радиусом равным длине стороны. Замкнутые дуги окружностей образуют фигуру треугольник Рёло.



Нетрудно на практике убедиться, что треугольник Рёло является фигурой постоянной ширины. «Проверить» это можно, например, с помощью штангенциркуля: при обхвате фигуры параллельными прямыми точками касания прямых для треугольника Рёло будут одна из его вершин и какая-то точка на противолежащей этой вершине дуге окружности. Так как радиусы всех дуг равны, то результат «измерения» всегда будет одинаков [2].

В научно-фантастическом рассказе Пола Андерсона «Треугольное колесо» экипаж землян совершил аварийную посадку на планете, население которой не использовало колёса, так как всё круглое находилось под религиозным запретом. В сотнях километров от места посадки предыдущая земная экспедиция оставила склад с запасными частями, но перенести оттуда необходимый для корабля двухтонный атомный генератор без каких-либо механизмов было невозможно [4].

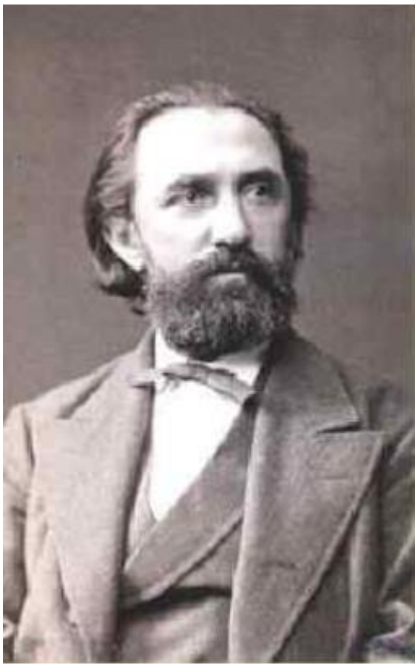
Герои рассказа вынуждены были искать и нашли способ передвигать тяжести без помощи колеса. «Под платформой находилось восемь роликов. Они катились между направляющими боковыми досками, передняя пара которых могла двигаться между квадратными штырями — это давало возможность платформе поворачивать. <…> Каждый каток был треугольным в сечении. Если начертить равносторонний треугольник ABC, провести дуги BC с центром в точке A, AC в точке B, AB в точке C и потом скруглить углы, получится фигура равной ширины. Если ее вращать между двумя касательными к ней прямыми, они останутся касательными к ней в любой точке при любом повороте» [3]. Для экспериментальной проверки возможности передвижения с помощью «треугольного колеса» мною была изготовлена модель такой платформы:


Полученная платформа позволяет передвигаться без каких-либо проблем: точно так же, как если бы она катилась на круглых колесах.

Идея «треугольных колес» не нова. То и дело в интернете появляются сообщения об «изобретении» таких колес. Например, в 2018 году появилось сообщение о том, что военную технику США хотят поставить на треугольные колеса. Пентагон представил треугольное колесо-трансформер, способное в зависимости от покрытия изменять форму: оно может приобретать форму как колеса, так и гусеничной ленты. Разработчики считают, что это повысит мобильность военной техники в труднодоступной местности.

Проведенный нами эксперимент показал, что треугольник Рёло является фигурой постоянной ширины: при «обхвате» треугольника Рёло двумя параллельными прямыми ширина полосы между ними будет постоянной, независимо от направления прямых.

2. Франц Рёло



Своим названием фигура обязана немецкому инженеру, ученому, президенту Берлинской технической академии Францу Рёло. Рёло не был ученым-математиком. Его интересовал инженерный вопрос: сколько контактов необходимо, чтобы предотвратить движение плоской фигуры. На примере искривлённого треугольника Рело показал, что даже трёх контактов может быть недостаточно для того, чтобы фигура не вращалась.

Наиболее подробно биография Франца Рёло на русском языке отражена в книге Алексея Николаевича Боголюбова и Веры Николаевны Чиненовой «Франц Рело» [1].

Род Рёло происходил из Эно, франко-бельгийской местности, расположенной между верхним течением Шельды и Самброй. Население этой местности кроме сельского хозяйства издавна занималось ремеслом, добычей и переработкой железа. Родовая фамилия семьи - Ролев, Релеев, Релейв, что на местном диалекте означает «водяное колесо». Скорее всего основной профессией этой семьи было сооружение водяных колес и мельниц.

