

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ГИМНАЗИЯ №526 МОСКОВСКОГО РАЙОНА САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

Индивидуальный итоговый проект

**Тема: «Тригонометрические функции и их практическое применение»**

Выполнил: Сварчевский Артём Константинович  
ученик 9 «Б» класса  
Руководитель: Володина Юлия Николаевна,  
учитель математики  
Допуск \_\_\_\_\_

Санкт-Петербург

2023

## СОДЕРЖАНИЕ:

ВВЕДЕНИЕ .....	2
1. Возникновение тригонометрии.....	4
1.1 История развития тригонометрии.....	4
1.2 Понятие тригонометрии и тригонометрические функции .....	6
1.3 Знаки тригонометрических функций.....	10
1.4 Свойства тригонометрических функций.....	12
2. Практическое применение тригонометрических функций .....	17
2.1 Тригонометрические функции в колебательных процессах .....	17
2.1.1 Звуковая волна .....	19
2.1.2 Электромагнитная волна.....	22
2.2 Приборы в которых используются физические явления на основе тригонометрических функций .....	27
2.2.1 Приборы, работающие на звуковой волне .....	27
2.2.2 Приборы, работающие на электромагнитных волнах.....	36
2.2.3 Приборы, которые измеряют иные периодические колебания в жизни .....	43
ВЫВОД.....	47
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	48

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию исследовательская работа посвящена тригонометрическим функциям. Меня заинтересовала эта тема, когда мы проходили по физике тему «механические колебания». Мне стало интересно, как на практике применяются тригонометрические функции и какие существуют приборы, связанные с этими функциями.

Тригонометрия используется человеком уже очень долго, но до сих пор эта научная дисциплина занимает важную роль в решении практических задач в астрономии, мореплавании, геодезии. С этой наукой мы сталкиваемся не только на уроках математики, физики, но и в повседневной жизни. Тригонометрия играет важную роль в акустике, оптике, электронике, океанографии, метеорологии, сейсмологии и многих других областях.

Её развитие стимулируется потребностями практической деятельности человека, сначала она была связана с астрономией, и только через длительный срок она превратилась в самостоятельную отрасль математики.

Поэтому тригонометрия по традиции занимает важное место в конкурсных экзаменах в вузы. Ведь знание тригонометрии очень важно почти во всех сферах деятельности человека. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных тригонометрии вообще. Однако, мы решили изучить эту тему на основе колебательных процессов в природе, которые описываются с помощью тригонометрических функций. Мы рассмотрим возможности применения тригонометрических функций в жизни человека и приборах, в которых используются физические явления на основе тригонометрических функций, и в этом заключается новизна нашего исследования.

### **Цель моей работы:**

Основная цель работы - изучить применение тригонометрических функций в практической деятельности. После решения данной цели мы сможем понять, какое место тригонометрические функции занимают в нашем мире, и как их можно использовать на практике.

### **Актуальность:**

Актуальность темы работы определяется тем, что в настоящее время тригонометрические знания используют для решения многих практических задач в разных областях. Например, в астрономии применяется техника триангуляции, для определений расстояний до недалёких звезд, а в географии для определения расстояний между ориентирами, для контроля системы навигации спутников. В медицине можно построить модель биоритмов с помощью тригонометрических функций. Знания тригонометрии упростят понимание некоторых аспектов различных наук и откроют возможности для создания новых измерительных приборов.

**Гипотеза:**

Я считаю, что тригонометрические функции являются основой описания многих природных явлений, которые используются в приборах для решения практических задач.

**Задачи:**

Для достижения поставленной цели нам необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить историю возникновения и развития тригонометрии.
2. Рассмотреть примеры практического применения тригонометрических функций в колебательных процессах.
3. Показать на конкретных примерах, что в основе работы многих приборов, используемых в повседневной жизни, науке и технике, лежат процессы, описываемые с помощью тригонометрических функций и их свойств.
4. Сделать вывод о проведённой работе.

**Методы исследования:** Анализ литературы, поиск и сбор информации, систематизация и обобщение материала.

## 1. Возникновение тригонометрии

Как и все другие науки, тригонометрия возникла в результате жизненных потребностей людей, в процессе решения конкретных практических задач. Она возникла и развивалась в древности как один из разделов астрономии, как ее вычислительный аппарат, отвечающий практическим нуждам человека.

Тригонометрия была наукой о соотношениях сторон в треугольнике. Именно с этого развитие тригонометрии и началось (в переводе с древнегреческого означает измерение треугольников (*trigwpon* - треугольник, а *metrew* - измеряю)). Формирование тригонометрии произошло из практических задач на решение плоских и сферических треугольников.

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер, т.е. её факты формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была ещё в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы. Значительные стимулы к развитию тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии: астрономов интересовали соотношения между сторонами и углами сферических треугольников. Начиная с XVII в., тригонометрические функции стали применяться к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, процессов распространения волн и т.д.; вследствие этого тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели важное значение для всей математики.

### 1.1 История развития тригонометрии

Формирование тригонометрии происходило постепенно на рубеже различных наук. Развитие тригонометрии стимулировалось прежде всего нуждами астрономии.

Зачатки тригонометрических познаний зародились в глубокой древности.

Начало истории тригонометрии как науки связано с деятельностью учёных Древней Греции, которые унаследовали от египтян и вавилонян большой запас математических и астрономических фактов и вычислительных приемов. Согласно легенде, знаменитый древнегреческий философ и математик Фалес Милетский (VII–VI вв. до н.э.) познакомился в Египте с методом определения высоты предмета по известной длине его тени с помощью гномона.

Гномон - это вертикальный шест, установленный на ровной горизонтальной площадке. Длина отбрасываемой им тени зависит от положения Солнца. Если известна длина гномона  $L$ , то по длине тени  $l$ , отбрасываемой им в данный момент, можно определить угловую высоту Солнца над горизонтом. Если воспользоваться современной математической терминологией, то выражение для определения  $h$  может быть записано следующим образом:  $\text{tgh} = L/l$ . С помощью гномона в древности решались многие важные для практики задачи. Например, указать момент солнцестояния, найти длину солнечного года и др.

Решающую роль в формировании тригонометрии, особенно сферической, сыграла астрономия. Изучая взаимное расположение светил, античные астрономы принимали, что Луна, Солнце, планеты, неподвижные звёзды находятся на поверхности сфер, в центре которых расположена Земля с наблюдателем. Для упрощения расчётов принято считать, что расстояние от наблюдателя до всех светил одинаковое, т.е. светила спроецированы на одну сферическую поверхность, которая называется небесной сферой.

Астрономы уже в древности ввели четыре сферические системы координат, в которых положение любой точки на небесной сфере определяется с помощью двух углов или дуг на ней.

Так в сочинении «О величинах и расстояниях Солнца и Луны» выдающегося астронома античного мира, автора первой гелиоцентрической гипотезы Аристарха Самосского (310-260 гг. до н.э.) уже встречаются отношения величин, представляющие собою, по существу, тригонометрические величины. Он рассматривал треугольник Земля-Луна-Солнце в момент, когда угол при Луне равен 90 градусов. Его наблюдения показали, что видимое расстояние между Солнцем и Луной равно 87 градусов.

Важный вклад в развитие тригонометрии сделал Архимед (287-212 гг. до н.э.). В его трактате «Измерение круга», а также в некоторых сочинениях, сохранившихся только в позднем арабском изложении, доказаны теоремы, которые послужили основой для тригонометрических вычислений в круге. Среди них особенно важна так называемая «лемма Архимеда». Она формулируется так: «Если вписанная в дугу прямая линия сломана на две неравные части, и я опущу на неё из середины этой дуги перпендикуляр, то она разделится им пополам».

Также важный вклад в развитие тригонометрии был внесён индийской математикой в период 5-12 вв. н.э. Хотя так же, как и древнегреческая, индийская тригонометрия была вспомогательным разделом астрономии.

Индийские математики вычисляли не полную хорду, как это делали греки, а её половину (то есть «линию синусов»). Линия синусов именовалась ими «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». Индийцы составили таблицу синусов, в которой были даны значения полухорд, измеренных частями (минутами) окружности для всех углов от 0° до 90°. Эти таблицы были точнее таблиц Птолемея.

Знакомившись с трудами индийских математиков, арабские учёные существенно продвинули вперёд разработку тригонометрии. Арабы называли линию синусов словом «джайб», что переводится на латынь как *sinus*; от латинского выражения *complementisinus* (синус дополнения) произошло слово «косинус». Линии тангенсов и котангенсов арабы первоначально именовали соответственно «обращённой тенью» и «плоской тенью» — названиями, восходящими к гномонике александрийских астрономов и объясняющимися тем, что линии тангенсов и котангенсов первоначально рассматривали как тени гномона — горизонтального и вертикального — соответственно на вертикальную и горизонтальную плоскости.

Линии синусов и косинусов измеряли, следуя традиции александрийских и индийских астрономов, в 60-х долях радиуса, а линии тангенсов и котангенсов — в 7-х и 12-х долях гномона. Линии секансов и косекансов, являющиеся отрезками прямой диаметра, сначала называли диаметрами обращённой и соответственно плоской тени, а впоследствии — первым и вторым диаметрами. Теоретический интерес этих двух последних линий невелик, но таблицы их вплоть до открытия логарифмов имели практическую ценность, поскольку позволяли заменять умножением деление на косинус и синус.

В XI–XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Развитию тригонометрии способствовали потребности географии, геодезии, военного дела. Тригонометрия получила развитие в средние века, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), в Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Насирад-Динат-Туси, ал-Каши, ал-Бируни), в Арабии (Ахмад, ибн-Абдаллах, ал-Баттани). Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому учёному Насир ад-Дину Мухаммадуат-Туси (1201–1274), написавшему «Трактат о полном четырёхугольнике». Работы учёных этого периода привели к выделению тригонометрии в самостоятельный раздел математики. Однако в их трудах ещё не было необходимой символики, и поэтому развитие тригонометрии происходило медленно.