В конце XVII века, после захвата этих земель королем Людовиком XIV, семья была вынуждена бежать на восток, в область Льежа. Здесь фамилия семьи приняла форму «Рёло», что означает «подъем воды». В начале XVIII века семья Рёло из Лежа переехала в Эйшвейлер по приглашению местного горного управления, которое собирало специалистов для того, чтобы привести в порядок угольные шахты и откачать воду из 17 затопленных шахт. Анри Рёло, его сын и племянники выполнили требуемую работу, построили водяные колеса и привели в порядок водное хозяйство шахт. Таким образом, *техника для семьи Рёло была традиционным занятием*.

Франц Рёло родился 30 сентября 1829 г. в Эшвейлере. Отец его, Иоганн Жозеф Рёло, умер в 1833 г., когда сыну было всего 4 года. Мать Франца вскоре вышла замуж за инженера К.Штолля, и семья переехала в Кобленц. Начальное образование Франц получил в школе, затем поступил в Евангелическое высшее училище. Полный курс Франц Рёло не прошел, оставил ее и под руководством отчима начал изучать машиностроение.

В конце 1844 г. Франц поступил в качестве ученика в сталелитейную и механическую мастерскую братьев Цилькен, а в 1846 г. – на завод в Эшвейлере, в конструкторское бюро, затем через два года перешел в качестве техника в сборочный цех. Основным производством завода были паровые машины. Можно сказать, что *Франц Рёло пришел к своим глубоким познаниям в машиностроении, пройдя едва ли не все рабочие места на заводе*.

Работая, Франц Рёло усиленно занимался самообразованием, в частности изучал труды Редтенбахера. С 1850 по 1852 г. он слушал лекции в Политехническом институте в Карлсруэ, всецело находившемся в те годы под влиянием Редтенбахера.

Редтенбахер был в то время важнейшим воспитателем немецких инженеров: его книги и учебники получили широкое распространение, и многие приезжали специально для того, чтобы послушать его лекции. Лекции Редтенбахера отличались тем, что он давал теоретические сведения в такой форме, которая была пригодна для практического применения, пытался представить все машиностроение в виде точных, но легко запоминаемых правил. Он был не только всесторонне образованным человеком (прекрасно знал литературу, историю философии, историю искусства, любил музыку), но и первым ученым, задумавшимся над проблемой технического мышления. Редтенбахер настоятельно *требовал от студентов изучения математики*. Однако Рёло, кроме технических предметов, следуя указаниям своего учителя, изучал еще историю и английский язык. По окончании института Рёло некоторое время изучал естественные науки и философию в Берлинском и Боннском университетах.

Еще в студенческие годы Рёло начал работать над исследованиями в области машиностроения. В 1854 г. он в соавторстве с Моллем издал первый том «Конструирования в машиностроении». В 1856 г. Рёло был приглашен на должность профессора механико-технического отделения Цюрихского политехникума, где ему пришлось работать вместе с Цейнером и Кульманом. В 1864 г. он перешел в Берлинский ремесленный институт на кафедру машиностроения. В 1866 г. этот институт (основанный в 1821 г.) был преобразован в Ремесленную академию, директором которой Рёло пробыл с 1867 по 1879 г. В 1879 г. на базе Ремесленной и Строительной академий было основано Берлинское высшее техническое училище.

В Германии в первой половине века кинематикой не занимались. Впервые этот предмет Рёло начал читать в 1871 г. в Швейцарии в Цюрихском политехникуме. Затем продолжил его в Берлинском ремесленном институте, а позже — в Ремесленной академии. Одновременно он начал издавать

«Кинематические сообщения» и другие мемуары по прикладной теории машин. Несколько позже начал чтение курса кинематической геометрии Аронгольд, затем Шелль издал трактат по теоретической механике «Теорию движения и сил», в котором значительное внимание уделил кинематике. В 1875 г. Рёло опубликовал первый том «Теоретической кинематики».

Рёло был не только ученым, но и практиком: он был членом жюри на международных выставках в Париже (1867), Вене (1873), Филадельфии (1876), в Сиднее-Мельбурне (1879—1881). Анализируя состояние германской промышленности, он требовал повышения качества ее изделий. Немецкие экспонаты на Филадельфийской выставке он охарактеризовал убийственным «billing und schlecht» (дешево и плохо). Критически относился он и к милитаристским тенденциям в развитии германской промышленности. В первом «Письме из Филадельфии» Рёло, например, писал: *«Посмотрим в машинном зале: кажется, что семь восьмых пространства отведено под огромные пушки Круппа, «машины для убийства», как их назвали, которые стоят как угроза всем мирным изделиям, выставленным другими нациями! Неужели в этом заключается выражение немецкой мысли?»*

Рёло много работал и в области истории техники. В «Теоретической кинематике» истории машин посвящена отдельная глава (изданная также и отдельным оттиском). Введение, примечания к отдельным параграфам трактата также насыщены историческими сведениями. Можно сказать, что Рело подходил исторически к исследованию всех вопросов кинематики.

Как и его учитель Редтенбахер, Рёло любил искусство. Он перевел на немецкий язык «Песнь о Гайавате» Лонгфелло, много рисовал и гравировал по дереву, писал о «художественном стиле в машиностроении». Его «Путешествие по Индии» — блестящий образец художественной прозы.

Рёло был прекрасным лектором, умевшим заинтересовать и увлечь слушателей: «Лекции Рело можно назвать блестящими по обработанности и изяществу изложения; лекции по кинематике интересны по оригинальности изложения», — так отзывался о них Ф. Е. Орлов. В Берлинском высшем техническом училище Рёло создал кабинет кинематических моделей (свыше 800 моделей), долго служивший образцом для высших технических школ Германии и других стран. Рёло пользовался большим авторитетом среди ученых в области прикладной механики. Но у него было и много противников, борьба с которыми зачастую принимала с обеих сторон резкие формы и особенно обострилась на рубеже столетий. Умер Рёло 20 августа 1905 г.

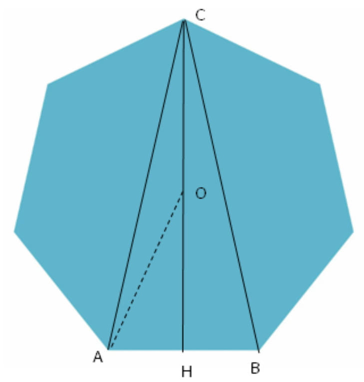
3. Многоугольники Рёло

Рассмотрим правильный пятиугольник, большая из диагоналей которого равна d. Из каждой вершины пятиугольника радиусом d проведем дугу окружности, соединяющую две противоположные вершины:

Полученная выпуклая кривая будет кривой постоянной ширины, т.к. из каждых двух параллельных прямых одна проходит через вершину пятиугольника, а другая касается противоположной дуги; поэтому расстояние между ними равно d.

Такое же построение можно проделать для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон

Числовые характеристики многоугольника Рёло



Найдем различные числовые характеристики многоугольника Рёло. Для этого рассмотрим произвольный правильный многоугольник с нечетным число сторон. Через одну из вершин многоугольника проведем ось симметрии, в нашем случае через вершину С проведена прямая СН - ось симметрии многоугольника, где Н – точка на противоположно стороне. Соединим эту вершину с вершинами на противоположной стороне, получим равнобедренный треугольник, в нашем случае треугольник АВС. Заметим, что поскольку СН является осью симметрии, то центр правильного многоугольника (точка О) лежит на отрезке СН, и длины отрезков АО и СО равна радиусу описанной около многоугольника окружности.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну. Тогда точка О – центр этого многоугольника, а угол АОВ является центральным углом. Величина угла АОВ равна $\frac{360°}{n}$. Тогда величина вписанного угла АСВ равна $\frac{180°}{n}$, величина угла АОН также равна $\frac{180°}{n}$.

Пусть длина стороны правильного многоугольника равна a, а радиус описанной около многоугольника окружности равен R. Тогда $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$, откуда $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$.

Обозначим: d – ширину многоугольника Рёло, $P_{\text{Рёло}}$- периметр многоугольника Рёло, $S_{\text{Рёло}}$ – его площадь. Выразим эти величины через сторону a правильного многоугольника, с помощью которого образуется многоугольник Рёло, и через R – радиус описанной около этого многоугольника окружности.