Начиная с XV века работы, посвящённые вопросам тригонометрии, появляются и в Европе. Немецкий учёный Иоганн Мюллер, известный в науке под именем Региомонтан, издал труд «Пять книг о треугольниках всех видов», сыгравший важную роль в развитии тригонометрии. В нём дано систематическое изложение тригонометрии как самостоятельной научной дисциплины. Дальнейшее развитие тригонометрии шло по пути накопления и систематизации формул, уточнения основных понятий, становления терминологии и обозначений. Многие европейские математики работали в области тригонометрии. Среди них такие великие учёные, как Николай Коперник (1473–1543), Тихо Браге (1546–1601) и Иоганн Кеплер (1571–1630). Франсуа Виет (1540–1603) дополнил и систематизировал различные случаи решения плоских и сферических треугольников, открыл «плоскую» теорему косинусов и формулы для тригонометрических функций от кратных углов. Исаак Ньютон (1643–1727) разложил эти функции в ряды и открыл путь для их использования в математическом анализе.

Таким образом, тригонометрия в своём развитии прошла два этапа. Начала первого этапа положены в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд и составляются таблицы хорд. Тригонометрия имела геометрический язык и применялась к решению геометрических задач.

Второй этап, начало которого положено в трудах Франсуа Виета, полностью раскрывается в школе академика Леонарда Эйлера. Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий (определённых отрезков в круге) для любых углов.

Современный вид тригонометрия получила в трудах великого учёного, члена Российской академии наук Леонарда Эйлера (1707–1783). Эйлер ввёл и само понятие функции, и принятую в наши дни символику. Величины  $\sin x$ ,  $\cos x$  и т. д. он рассматривал как функции числа  $x$  — радианной меры соответствующего угла. Эйлер давал числу  $x$  всевозможные значения: положительные, отрицательные и даже комплексные. Он также обнаружил связь между тригонометрическими функциями и экспонентой комплексного аргумента, что позволило превратить многочисленные и зачастую весьма громоздкие тригонометрические формулы в простые следствия из правил сложения и умножения комплексных чисел. Этот учёный ввёл и обратные тригонометрические функции. Таким образом, Эйлер создал тригонометрию как науку о функциях, дал ей аналитическое изложение, вывел всю совокупность формул из немногих основных формул. Обозначение сторон малыми буквами и противолежащих углов — соответствующими большими буквами позволило ему упростить все формулы, внести в них ясность и стройность. Эйлеру принадлежит идея рассматривать тригонометрические функции как отношения соответствующих линий к радиусу круга, то есть как числа, причём радиус круга как «полный синус» он принял за единицу. Эйлер получил ряд новых соотношений, установил связь тригонометрических функций с показательными, дал правило знаков функций для всех четвертей, получил обобщённую формулу приведения и освободил тригонометрию от многих ошибок, допущенных почти во всех европейских учебниках математики. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие её в строгой научной последовательности.

## 1.2 Понятие тригонометрии и тригонометрические функции

Тригонометрия - математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами треугольников и тригонометрические функции. Немецкий математик Бартоломеус Питискус определял тригонометрию как науку об измерении треугольников.

Тригонометрические функции представляют собой элементарные функции, аргументом которых является угол. С помощью тригонометрических функций описываются соотношения между сторонами и острыми углами в прямоугольном треугольнике. Области применения тригонометрических функций чрезвычайно разнообразны. Так, например, любые периодические процессы можно представить в виде суммы тригонометрических функций (ряда Фурье). Данные функции часто появляются при решении дифференциальных и функциональных уравнений. К тригонометрическим функциям относятся следующие шесть функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Давайте дадим определения этим понятиям.

**Определение.** Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к гипотенузе треугольника.

**Определение.** Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к катету треугольника, прилежащему к углу.

**Определение.** Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета, прилежащего к углу, к гипотенузе треугольника.

**Определение.** Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, прилежащего к этому углу, к катету треугольника, противоположного к углу.

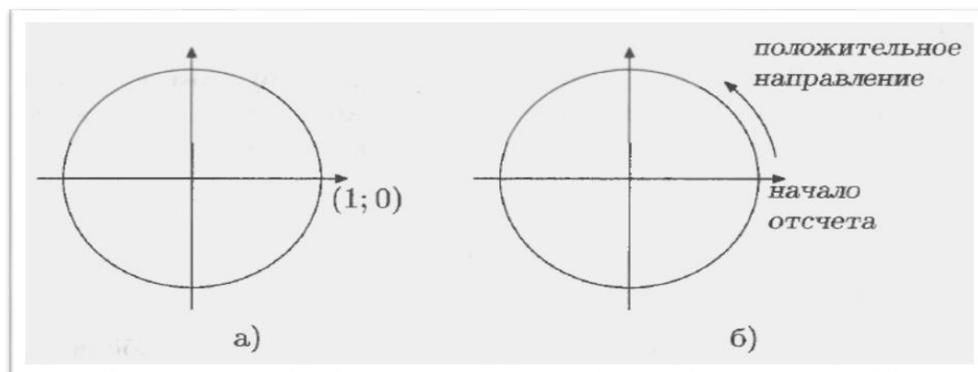
**Определение.** Секанс - это величина, обратная косинусу.

**Определение.** Косеканс - это отношение, обратное синусу.

Но мы с вами рассмотрим только функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Для того, чтобы познакомиться с тригонометрическими функциями введём на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1а).

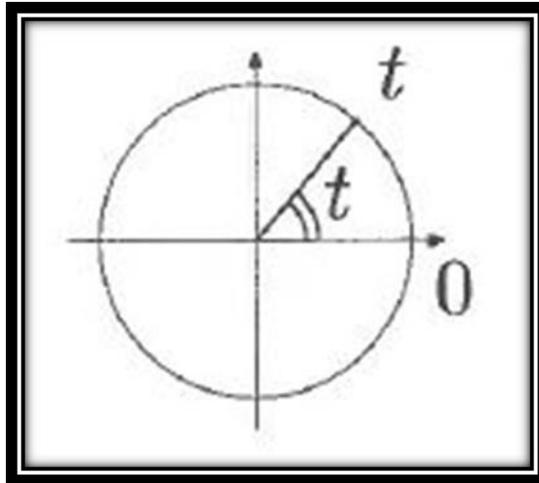
Такой чертёж принято называть тригонометрическим кругом (или тригонометрической окружностью). Точку с координатами  $(1;0)$ , лежащую на этой окружности, будем называть началом отсчёта или точкой ноль. Направление движения против часовой стрелки будем называть положительным направлением (рис. 1б).



**Рис. 1.** Тригонометрический круг

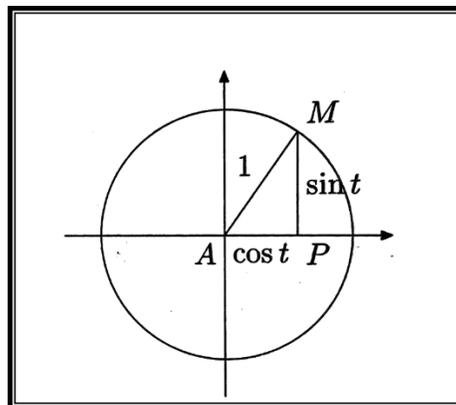
Тригонометрическая окружность служит для того, чтобы наносить на неё числа. Это делается так. Пусть у нас есть число  $t$ . Начав с начала отсчёта, пройдём по тригонометрической окружности путь длиной  $|t|$ : если  $t > 0$  - в положительном направлении, если  $t < 0$  - в отрицательном (возможно, нам придётся при этом пройти по одному и тому же месту несколько раз). Точка, в которой мы остановились, и есть точка на окружности, соответствующей числу  $t$ .

Если  $0 < t < \pi/2$ , то число  $t$  на круге будет расположено так, что отрезок, соединяющий соответствующую точку с началом координат, составит угол  $t$  радиан с осью абсцисс. В самом деле, в этом случае длина дуги от  $0$  до  $t$  будет как раз равна  $t$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Радианная мера угла

А теперь давайте дадим основные определения тригонометрии через меру угла по окружности с радиусом 1 (Рис. 3).



**Рис. 3.** Тригонометрический круг на координатной плоскости

По определению косинуса и синуса острого угла в прямоугольном треугольнике, то:

$$\cos \angle MAP = AP/AM = x/R = x = AP;$$

$$\sin \angle MAP = PM/AM = y/R = y = PM.$$

Таким образом, мы можем дать новые тригонометрические определения для синуса и косинуса угла.

**Определение.** Косинус угла  $\text{MAP}$  - это отношение абсциссы точки окружности к радиусу этой окружности (т.е. косинус угла - это абсцисса на координатной оси, т.к. радиус равен 1).

**Определение.** Синус угла  $\text{MAP}$  - это отношение ординаты точки окружности к радиусу этой окружности (т.е. синус угла - это ордината на координатной оси, т.к. радиус равен 1).

Применив определения тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике  $\text{MAP}$ , получаем:

$$\text{tg}\angle\text{MAP} = \text{MP}/\text{AP}=y/x;$$

$$\text{ctg}\angle\text{MAP} = \text{AP}/\text{MP}=x/y.$$

**Определение.** Тангенс угла  $\text{MAP}$  - это отношение ординаты точки единичной окружности к абсциссе этой точки.

**Определение.** Котангенс угла  $\text{MAP}$  - это отношение абсциссы точки единичной окружности к ординате этой точки.

Кроме синуса, косинуса и тангенса используются также и менее употребительные функции котангенс, секанс и косеканс, которые определяются так:

$$\text{ctgt}=\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

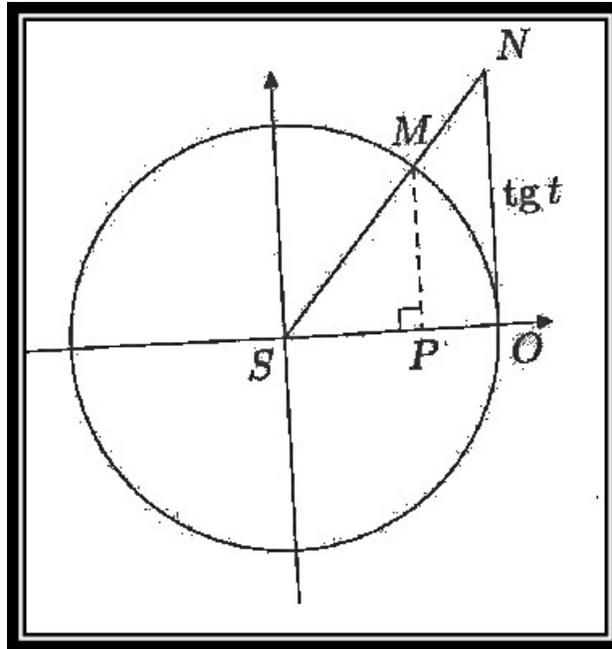
$$\text{cosec } t = \frac{1}{\sin t}$$

Теперь, когда мы определили тригонометрические функции числового аргумента, можно узнать, чему равны тригонометрические функции не только острых, но и прямого и тупых углов: надо перевести величину угла в радианы и взять синус, косинус или тангенс от получившегося числа.

t	0°	90°	120°	135°	150°	180°
sin t	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos t	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg t	0	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Синус и косинус мы определили геометрически, как ординату и абсциссу точки, а тангенс - алгебраически, как  $\text{sin}t/\text{cos}t$ . Можно, однако, и тангенсу придать геометрический смысл.

Для этого проведём через точку с координатами (1;0) (начало отсчета на тригонометрической окружности) касательную к тригонометрической окружности - прямую, параллельную оси ординат. Назовём эту прямую осью тангенсов (рис.4).



**Рис. 4.** Ось тангенсов. Точка  $M$  соответствует числу  $t$ .

Название это оправдывается так: пусть  $M$  – точка на тригонометрической окружности, соответствующая числу  $t$ . Продолжим радиус  $SM$  до пересечения с осью тангенсов. Тогда оказывается, что ордината точки пересечения равна  $\text{tgt}$ .

В самом деле, треугольники  $NOS$  и  $MPS$  подобны. Отсюда

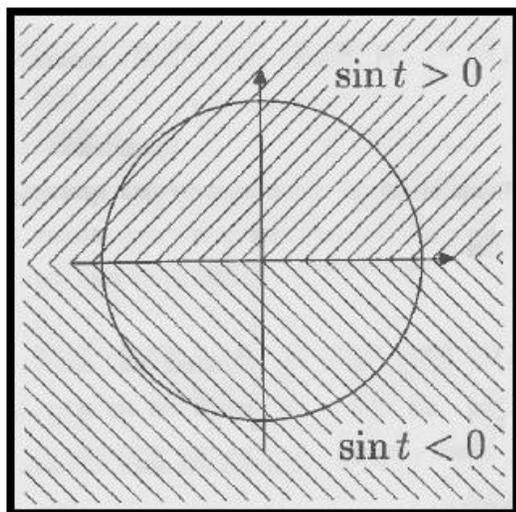
$$\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{MP}{PS} = \frac{NO}{OS} = \frac{NO}{1} = NO,$$

что и доказывалось.

Если точка  $M$  имеет координаты  $(0;1)$  или  $(0;-1)$ , то прямая  $SM$  параллельна оси тангенсов, и тангенс нашим способом определить нельзя. Это и не удивительно: абсцисса этих точек равна 0, так что  $\cos t = 0$  при соответствующих значениях  $t$ , и  $\text{tgt} = \sin t / \cos t$  не определен.

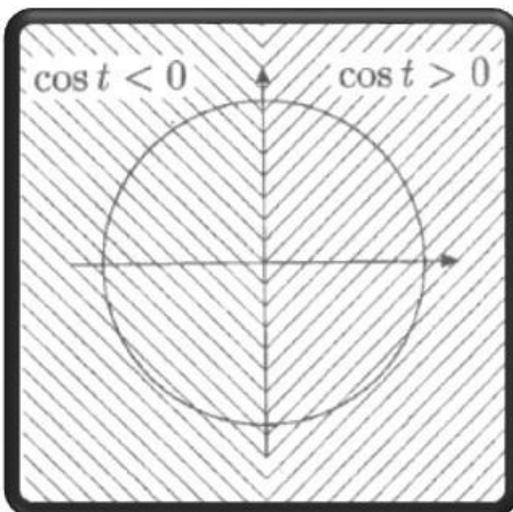
### 1.3 Знаки тригонометрических функций

Разберёмся, при каких значениях  $t$  синус, косинус и тангенс положительны, а при каких отрицательны. Согласно определению,  $\sin t$  – это ордината точки на тригонометрической окружности, соответствующей числу  $t$ . Поэтому  $\sin t > 0$ , если точка  $t$  на окружности лежит выше оси абсцисс, и  $\sin t < 0$ , если точка  $t$  на окружности лежит ниже оси абсцисс (рис. 5).



**Рис. 5.** Знаки синуса

На рис. 6 аналогичным образом изображено, когда положителен и когда отрицателен  $\cos t$ .



**Рис. 6.** Знаки косинуса

Увидеть, когда положителен, а когда отрицателен  $\operatorname{tg} t$ , проще всего с помощью оси тангенсов:  $\operatorname{tg} t$  положителен, если точка на окружности, соответствующая числу  $t$ , лежит в первой или третьей четверти, и отрицателен, если эта точка лежит во второй или четвертой четверти. Схематически это изображено на рис. 7.

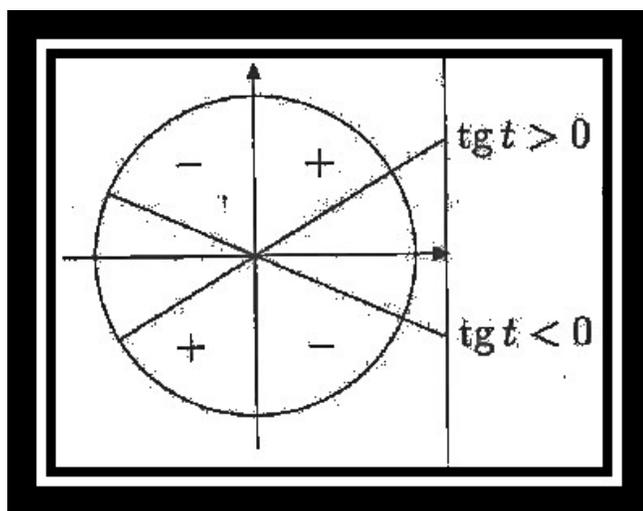


Рис. 7. Знаки тангенса

#### 1.4 Свойства тригонометрических функций

Функция – это переменная величина, меняющаяся в зависимости от другой величины.

Функция  $y = \cos x$  является чётной, для неё выполняется условие  $\cos x = \cos(-x)$ .

Функции  $y = \sin x$ ;  $y = \operatorname{tg} x$ ;  $y = \operatorname{ctg} x$  являются нечётными, для них выполняются условия:

$$\sin x = -\sin(-x)$$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$$

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(-x)$$

Все тригонометрические функции являются периодическими. Наименьшим положительным целым периодом для функций синус и косинус является период, равный  $2\pi$  или  $360^\circ$ , т.е. справедливы следующие равенства:

$$\sin(a + 360^\circ k) = \sin a; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(a + 360^\circ k) = \cos a; k \in \mathbb{Z}$$

Наименьшим положительным периодом функций тангенс и котангенс является период, равный  $180^\circ$  или  $\pi$ , т.е. справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{tg}(a + 180^\circ k) = \operatorname{tg} a; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(a + 180^\circ k) = \operatorname{ctg} a; k \in \mathbb{Z}$$

Тригонометрические функции синус и косинус являются ограниченными: снизу числом  $-1$ , сверху числом  $1$ , т.е.

$$-1 \leq \sin a \leq 1$$

$$-1 \leq \cos a \leq 1$$

Тригонометрические функции тангенс и котангенс не ограничены.

Теперь построим график функции  $y=\sin x$  (рис. 8). Кривую  $y=\sin x$  построим, разделив часть окружности, находящуюся в I четверти на 4 равные части и через точки деления, проведём прямые, параллельные оси  $x$ . Ординаты точек деления окружности представляют собой синусы соответствующих углов. Первая четверть окружности соответствует углам от 0 до  $2\pi$ . Поэтому на оси  $Ox$  возьмём отрезок  $[0; \pi/2]$  и из точек деления на окружности восстановим перпендикуляры до пересечения с ранее проведёнными горизонтальными прямыми. Точки пересечения соединим плавной линией. На интервале  $[\pi/2; \pi]$  каждое значение аргумента  $x$  можно представить в виде  $x = \pi/2 + \varphi$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Точки оси  $Ox$  с абсциссами  $\pi/2 - \varphi$ ;  $\pi/2 + \varphi$  симметричны относительно прямой  $x = \pi/2$ . Это позволяет получить график функции  $y=\sin x$  в интервале  $[\pi/2; \pi]$  путём симметричного отображения графика этой функции в интервале  $[0; \pi/2]$  относительно прямой  $x = \pi/2$ . Теперь, используя свойство нечётности функции  $y=\sin x$ , достроим её график на промежутке  $[-\pi; 0]$ , симметрично отобразив уже построенную кривую относительно начала координат. Т.к. функция  $\sin x = y$  периодична с периодом  $2\pi$ , то для построения всего графика этой функции достаточно кривую периодически продолжить влево и вправо с периодом  $2\pi$ . Полученная в результате кривая является графиком функции  $\sin x = y$  и называется синусоидой.

- 1) Область определения функции – множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ .
- 2) Множество значений функции – отрезок  $[-1; 1]$
- 3) Функция является периодической с наименьшим положительным периодом  $2\pi(360^\circ)$ , т.е.  $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ ;  $k \in \mathbb{Z}$
- 4) Функция  $y=\sin x$  является нечётной, т.е.  $\sin(-x) = -\sin x$
- 5) Нули функции:  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Наименьшие значения, равные -1, функция принимает при  $x = -\pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Наибольшее значения, равные 1, функция принимает при  $x = \pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 6) Положительные значения функция принимает при  $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Отрицательные значения функция принимает при  $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 7) Функция возрастает при  $x \in (-\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Функция убывает при  $x \in (\pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

Теперь рассмотрим функцию  $y = \cos x$ . Согласно формуле приведения  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ , поэтому график функции  $y = \cos x$  можно получить сдвигом графика функции  $y = \sin x$  на  $\pi/2$  влево вдоль оси  $Ox$  (рис. 8).