Ширина многоугольника Рёло

Заметим, что ширина многоугольника Рёло равна отрезку АС.

Рассмотрим треугольник АОС и по теореме косинусов найдем длину стороны АС:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\cdot OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC = R^2 + R^2 - 2\cdot R^2\cos\left(180° - \frac{180°}{n}\right) =$$

$$= 2R^2 + 2R^2\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = 2R^2\left(1 + \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right).$$

Таким образом, $\boldsymbol{d^2 = 2R^2\left(1 + cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}$ **(1).**

Что будет, если число дуг, из которых состоит многоугольник, увеличивать? Тогда увеличивается и число сторон правильного многоугольника, с помощью которого он образован (т.к. эти величины равны). Тогда угол АСВ становится очень маленьким, а его косинус все ближе 1. Если $n \longrightarrow \infty$, то $\frac{180°}{n} \longrightarrow 0°$, т.е. $d \longrightarrow 2R$.

Т.к. $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$, то

$$d^2 = 2\left(\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}\right)^2\left(1 + \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) = \frac{a^2\left(1+\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{2\sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{a^2}{2\left(1-\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}$$

Итак, $\boldsymbol{d^2 = \frac{a^2}{2\left(1-\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}}$ (2)

В частности, ширина треугольника Рело равна:

$$d = \sqrt{\frac{a^2}{2\left(1-\cos\left(\frac{180°}{3}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{a^2}{2(1-\cos(60°))}} = \sqrt{\frac{a^2}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}} = a$$

Периметр многоугольника Рёло. Теорема Барбье

Найдем периметр многоугольника Рёло. Фигура состоит из n равных дуг, градусная мера которых равна $\frac{180°}{n}$, а радиус окружности d. Тогда

$$\boldsymbol{P}_{\text{Рёло}} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{2\pi d}}{\boldsymbol{360°}} \cdot \frac{\boldsymbol{180°}}{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\pi d} \quad (3)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что периметр многоугольника Рёло не зависит от числа дуг, из которых он состоит.

Следовательно**,** ***все многоугольники Рёло одинаковой ширины имеют один и тот же периметр*** $\boldsymbol{\pi d}$**.**

Это утверждение получило название ***теоремы Барбье*** по имени французского астронома и математика Джозефа Эмиля Барбье (1839 – 1889).

Площадь многоугольника Рёло

Найдем площадь многоугольника Рёло.

Сначала найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot sin\,\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Далее найдем площадь сектора ABC:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot AC^2}{360°} \cdot \frac{180°}{n} = \frac{\pi \cdot d^2}{2n}$$

Многоугольник Рёло состоит из треугольника правильного n-угольника и n сегментов, образованных хордой AB. Тогда площадь многоугольника Рёло можно найти по формуле:

$$S_{\text{Рёло}} = n \cdot S_{\text{сегм}} + S_{\text{мн}}$$

Площадь сегмента найдем как разность площади сектора и площади треугольника ABC:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\text{ABC}} = \frac{\pi \cdot d^2}{2n} - \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{d^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{n} - \sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$$

$$S_{\text{мн}} = n \cdot S_{AOB} = n \cdot 2S_{AOH} = 2n \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OH \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) =$$

$$= n \cdot AO^2 \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) \sin\left(\frac{180°}{2}\right) = n \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{180°}{2}\right) =$$

$$= n \cdot \frac{d^2}{2\left(1 + cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)} \cdot \sin\left(\frac{180°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) = \frac{n \cdot d^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right)}{2\left(1 + cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)} =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{d^2\left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\left(1 - \cos^2 \frac{180°}{n}\right)} \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{d^2\left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\sin^2 \frac{180°}{n}} \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{d^2 \left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right)$$

Получим:

$$S_{\text{Рёло}} = n \cdot S_{\text{сегм}} + S_{\text{мн}} = n \cdot \frac{d^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{n} - \sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right) + \frac{n}{2} \cdot \frac{d^2\left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{2} \cdot \left(\left(\pi - \mathrm{n} \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right) + \frac{n\left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{n\left(1 - cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{2}\right) - n \cdot \sin^2\left(\frac{180°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{n \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right) - n \cdot \cos^2\left(\frac{180°}{2}\right) - n \cdot \sin^2\left(\frac{180°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{n \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right) - n}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) = \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{n \cdot \left(\cos\left(\frac{180°}{n}\right) - 1\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right)$$