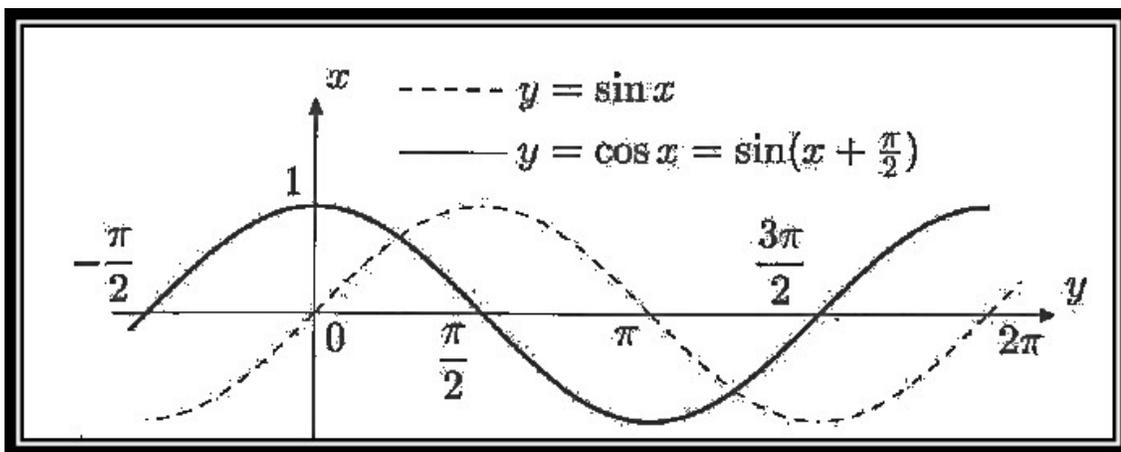


Рис. 8. Графики синуса и косинуса

- 1) Область определения функции – множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$
- 2) Множество значений функции – отрезок  $[1;-1]$ .
- 3) Функция является периодической с наименьшим положительным периодом  $2\pi(360^\circ)$ , т.е.  $\cos(x+2\pi k)=\cos x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 4) Функция  $y=\cos x$  является чётной, т.е.  $\cos(-x)=\cos x$
- 5) Нули функции  $x=\pi/2+\pi k$ ,  
Наибольшие значения, равные 1, функция принимает при  $x \in \pi(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Наименьшие значения, равные -1, функция принимает при  $x \in 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 6) Положительные значения функция принимает при  $x \in (-\pi/2+2\pi k; \pi/2+2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
отрицательные значения функция принимает при  $x \in (\pi/2+2\pi k; 3\pi/2+2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 7) Функция возрастает при  $x \in (-\pi+2\pi k; 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
функция убывает при  $x \in (2\pi k; \pi+2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Теперь рассмотрим функции  $y = \operatorname{tg} x$ ;  $y = \operatorname{ctg} x$ .

Функция  $y=\operatorname{tg} x$  определена при  $x \neq \pi/2+k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  является нечётной и периодической с периодом. Используя эти свойства, строим её график на  $[0; \pi/2)$  и затем выполняем соответствующие преобразования (рис. 9).

Выберем для построения контрольные точки, через которые проведём плавную кривую на координатной плоскости:

$$\operatorname{tg} 0 = 0$$

$$\operatorname{tg} \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

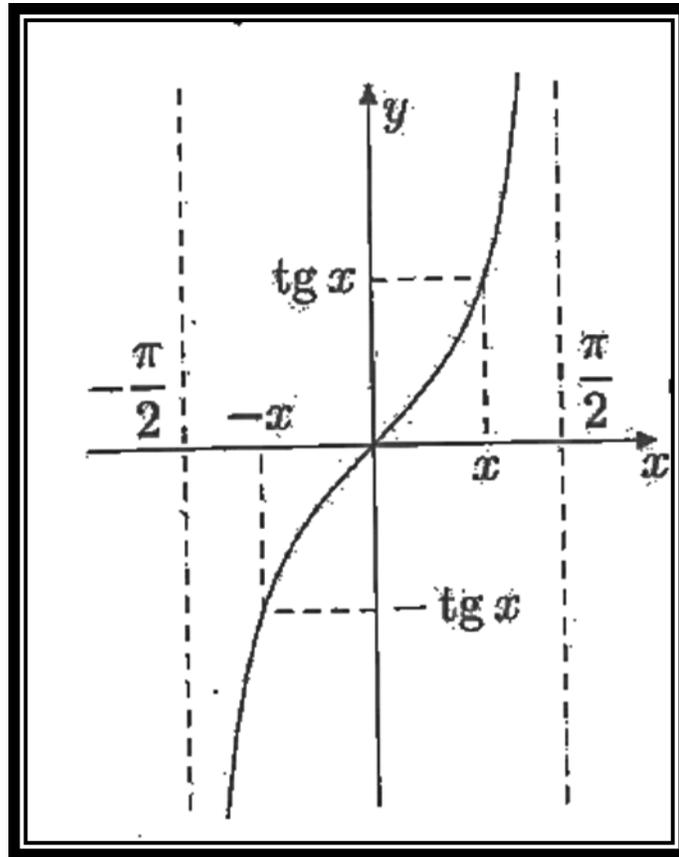
$$\operatorname{tg} \pi/4 = 1$$

$$\operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$$

Теперь для промежутка  $(-\pi/2; 0]$  построим симметричные относительно начала координат значения, получим график на промежутке  $(-\pi/2; \pi/2)$

Значения функции будут повторяться с периодом  $\pi$ , поэтому копируем построенную ветвь графика для каждого промежутка области определения.

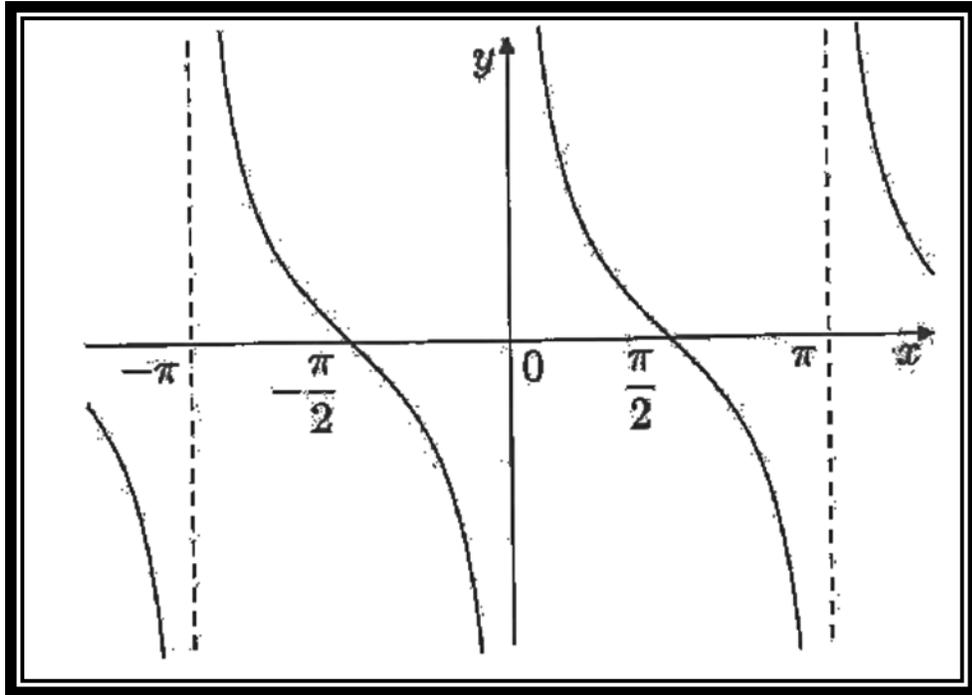
График функции называют тангенсоидой. Главной ветвью графика функции  $y=\operatorname{tg}x$  обычно называют ветвь, заключённую в полосу  $(-\pi/2; \pi/2)$ .



**Рис. 9.** График функции тангенса

- 1) Область определения функции  $-\left(-\pi/2+\pi k; \pi/2+\pi k\right)$ .
- 2) Множество значений функции – множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ .
- 3) Функция является периодической с наименьшим положительным периодом  $\pi(180^\circ)$ , т.е.  $\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg}x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 4) Функция  $\operatorname{tg}x=y$  является нечётной, т.е.  $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$
- 5) Нули функции:  $x=\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 6) Положительные значения функция принимает при  $x \in (\pi k; \pi/2+\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . отрицательные значения функция принимает при  $x \in (-\pi/2+k; k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

По формулам приведения имеем  $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}(\pi/2-x)$  (рис. 10.).



**Рис. 10.** График функции котангенса.

- 1) Область определения функции –  $(\pi k; \pi + \pi k)$ .
- 2) Множество значений функции – множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$
- 3) Функция является периодической с наименьшим положительным периодом  $\pi (180^\circ)$ ,
- 4) т.е.  $\text{ctg}(x + \pi k) = \text{ctg}x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 5) Функция  $y = \text{ctg}x$  является нечётной,
- 6) т.е.  $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x$
- 7) Нули функции:  $x = \pi/2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 8) Положительные значения функция принимает при  $x \in (\pi k; \pi/2 + \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 9) отрицательные значения функция принимает при  $x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 10) Функция убывает при  $x \in (\pi + \pi k; \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## 2. Практическое применение тригонометрических функций

Большинство физических, явлений природы, физиологических процессов закономерностей в музыке, экономике, медицине можно описать с помощью тригонометрических функций. Круговорот воды, морские приливы – отливы, эпидемии, спады и подъёмы экономики и многое, многое другое. В школьной программе мы только слегка прикасаемся к понятию тригонометрической функции, пытаемся получить самое основное представление о том, на чём базируется наука.

В природе многие явления происходят по закону тригонометрических функций, так движение рыб в воде, если зафиксировать точку на хвосте, а потом рассмотреть траекторию движения. То мы обнаружим, что тело рыбы принимает форму кривой, которая напоминает график функции  $y = \text{tg}x$ .

Биоритмы человека можно также рассчитать, используя геометрические функции, так цикл для физического биоритма составляет 23 дня, для эмоционального – 28, а для интеллектуального – 33 дня. Для построения графика биоритмов нужно задать дату рождения и дату начала расчета. Функция описания биоритмов:  $\sin(2\pi(t-t_0))/T_r$ , где  $t$  – текущая дата,  $t_0$  – дата рождения,  $T_r$  – периоды биоритмов.

В медицине часто используют приборы в которых используются ультразвуковые волны, рентгеновские лучи.

Историки полагают, что тригонометрию создали древние астрономы немного позднее её стали использовать в геодезии и архитектуре.

Со временем область применения тригонометрии постоянно расширялась, и в наши дни она включает практически все естественные науки, технику и ряд других областей деятельности. Особенно полезными тригонометрические функции оказались при изучении колебательных процессов.

### 2.1 Тригонометрические функции в колебательных процессах

В технике и окружающем нас мире часто приходится сталкиваться с периодическими (или почти периодическими) процессами, которые повторяются через одинаковые промежутки времени. Такие процессы называются колебательными.

Движение маятника в часах, землетрясение, переменный ток в электрической цепи, процессы радиопередачи и радиоприемы – это совершенно различные, не связанные друг с другом процессы. Каждый из них имеет свои особые причины, но их объединяет один признак – признак общности характера изменения физических величин с течением времени. Эти и многие другие процессы различной физической природы во многих случаях оказывается целесообразным рассматривать как один особый тип физических явлений – колебания.

Колебания - это повторяющиеся во времени изменения состояния системы. Понятие колебаний охватывает очень широкий круг явлений.

Для математического описания колебаний естественно использовать периодические функции. Таких функций много, но две из них - синус и косинус - являются самыми важными. У них много хороших свойств, и они тесно связаны с широким кругом физических явлений.

Поскольку функции синус и косинус получаются друг из друга сдвигом аргумента на  $\pi/2$ , можно ограничиться только одной из них. Мы для определённости будем использовать косинус.

Из большого числа различных колебаний в природе и технике особенно часто встречаются гармонические колебания. Гармоническими называются колебания, при которых

изменения физических величин происходят по закону косинуса или синуса (гармоническому закону).

Гармонические колебания - это колебания, при которых координата зависит от времени по гармоническому закону (рис. 11).



Рис. 11. График гармонического колебания

Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ где}$$

- $A$  - амплитуда колебаний, максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность  $A$  совпадает с размерностью  $x$ ;
- $x$  – отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени  $t$  от среднего за период значения;
- $\omega$ - циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1с;
- $\varphi_0$ - начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания в момент времени  $t = 0$ .

Выражение, стоящее под знаком косинуса или синуса, называются фазой колебания:  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ . Фаза колебаний – это аргумент функции, отсчитываемый от точки перехода значения через ноль к положительному значению. Циклическая частота измеряется в рад/с ( $\omega = 2\pi/T$  или  $\omega = 2\pi\nu$ )  $\nu$ -частота,  $T$ - период.

Гармонический закон вида ( $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ) носит самый общий характер. Он отвечает, например, ситуации, когда с маятником совершили одновременно два начальных действия: отклонили на величину  $x_0$  и придали ему некоторую начальную скорость. Имеются два важных частных случая, когда одно из этих действий не совершалось.

Пусть маятник отклонили, но начальной скорости не сообщали (отпустили без начальной скорости). Ясно, что в этом случае  $x_0 = A$ , поэтому можно предположить  $\varphi_0 = 0$ . Мы получаем закон косинуса:

$$x = A \cos \omega t$$

Допустим теперь, что маятник не отклоняли, но ударом сообщили ему начальную скорость из положения равновесия. В этом случае  $x_0 = 0$ , так что можно положить  $\varphi_0 = -\pi/2$ . Получаем закон синуса:

$$x = A \sin \omega t$$

Колебания могут быть разной природы. В физике рассматриваются не только гармонические колебания, но и механические, электромагнитные и др.

Механические колебания – периодически повторяющееся перемещение материальной точки, при котором она движется по какой-либо траектории поочередно в двух противоположных направлениях относительно положения устойчивого равновесия. Ярким примером механических колебаний является звуковая волна.

### 2.1.1 Звуковая волна

Звуковые волны — механические колебания, распространяющиеся в упругих средах: газах, жидкостях и твёрдых телах, невидимые, но воспринимаемые органами слуха. С точки зрения физики – это периодическое колебание молекул среды, распространяющееся в пространстве. На рисунке 12 мы видим с вами график звуковой волны. Чем выше амплитуда звуковой волны, тем громче сигнал. И это тоже тригонометрическая функция, но выражение будет не  $y = \sin x$ , а гораздо сложнее.

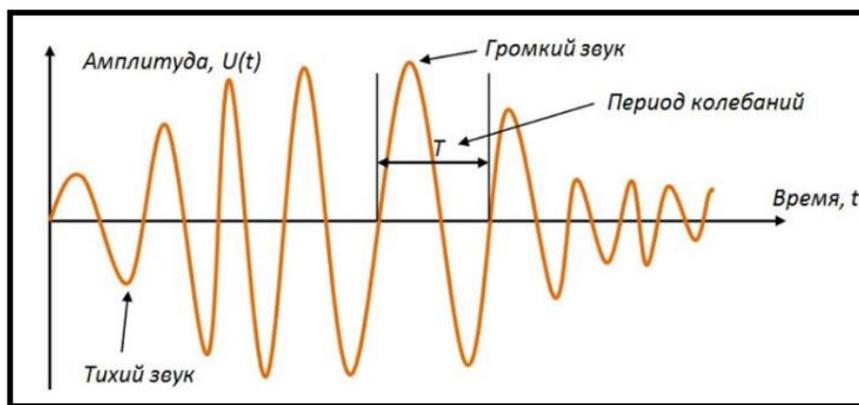


Рис.12. График звуковой волны

При распространении механической волны движение передаётся от одних частиц среды к другим. С передачей движения связана передача энергии. Основное свойство всех волн независимо от их природы состоит в переносе ими энергии без переноса вещества. Энергия поступает от источника, возбуждающего колебания начала шнура, струны и т.д., и распространяется вместе с волной. Через любое поперечное сечение, например шнура, передаётся энергия. Эта энергия складывается из кинетической энергии движения частиц среды и потенциальной энергии их упругой деформации. Постепенное уменьшение амплитуды колебаний частиц при распространении волны связано с превращением части механической энергии во внутреннюю.

При распространении волны частицы среды колеблются в одинаковых фазах, если расстояние между ними равно  $n\lambda$  (где  $n$  – целое число). Между этими частицами фазы колебаний частиц различны.

За один период волна распространяется на расстояние  $\lambda$ , следовательно:

$$\lambda = VT$$

Где  $V$  – скорость волны,  $T$  – период.

При распространении волны вдоль шнура мы наблюдаем два вида периодичности.

Во-первых, каждая частица шнура совершает периодические колебания во времени. В случае гармонических колебаний частота и амплитуда колебаний частиц одинаковы во всех точках шнура. Эти колебания различаются только фазами.

Во-вторых, в каждый момент времени форма волны повторяется на протяжении шнура через отрезки длиной  $\lambda$ .

Теперь выведем уравнение волны, бегущей по длинному тонкому резиновому шнуру, т.е. уравнение, позволяющее определить смещение от положения равновесия любой точки шнура в любой момент времени. При этом не будем учитывать потери механической энергии.

$$s_0 = s_m \sin \omega t,$$

если начальную фазу колебаний считать равной нулю. Здесь  $s_m$  – амплитуда колебаний.

Колебания распространяются вдоль шнура (вдоль оси  $OX$ ) со скоростью  $V$  и в произвольную точку шнура с координатой  $x$  придут спустя время

$$\tau = \frac{x}{V}$$

Эта точка также начнёт совершать гармонические колебания с частотой  $\omega$ , но с запаздыванием на время  $\tau$ . Колебания в точке  $x$  будут происходить с той же амплитудой  $s_m$ , но с другой фазой:

$$s = s_m \sin(\omega(t - \frac{x}{V}))$$

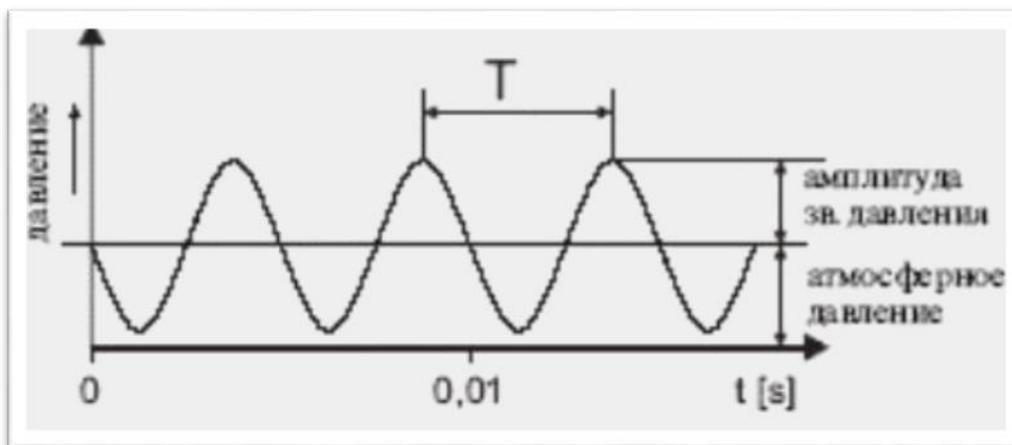
Волнам звукового диапазона свойственно распространяться как в газе, так и в жидкости (продольные волны), и в твердом теле (продольные и поперечные волны). Особенно интересно для науки заниматься изучением распространения звуковых волн в газообразной среде, что по сути есть среда нашего обитания.

Человеческий слух умеет улавливать звуковые волны с частотой от 16 до 20 000 колебаний в секунду (Гц). Люди не могут слышать инфразвук (0,1 – 16 Гц), ультразвук (20 000 Гц — 109 ГГц) и гиперзвук (109 ГГц — 1013 ГГц). Не слышимые человеком звуки находят широкое применение во множестве областей человеческой деятельности.

Когда звук получает распространение в газе, атомы и молекулы испытывают колебания вдоль направления распространения волны, следствием чего становится изменение локальной плотности  $\rho$  и давления  $p$ .

На рисунке 13 мы видим с вами график звуковой волны.

В случае простых гармонических звуковых волн, получающих распространение вдоль оси  $OX$ , изменение давления  $p(x, t)$  имеет зависимость от координаты  $x$  и времени  $t$ , которая записывается так:  $p(x, t) = p_0 \cos(\omega t \pm kx)$ .