Итак,

$$\boldsymbol{S}_{\text{Рёло}} = \frac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{2}} \cdot \left(\boldsymbol{\pi} + \frac{\boldsymbol{n} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}\right) - \mathbf{1}\right)}{\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}\right)}\right) \qquad \mathbf{(4)}$$

Выразим площадь многоугольника через сторону многоугольника:

$$S_{\text{Рёло}} = \frac{\frac{a^2}{2\left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}}{2} \cdot \left(\pi + \frac{n \cdot \left(\cos\left(\frac{180°}{n}\right) - 1\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) = \frac{a^2}{4\left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)} \text{x}$$

$$\text{x}\left(\pi + \frac{n \cdot \left(\cos\left(\frac{180°}{n}\right) - 1\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) = \frac{\pi a^2}{4\left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)} - \frac{n \cdot a^2}{4 \sin\left(\frac{180°}{n}\right)} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{\left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)} - \frac{n}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right)$$

Итак,

$$\boldsymbol{S}_{\text{Рёло}} = \frac{\boldsymbol{a^2}}{\mathbf{4}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\left(\mathbf{1} - \mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)} - \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}\right)}\right) \qquad \mathbf{(5)}$$

Найдем площадь треугольника Рёло:

$$S_{\Delta\text{Рёло}} = \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{\left(1 - \cos\left(\frac{180°}{3}\right)\right)} - \frac{3}{\sin\left(\frac{180°}{3}\right)} \right) = \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} - \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) =$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{\frac{1}{2}} - \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{a^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

Или:

$$\boldsymbol{S_{\Delta\text{Рёло}} = \frac{d^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)} \qquad \textbf{(6)}$$

Площадь пятиугольника Рёло:

$$S_{\text{пятиуг.Рёло}} = \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{5 \cdot (\cos(36°) - 1)}{\sin(36°)} \right)$$

$\cos(36°) \approx 0{,}8090$

$\sin(36°) \approx 0{,}5878$

Тогда

$$S_{\text{пятиуг.Рёло}} \approx \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{5 \cdot (0{,}8090 - 1)}{0{,}5878} \right) \approx 0{,}76d^2$$

Площадь девятиугольника Рёло:

$$S_{\text{девятиуг.Рёло}} = \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{5 \cdot (\cos(20°) - 1)}{\sin(20°)} \right)$$

$\cos(20°) \approx 0{,}9327$

$\sin(20°) \approx 0{,}3420$

Тогда

$$S_{\text{девятиуг.Рёло}} \approx \frac{d^2}{2} \cdot \left(\pi + \frac{5 \cdot (0{,}9327 - 1)}{0{,}3420} \right) \approx 1{,}37d^2$$

Заметим, что площадь треугольника Рёло равна примерно $0{,}70d^2$, площадь пятиугольника - примерно $0{,}76d^2$, а площадь девятиугольника Рёло – примерно $1{,}37d^2$, т.е. можно предположить, что площадь многоугольника Рёло при сохранении его ширины возрастает при увеличении числа сторон многоугольника, с помощью которого он образован.

Другими словами, ***из всех фигур постоянной ширины наименьшую площадь имеет треугольник Рёло, а наибольшую – круг.***

Это утверждение носит название теоремы ***Бляшке — Лебега***, по фамилиям немецкого геометра Вильгельма Бляшке, опубликовавшего теорему в 1915 году, и французского математика Анри Лебега, который сформулировал её в 1914 году. В разное время варианты её доказательства предлагали Мацусабуро Фудзивара (1927 и 1931 год), Антон Майер (1935 год), Гарольд Эгглстон (1952 год), Абрам Безикович (1963 год), Дональд Чакериан (1966 год), Эванс Харрелл (2002 год) и другие математики.

При попытке доказать эту теорему, я столкнулся с тем, что имеющихся на сегодня у учащегося десятого класса знаний по математике недостаточно для того, чтобы представить строгое доказательство теоремы Бляшке - Лебега.