**Рис. 13.** Звуковые волны в газах

Колебания имеют следующие характеристики – амплитуда, длина волны и частота. Частота звука является физической величиной, которая равна отношению количества колебаний ко времени, когда они были зафиксированы. Этот показатель позволяет увидеть, какое количество колебания произошло за ту или иную единицу времени.

Длиной волны называют расстояние между двумя точками, в которых колебание принимает одинаковое значение. Измерение волны осуществляется в метрах. Амплитуда представляет собой половину разницы между наиболее высоким и низким значением плотности. Этот показатель легко найти на графике, он будет представлять расстояние от горизонтальной оси графика до самой отдалённой от неё точки.

Ещё одной характеристикой звуковых волн становится период звуковых колебаний. Он показывает отношение времени полных колебаний к их числу, в результате можно узнать, сколько времени потребуется для совершения одного колебания.

Скорость распространения звука показывает, какое расстояние преодолевает звуковая волна в той или иной среде за определённую единицу времени.

Важное значение для человека имеет интенсивность звука. Она демонстрирует, какое количество энергии перенесено звуковой волной через определённую площадь за определённый временной промежуток. Самый маленький уровень интенсивности, различаемой человеческим ухом, составляет 1 децибел (дБ).

Звуковые волны характеризуются широким применением. Чаще всего в обыденной жизни люди встречаются с вещами, которые используют слышимый диапазон (от 16 до 20 000 Гц). К таким изобретениям относятся гитары, пианино, скрипка и другие инструменты: громкоговорители, различные средства связи, развлекательные системы. Сюда можно отнести любое оборудование, использующее способность людей слышать.

Главная особенность ультразвуковых волн состоит в том, что их можно сделать направленными, распространяющимися по определённому направлению от источника. Благодаря этому по отражению ультразвука можно не только найти расстояние, но и узнать, где находится тот предмет, который их отразил. Так можно, например, измерять глубину моря под кораблем.

**Благодаря формулам, которые мы рассмотрели выше, можно решить задачи, встречающиеся на практике.**

**Задача 1:**

На рыболовном судне есть эхолот, который работает на частоте 50 кГц. Сигнал посланный этим прибором вернулся на судно через 10 секунд. Найдите глубину моря, зная что длина звуковой волны равна 0,031 м.

**Решение:**

Т.к. нам дана длина волны, то мы можем найти её скорость через формулу  $\lambda = v/V$ , где  $v$  - скорость,  $V$  - частота. Значит  $v = \lambda V$ ,  $v = 50000 * 0,031 = 1550$  м/с. Теперь мы можем найти глубину,  $S = t * v / 2$ , т.к. звуковая волна проходит до дна и возвращается обратно.  $S = 10 * 1550 / 2 = 7750$  м.

**Ответ:** Значит глубина моря равна 7750 метров

**Задача 2:**

Звук распространяется в воде со скоростью 1450 м/с. Расстояние между ближайшими точками, в которых колебания происходят в противофазе,  $\Delta L = 0,1$  м. Определите частоту звуковой волны.

**Решение:**

Кратчайшее расстояние между точками, в которых колебания происходят в противофазе, равно половине длины волны. Следовательно,  $\lambda = 2\Delta L$ . Частота определяется по формуле  $V = v/\lambda = v/2\Delta L$ . ( $V$  – частота,  $v$  – скорость,  $\lambda$  - длина волны). Значит  $V = 1450/2 * 0,1 = 7250$  Гц.

**Ответ:** Частота звуковой волны будет равна 7250 Гц.

**Задача 3:**

Приёмник, находящийся на расстоянии  $L = 900$  м от источника, улавливает испущенный источником звук через промежуток времени  $t_1 = 3$  с. Колебания в точке  $O$ , где находится

источник, описываются уравнением  $s_0=0,02\sin\pi t$  (м). Определите разность фаз колебаний в точках m и N, находящихся на расстоянии 7,5 м друг от друга, и запишите уравнения колебаний в этих точках. Считайте, что звуковая волна плоская.

**Решение:**

Уравнение плоской волны на расстоянии  $x$  от источника имеет вид  $s=s_m\sin\omega(t-\frac{x}{v})$ . Согласно условию частота  $\omega=40\pi$ . Так как, известно время, за которое звук проходит расстояние от источника до приёмника, определим скорость распространения волны:  $v=L/t_1=300$  м/с. При распространении от источника до приёмника плоской бегущей волны колебания в некоторой точке m согласно условию задачи имеют вид  $s_m=0,02\sin 40\pi(t-\frac{x_m}{300})$  (м), где  $t$  – время, отсчитываемое с момента начала колебаний в точке, где находится источник. Колебания в точке N описываются уравнением

$$s_n = 0,02\sin 40\pi(t - \frac{x_m \pm 7,5}{300}) = 0,02\sin(40\pi(t - \frac{x_m}{300}) \pm \pi)$$

По условию задачи неизвестно, где находится точка N – ближе к источнику тока или дальше от него, чем точка m, поэтому в уравнении стоит знак « $\pm$ ».

**Ответ:** Вне зависимости от положения точки N разность фаз  $\pi$ , колебания происходят в противофазе.

### 2.1.2 Электромагнитная волна

Но не только многие механические колебания происходят по синусоидальному закону. И в электромагнитных волнах возникают синусоидальные колебания.

Электромагнитная волна — это распространение электромагнитного поля. А если конкретнее, то электрическое поле колеблется (меняет свое значение и направление вектор напряженности электрического поля), магнитное поле колеблется (меняет значение и направление вектор магнитной индукции), эти колебания распространяются, и получается электромагнитная волна.

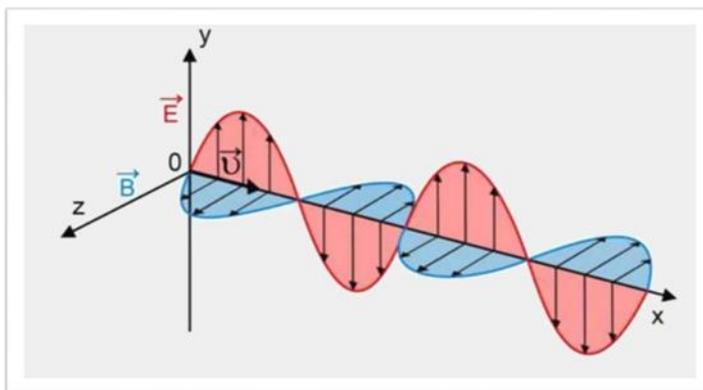
Электромагнитные волны (также называемые электромагнитным излучением) описывают периодическое колебание электрического и магнитного полей. Поля не колеблются беспорядочно вверх и вниз, а связаны друг с другом так, что электрическое поле перпендикулярно магнитному полю

Когда мы помещаем куда-либо положительный или отрицательный электрический заряд, в пространстве вокруг него возникают силы, действующие на другие заряды; например, явление поляризации (разделение электрических зарядов в проводнике). Мы говорим, что электрический заряд создает вокруг себя электрическое поле, и это поле оказывает влияние на другие заряды. Это электрическое поле отвечает за протекание электрического тока.

Если заряд, создающий поле, перемещается, т.е. приближается к одним зарядам и удаляется от других, то действующие силы будут меняться. Из этого следует, что поле будет меняться. Поэтому мы можем иметь дело с полем, постоянным во времени (статическим), или с полем, изменяющимся во времени. Если электрическое поле в проводнике постоянно, то постоянна и сила тока. Если поле меняется, то меняется и электрический ток. То же самое справедливо и для магнитных сил — они возникают в пространстве вокруг магнита, электромагнита или проводника, в котором течет электрический ток. Это означает, что эти тела являются источниками магнитного поля. Если источники поля неподвижны, а электрический ток в обмотках электромагнита или одиночного проводника имеет постоянное значение, то создаваемое поле будет статическим. Движение источников и изменение силы тока создадут переменное поле.

Как видно из вышесказанного, для того чтобы возбудить электромагнитную волну, необходимо где-то индуцировать изменение магнитного или электрического поля. А как узнать, что волна куда-то дошла? Если мы возбудим механическую волну на одном берегу озера, то, когда она достигнет лодки, плывущей по воде на другом берегу, мы заметим, что она начнет подниматься и опускаться. Электромагнитная волна, создаваемая переменными электрическим и магнитным полями, вызывает электрический ток в замкнутой цепи приемника. Наиболее важное различие между обоими типами волн заключается в том, что механическая волна требует материальной среды, в которой она может распространяться. Электромагнитная волна может распространяться в вакууме.

Согласно теории Максвелла, в каждой точке пространства изменение электрического поля создает переменное вихревое магнитное поле, вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции которого лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\vec{E}$  напряженности электрического поля. Механическое уравнение, выражающее эту закономерность, называется первым уравнением Максвелла (рис. 14). Изменение во времени индукции магнитного поля создает переменное вихревое электрическое поле, векторы  $\vec{E}$  напряженности которого лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\vec{B}$ . Математическое уравнение, описывающее эту закономерность, называется вторым уравнением Максвелла. Из уравнения Максвелла следует, что возникшее в какой-либо точке изменение во времени магнитного (или электрического) поля будет перемещаться от одной точки к другой, при этом будут происходить взаимные превращения этих полей, т.е. будет происходить распространение электромагнитных взаимодействий в пространстве.



**Рис. 14.** График электромагнитной волны

В 1865 году Дж. Максвелл теоретически доказал, что электромагнитные колебания распространяются в вакууме с конечной скоростью, равной скорости света:  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

В 1888 году электромагнитные волны были впервые экспериментально обнаружены немецким физиком Генрихом Герцем (1857-1894), что сыграло решающую роль для утверждения максвелловской теории электромагнитных волн.

Что собой представляет электромагнитная волна, легко представить на следующем примере. Если на водную гладь бросить камушек, то на поверхности образуются расходящиеся кругами волны. Они движутся от источника их возникновения (возмущения) с определенной скоростью распространения. Для электромагнитных волн возмущениями являются передвигающиеся в пространстве электрические и магнитные поля. Меняющееся во времени электромагнитное поле обязательно вызывает появление переменного магнитного поля, и наоборот. Эти поля взаимно связаны.

В области видимого спектра глаз ощущает свет по-разному. Электромагнитные колебания с различной длиной волн вызывают ощущение света с различной окраской.

Часть спектра электромагнитных волн используется для целей радиотелевизионного вещания и связи. Источник электромагнитных волн — провод (антенна), в котором происходит колебание электрических зарядов. Процесс формирования полей, начавшийся вблизи провода, постепенно, точку за точкой, захватывает все пространство. Чем выше частота переменного тока, проходящего по проводу и порождающего электрическое или магнитное поле, тем интенсивнее создаваемые проводом радиоволны заданной длины.

Длина электромагнитной волны - расстояние между двумя ближайшими точками, в которых колебания происходят в одинаковых фазах.

$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$  где  $\lambda$  - длина волны;  $c$  - скорость света в вакууме;  $T$  - период колебаний;  $\nu$  - частота колебаний. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

При распространении электромагнитных волн в какой-либо другой среде скорость волны изменяется и длина волны  $\lambda = uT$ , где  $u$  - скорость волны в среде. В атмосфере скорость практически можно принять равной скорости света в вакууме.

По теореме Томсона  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , где  $L$ -индуктивность, а  $C$ -ёмкость.

Скорость  $u$  электромагнитной волны в среде определяется из формулы Максвелла:

$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  где  $\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$ - относительная магнитная проницаемость среды.

Скорость распространения электромагнитных волн в данной среде совпадает со скоростью света в этой среде, что является одним из обоснований электромагнитной природы света.

Основная характеристика электромагнитных волн - это частота их колебаний  $\nu$  (или период  $T$ ). Длина волны меняется при переходе из одной среды в другую, в то время как частота остается неизменной. Электромагнитные волны являются поперечными волнами.

Распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии электромагнитного поля волны, которая переносится в направлении распространения волны, т.е. в направлении вектора  $\nu$ . Наряду с энергией электромагнитная волна обладает импульсом. Если волна поглощается, то ее импульс передается тому объекту, который ее поглощает.

Отсюда следует, что при поглощении электромагнитная волна оказывает давление на преграду.

Гармоническими электромагнитными колебаниями называются периодические изменения заряда, силы тока и напряжения, происходящие по гармоническому – синусоидальному или косинусоидальному – закону.

В электрических цепях это могут быть колебания:

- сила тока –  $i = I_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ ;
- напряжения –  $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ ;
- заряда –  $q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ ;
- ЭДС –  $\epsilon = \epsilon_m \sin \omega t$ .

Где  $\omega$  – циклическая частота,  $\varphi$  – начальная фаза колебаний, амплитудные значение:  $I_m$ - сила тока,  $U_m$  – напряжение,  $q_m$ - заряд.

Если в начальный момент времени заряд имеет максимальное значение, а сила тока равна нулю, то колебания заряда совершаются по закону косинуса с начальной фазой, равной нулю. Если в начальный момент времени заряд равен нулю, а сила тока максимальна, то колебания заряда совершаются по закону синуса.

Плотностью потока электромагнитного излучения  $I$  (интенсивностью электромагнитной волны) называют отношение электромагнитной энергии  $W$ , проходящей за

время  $t$  через перпендикулярную лучам поверхность площадью  $S$ , к произведению площади  $S$  на время  $t$ :

$I = \frac{\Delta W}{S \cdot \Delta t}$  где  $W$  - электромагнитная энергия, прошедшая за время  $t$  через поверхность площадью  $S$ .

Единицей измерения интенсивности электромагнитного излучения  $I$  является ватт на метр [Вт/м].

Плотность потока излучения (интенсивность электромагнитной волны) равна произведению плотности электромагнитной энергии на скорость её распространения:

$I = w \cdot c$ , где  $c$  - магнитная постоянная в СИ.

Интенсивность электромагнитной волны пропорциональна среднему значению произведения модулей векторов  $E$  и  $B$  электромагнитного поля, т.е. пропорциональны квадрату напряженности  $E$ .

В зависимости от Частоты колебаний электромагнитные волны распределяют на несколько видов (рис.15).

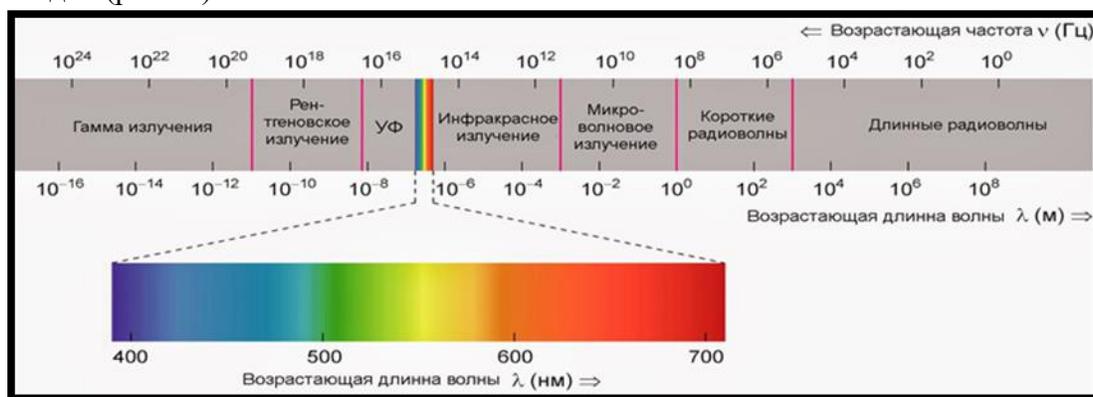


Рис.15. Виды электромагнитных волн

Но мы рассмотрим одну из разновидностей электромагнитных волн - радиоволны.

Радиоволны - это электрические и магнитные поля, меняющиеся во времени. Скорость распространения радиоволн в свободном пространстве составляет 300000 км/с. Исходя из этого, можно определить длину радиоволны (м).

$\lambda = 300/f$ , где  $f$  - частота (МГц)

Скорость удаления радиоволн от антенны радиостанции равна скорости света: 300 000 км/с, что почти в миллион раз быстрее распространения звука в воздухе. Это значит, что если на Московской радиовещательной станции в некоторый момент времени включили передатчик, то ее радиоволны меньше чем за 1 /30 с дойдут до Владивостока, а звук за это время успеет распространиться всего, лишь на 10 - 11 м.

Радиоволны распространяются не только в воздухе, но и там, где его нет, например, в космическом пространстве. Этим они отличаются от звуковых волн, для которых совершенно необходим воздух или какая-либо другая плотная среда, например вода. Скорость распространения электромагнитных волн в данной среде совпадает со скоростью света в этой среде, что является одним из обоснований электромагнитной природы света.

**Благодаря формулам, которые мы рассмотрели выше можно решить задачи, встречающиеся на практике.**

### **Задача 1:**

В каком диапазоне длин волн может работать радиоприёмник, если ёмкость конденсатора его колебательного контура изменяется от  $2 \cdot 10^{-10}$  до  $8 \cdot 10^{-10}$  Ф, а индуктивность катушки –  $5 \cdot 10^{-5}$  до  $2 \cdot 10^{-4}$  Гн.

### **Решение:**

Настроить контур - это значит подобрать его параметры таким образом, чтобы собственная частота колебаний была равна частоте принимаемой волны.

Длина волны, принимаемой контуром, определяется из соотношения  $\lambda = vT$ , где  $v$  – скорость равная  $3 \cdot 10^8$  м/с,  $T$  - период колебаний.

Период колебаний  $T$  определяется по формуле Томсона  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , откуда  $\lambda_1 = v2\pi\sqrt{L_1 C_1} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} \approx 188$  м,

$\lambda_2 = v2\pi\sqrt{L_2 \cdot C_2} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^{-10}} \approx 754$  м.

**Ответ:** Таким образом, радиоприёмник может принимать волны в диапазоне от 188 до 754 м.

### **Задача 2:**

Определить длину электромагнитных волн в воздухе, излучаемых колебательным контуром с ёмкостью 3 нФ и индуктивностью 0,012 Гн. Активное сопротивление контура принять равным нулю.

### **Решение:**

Применим формулу для периода колебаний колебательного контура:  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ . А теперь вспомним, как длина волны связана с периодом колебаний:  $\lambda = vT$ . И отсюда следует, что:

$\lambda = v2\pi\sqrt{LC} = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{0,012 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 11,304 \cdot 10^3 = 11304$  м.

**Ответ:** длина электромагнитных волн равна 11304 м.

## 2.2 Приборы, в которых используются физические явления на основе тригонометрических функций

Давайте рассмотрим с вами приборы, в которых используются звуковая и электромагнитная волны. Этих приборов достаточно много, но мы с вами рассмотрим наиболее важные с точки зрения практического применения, такие как эхолот и другие.

### 2.2.1 Приборы, работающие на звуковой волне Прибор 1. Эхолот

Одним из интересных приборов, в котором используется звуковая волна является эхолот.

Эхолот - это прибор, используемый для обнаружения рыбы под водой путем обнаружения отраженных импульсов звуковой энергии, как в гидролокаторе (рис. 16).



Рис. 16. Эхолот

Работу эхолота можно описать так. Электрический импульс от передатчика преобразуется преобразователем в звуковую волну (как мы знаем, звуковая волна имеет график синусоиды) и посылается в воду. Если эта волна ударяется о какой-то предмет, она отражается. Эхо попадает в преобразователь, который преобразует его обратно в электрический сигнал, усиливается приемником и подаваемый на экран. Помимо него, на экране отображаются эхосигналы от всех встретившихся на пути объектов между поверхностью воды и дном. Зная скорость прохождения звука в воде и время, требующееся для приема эхо, прибор может вычислить глубину воды и определить наличие в ней рыбы (рис. 17).

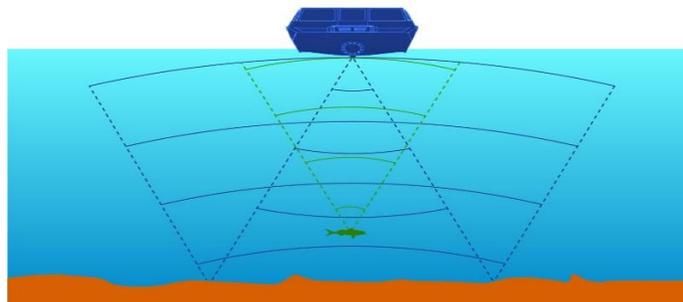


Рис. 17. Принцип работы эхолота

Поскольку скорость звука в воде является величиной постоянной (около 1,575 км/сек), то, замерив промежуток времени между передачей сигнала и получением эхо, можно вычислить расстояние до предмета. Этот процесс повторяется много раз в секунду. Частоты, на которых работает эхолот, находятся в пределах звукового спектра, ни человек, ни рыба их не ощущают.