Для сравнения двух величин я нашел их разность и попытался сравнить ее с нулем. При оценки разности $S_{\text{Рёло}} - S_{\Delta\text{Рёло}}$ получим:

$$S_{\text{Рёло}} - S_{\Delta\text{Рёло}} = \frac{d^2}{2}\cdot\left(\pi + \frac{n\cdot\left(\cos\left(\frac{180°}{n}\right)-1\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right) - \frac{d^2}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{2}\cdot\left(\pi + \frac{n\cdot\left(\cos\left(\frac{180°}{n}\right)-1\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} - \pi + \sqrt{3}\right) =$$

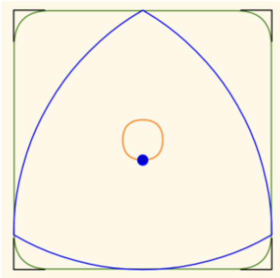
$$= \frac{d^2}{2}\cdot\left(\sqrt{3} - \frac{n\cdot\left(1-\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}\right)$$

Если $n \longrightarrow \infty$, то $\frac{180°}{n} \longrightarrow 0$, $\sin\left(\frac{180°}{n}\right) \longrightarrow 0$, $\cos\left(\frac{180°}{n}\right) \longrightarrow 1$. Оценить знак полученной разности не получилось, т.к. для такой оценки необходимо применить инструменты математического анализа.

Качение по квадрату

Любая фигура постоянной ширины может быть вписана в квадрат со стороной, равной ширине фигуры.

Например, треугольник Рёло вписан в квадрат и может вращаться в нём, постоянно касаясь всех четырёх сторон. Каждая вершина треугольника при его вращении «проходит» почти весь периметр квадрата, отклоняясь от этой траектории лишь в углах — там вершина описывает дугу.

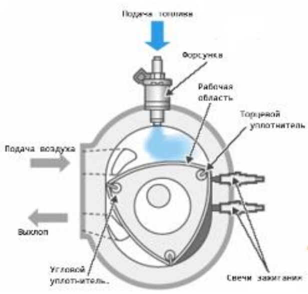


(источник: https://etudes.ru/etudes/drilling-square-holes/4/)

Описанные свойства фигур постоянной ширины нашли широкое применение в жизни человека.

4. Применение многоугольников Рёло

Выше было показано, что треугольник Рёло может быть использован в ***автомобилестроении***: форму треугольника Рёло может иметь колесо автомобиля. Однако, разработчики Пентагона были не первыми, кто придумал использовать треугольник Рёло в конструкции автомобиля. Эта фигура нашла свое применение в автомобильных двигателях. В 1957 году немецкий инженер Феликс Ванкель сконструировал роторно-поршневой двигатель – двигатель внутреннего сгорания, в основу конструкции которого положен ротор в форме «круглого треугольника».



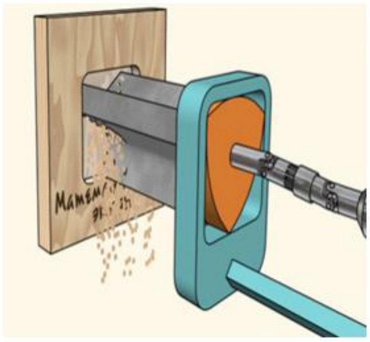
Среди преимуществ этого двигателя выделяют следующие:

- ✓ состоит из меньшего числа деталей, чем поршневой;
- ✓ роторный двигатель по габаритам примерно в два раза меньше поршневого;
- ✓ двигатель Ванкеля всегда вращается в одном и том же направлении, не имеет вибраций, его основные части двигаются медленнее, поэтому он работает тише;
- ✓ двигатель Ванкеля имеет меньше движущихся частей, чем поршневой, поэтому у него меньше поломок, он считается более надежны.

Среди недостатков этого двигателя Ванкеля выделяют его более сложное обслуживание, более высокий расход топлива и более высокие выбросы загрязняющих веществ в атмосферу.

Несмотря на все достоинства такого двигателя, более высокий расход топлива в условиях роста цен на него не позволил разработчикам широко приметь его в конструкции автомобиля. Роторные двигатели Ванкеля исследовались лишь японской компанией Mazda. Еще к этому мотору проявлял внимание ВАЗ. Однако к 2004 году эта кампания производство машин с таким двигателем прекратила. Поэтому Япония стала единственной страной, в которой продолжались разработки роторного двигателя аж до 2012 года.

В начале работы я задался вопросом, можно ли просверлить квадратное отверстие. Оказывается, можно. Если центр треугольника Рёло двигается по определённой замкнутой кривой, а сам треугольник при этом вращается вокруг центра, то он захватывает область, имеющую форму квадрата, углы которого немного закруглены. Используя эту идею в 1914 году английский инженер Гарри Джеймс Уаттс изобрел инструмент для сверления квадратных отверстий. Этот инструмент получил название «***сверло Уаттса***».



(источник: https://etudes.ru/etudes/drilling-square-holes/)

Рабочая часть сверла образуется при формировании области пересечения трех равных кругов особой формы. Во время работы ось сверла должна перемещаться по определенной траектории, за счет чего и получается квадрат или прямоугольник. Получаемый прямоугольник или квадрат имеет немного закругленные углы.

Выше уже рассматривался вопрос о форме канализационного люка. Оказывается, ***крышки люков*** не всегда имеют круглую форму. Поскольку функцию защиты может с успехом выполнять любая фигура постоянной ширины (эта форма не позволит крышке люка «провалиться»), а наименьшую площадь среди этих фигур имеет треугольник Рёло, то выгоднее изготавливать крышки именно в форме треугольника Рёло.

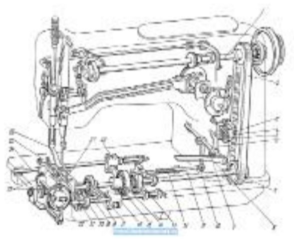
Покажем это с помощью математических вычислений. Найдем отношение площади треугольника Рёло к площади круга:

$$\frac{S_{\Delta\text{Рёло}}}{S_{\text{круг}}} = \frac{\frac{d^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{2\left(\pi - \sqrt{3}\right)}{\pi} \approx 0{,}897$$

Т.е. площадь треугольника Рёло примерно на 10% меньше площади круга. А это значит, что при изготовлении люков можно значительно сэкономить на материалах.

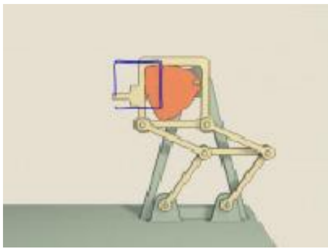
В 2014 году Приднестровский республиканский банк ввел в обращение монеты из композитных материалов номиналом 1, 3, 5 и 10 рублей. Это событие не могло пройти незамеченным, поскольку монеты разных номиналов были выполнены в разных формах и цветах. Например, трехрублевая монета – зеленого цвета и выполнена в форме квадрата со скругленными углами, а монета номиналом 5 рублей имеет форму пятиугольника синего цвета. Однако, эти монеты не могут быть использованы для расчетов в банкоматах: даже если расширить трубку монетоприемника, есть риск, что монета застрянет. Если бы монеты были выполнены в форме фигур постоянной ширины, то они свободно бы проходили по трубке монетоприемника, даже вращаясь. В Англии, например, ***монеты*** имеют форму фигур постоянной ширины (см. рис).

Треугольник Рёло использовался ***в кулачковых механизмах*** (преобразующих механизмах, изменяющих характер движения) некоторых паровых двигателей начала XIX века. Сегодня его можно увидеть в старых механических швейных машинках: в кулачковых механизмах швейных машин зигзагообразной строчки. В качестве кулачка треугольник Рёло использовали немецкие часовые мастера в механизме наручных часов.

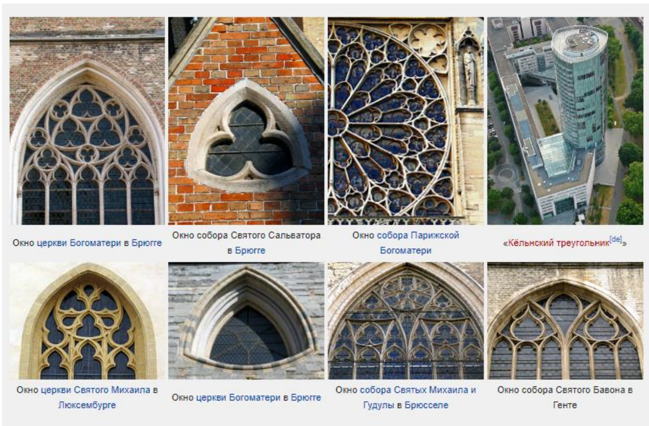


Треугольник Рёло — распространённая форма ***плектра*** (медиатора): тонкой пластинки, предназначенной для игры на струнах щипковых музыкальных инструментов.

До наступления цифровой эпохи фильмы снимали на плёнку. И в кинокамерах, и в кинопроекторах были ***грейферные механизмы***, обеспечивавшие скачкообразное движение плёнки вдоль объектива (стандартно 18 скачков в секунду). Движение этих механизмов задавал треугольник Рёло [2].



Форма треугольника Рёло часто используется в ***архитектуре***.



(источник: http://wiki-org.ru/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A0%D1%91%D0%BB%D0%BE)

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что свойства фигур постоянной ширины находят очень широкое применение в технике и искусстве.

Выводы

В ходе исследования удалось найти ответы на вопросы: существуют ли кривые постоянной ширины, отличные от окружности; как ли просверлить квадратное отверстие. Оказалось, что существует бесконечно много фигур постоянной ширины. В работе рассмотрены фигуры постоянной ширины, образованные правильными многоугольниками.

Были изучены и апробированы различные способы построения треугольника Рёло: с помощью циркуля и с помощью циркуля и правильного треугольника. На основании правильного многоугольника с нечетным числом сторон были построены различные многоугольники Рёло.

Созданы модели фигур постоянной ширины и на их основе построена платформа с «треугольными» колесами. Тем самым, было продемонстрировано, что треугольник Рёло – фигура постоянной ширины. Кроме того, на практике подтверждено, что не все в фантастических произведениях является вымыслом. Некоторые вещи научно обоснованы, а если и не целиком связаны с действительностью, то берут свое начало из реальных явлений и теории.

В процессе исследования рассмотрены числовые характеристики фигур постоянной ширины. Все задачи рассматривались в общем виде, затем полученный результат интерпретировался для частных случаев. В процессе исследования удалось связать между собой ширину многоугольника Рёло, его периметр, площадь, а также длину стороны многоугольника, с помощью которого можно построить многоугольник Рёло, и радиус описанной около этого многоугольника окружности. Была доказана теорема Барбье. Сделана попытка доказать теорему Бляшке-Лебега.

В ходе исследования установлено, что свойства фигур постоянной ширины находят практическое применение. Например, треугольник Рёло используется во многих механических устройствах (сверло Уаттса), в автомобильных двигателях, в грейферном механизме в кинопроекторах, применяется в кулачковых механизмах швейных машин зигзагообразной строчки. Треугольник Рёло – распространённая форма плектра (медиатора): тонкой пластинки, предназначенной для приведения в состояние колебания струн щипковых музыкальных инструментов. Особо хочется отметить, что в результате исследования стало понятно, как можно просверлить квадратное отверстие.

Таким образом, выдвинутая гипотеза нашла свое подтверждение, цели достигнуты.

Литература

1. Франц Рело. 1829-1905/ А.Н. Боголюбов, В.Н. Чиненова; отв.ред. А.П,Бессонов. – М.: Наука, 2014. – 268 с. : ил. – (Научно-биографическая литература)
2. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н.Н.Андреев, Н.М. Панюнин; Художник-оформитель Р.А.Кокшаров. – 2-е изд., расш. и доп. – М.: Фонд «Математические этюды», 2019. – 367 с.: ил.
3. Пол Андерсен. Треугольное колесо/ Электронная библиотека RoyalLib.com: https://royallib.com/book/anderson_pol/treugolnoe_koleso.html
4. Википедия: http://wiki-org.ru/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A0%D1%91%D0%BB%D0%BE
5. Что такое роторный двигатель. Интернет-ресурс: https://dolauto.ru/informations/articles/chto-takoe-rotornyy-dvigatel/
6. Как работает сверло для квадратных отверстий / Железное дело. Интернет-портал о металле: https://aomur.ru/prochee/kak-rabotaet-sverlo-dlya-kvadratnyh-otverstij.htm