В большинстве эхолотов в настоящее время используется частота 192-200кГц, и лишь некоторые работают на частоте 50 кГц.

У каждой из этих частот есть свои преимущества, однако почти во всех случаях в пресной воде и в большинстве случаев в соленой воде используют диапазон от 192 до 200 кГц. Он обеспечивает наивысшую детальность, лучше всего работает в мелководье и когда судно на ходу, дает меньше шумов и лишних эхо. Кроме того, на более высоких частотах выше разрешение объекта. Например, две плывущие рядом рыбины будут отображены на экране как два отдельных объекта, а не как одно сплошное «пятно».

В некоторых случаях оптимальной частотой является частота 50 кГц. Как правило, эхолот с рабочей частотой 50 кГц (при равных условиях и мощности) способен проникать на большие глубины, нежели эхолоты, работающие на более высоких частотах. Это связано с естественной способностью воды поглощать звуковые волны. Звуки более высокой частоты поглощаются быстрее, чем звуки более низкой частоты.

Преобразователь выполняет функцию антенны эхолота. Он преобразует электроэнергию от передатчика в звуковой сигнал высокой частоты. Звуковая волна от преобразователя проходит сквозь воду и отражается от находящегося в воде объекта. Когда до преобразователя докатывается ответное эхо, он преобразует звук обратно в электрический сигнал, который посылается на приемник эхолота. Частота преобразователя должна совпадать с частотой эхолота.

В качестве активного элемента в преобразователе используется искусственный кристалл (цирконат свинца или титанат бария). На обе стороны кристалла наносится проводящее покрытие. К нему привариваются проводки, чтобы кристаллы можно было подсоединить к кабелю преобразователя. От формы кристалла зависит и его частота, и угол его излучения. У круглых кристаллов (используемых в большинстве эхолотов) частота зависит от толщины кристалла, а от его диаметра зависит угол излучения или угол охвата.

Преобразователь фокусирует звук в луч. Чем дальше вглубь идет звуковой импульс, испускаемый излучателем, тем шире его охват. Если бы вы изобразили его на листе миллиметровки, вы бы увидели, что он образует конус, поэтому угол излучения еще называют углом конуса. Звуковой сигнал наиболее силен вдоль центральной линии (оси) конуса. Чтобы измерить угол излучения преобразователя, мощность излучения измеряют в центре или на оси конуса, затем сравнивают с мощностью по мере удаления от центра. Когда мощность падает наполовину (-3 дБ), измеряют угол относительно оси. Угол в диапазоне от -3дБ с одной стороны оси до -3 дБ с другой стороны оси называют углом излучения (конуса) (рис. 18).

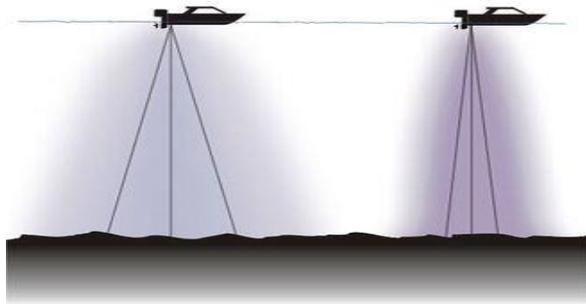


Рис. 18. Угол излучения эхолота

Отметка половинной мощности  $-3$  дБ считается стандартной в электронной промышленности, и большинство производителей измеряют угол излучения именно таким образом, хотя некоторые берут за основу отметку  $-10$  дБ, где мощность излучения составляет  $1/10$  от мощности, имеющей место на оси. Угол получается более широким, поскольку замер производится в точке, расположенной гораздо дальше от оси. Эффективность работы преобразователя остается прежней, немного отличается лишь метод измерения. К примеру, на отметке  $-3$  дБ угол излучения преобразователя составляет  $8^\circ$ , а на отметке  $-10$  дБ он составляет  $16^\circ$ .

Рыбы обозначаются на экране дугами из-за соотношения между рыбой и углом излучения (конусом) преобразователя при прохождении судна над рыбой. Как только рыба пересекает линию конуса, на экране активируется пиксель. При прохождении судна над рыбой расстояние до нее сокращается, при этом глубина нахождения рыбы (расстояние по вертикали между судном и рыбой), отображаемая на экране, становится меньше (дуга идет вверх). Когда центр конуса оказывается непосредственно над рыбой, заканчивается формирование первой половины дуги. В этот момент рыба находится к судну ближе всего, сигнал усиливается, и дуга становится толще. По мере увеличения расстояния между судном и рыбой дуга на экране идет вниз и обрывается после того, как рыба выплывает из конуса (т.е. зоны излучения) эхолота.

Скорость прокрутки или обновления экрана также влияет на то, как отображаются дуги рыб на экране. Чем выше скорость обновления, тем больше пикселей активируется по мере прохождения рыбы в конусе и тем выше качество изображения дуги.

Самая мелкая рыбешка вообще может не отображаться в виде дуг. Из-за различных факторов состояния воды, таких, как сильные помехи от ее поверхности, термоклины и т.д., бывает, что и максимальной чувствительности эхолота недостаточно, чтобы на экране показались дуги рыб.

Если рыба не проходит прямо по центру конуса, дуга получается менее отчетливой. Поскольку рыба попадает в конус лишь на короткое время, эхосигналов меньше, а те, что все-таки есть, слабее. Эта одна из причин, по которой в условиях мелководья эхолоту сложнее отображать на экране дуги рыб. Угол излучения оказывается слишком узок для того, чтобы сигнал успел приобрести форму дуги.

## Прибор 2. Ультразвуковой дальномер

Ультразвуковой дальномер определяет расстояние до объектов точно так же, как это делают дельфины или летучие мыши (рис. 19). Он генерирует звуковые импульсы на частоте  $40$  кГц и слушает эхо. По времени распространения звуковой волны туда и обратно можно однозначно определить расстояние до объекта.



Рис. 19. Ультразвуковой дальномер

В отличие от инфракрасных дальномеров, на показания ультразвукового дальномера не влияют засветки от солнца или цвет объекта. Но могут возникнуть трудности с определением расстояния до пушистых или очень тонких предметов.

При отражении звука от препятствия мы слышим эхо. Летучая мышь использует отражение ультразвуковых волн для полётов в темноте и для охоты на насекомых. По такому же принципу работает эхолот, с помощью которого измеряется глубина воды под днищем корабля или поиск рыбы.

Принцип передачи и приема ультразвуковой энергии лежит в основе многих очень популярных ультразвуковых датчиков и детекторов скорости. Ультразвуковые волны являются механическими акустическими волнами, частота которых лежит за пределами слышимости человеческого уха — более 20 кГц. Однако сигналы этих частот воспринимаются некоторыми животными: собаками, кошками, грызунами и насекомыми. А некоторые виды млекопитающих, таких как летучие мыши и дельфины, общаются друг с другом ультразвуковыми сигналами.

Кристаллы некоторых материалов (таких как кварц) способны совершать очень быстрые колебания, при прохождении через них электричества. Это, так называемый, обратный пьезоэффект. Во время вибрации, они толкают и тянут воздух вокруг себя, производя, тем самым, ультразвуковые волны. Устройства, которые производят ультразвуковые волны с помощью пьезоэлектричества известны как пьезоэлектрические преобразователи. Пьезоэлектрические кристаллы также работают в обратном порядке: если ультразвуковые волны, распространяясь по воздуху, сталкиваются с пьезоэлектрическим кристаллом, слегка деформируют его поверхность, в результате чего в кристалле возникает электрическое поле. Итак, если подключить пьезоэлектрический кристалл к измерителю электрического напряжения, мы получим детектор ультразвука.

Используя пьезоэлектрические или магнитострикционные преобразователи, мы можем создать устройство, измеряющее расстояние до объектов — ультразвуковой дальномер, который работает следующим образом.

В момент измерения мы создаем электрическое колебание при помощи генератора, которое преобразуясь (например, при помощи пьезокристалла) в ультразвуковую волну, излучается в окружающее пространство. Эта волна отражается от препятствия и возвращается как эхо в приемник (также можно использовать пьезокристалл) (рис.20). Измеряя время между посылкой и приемом нашего отраженного сигнала  $\Delta t$  и, зная скорость звуковой волны  $v$  распространяемой в данной среде (для воздуха это величина около 340 м/с), мы можем вычислить расстояние  $d$  до препятствия:  $d = \frac{v \Delta t}{2}$

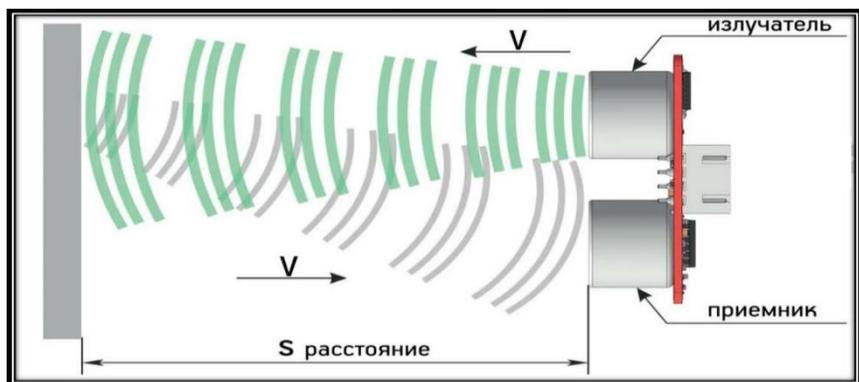


Рис. 20. Принцип работы ультразвукового дальномера

Повышением частоты (снижением длины) излучаемой волны можно увеличивать чувствительность прибора к более мелким объектам.

Чем меньше объект, тем меньшую отражающую поверхность он имеет. Это приводит к более слабому отраженному сигналу.

При высокой влажности (дождь, снег) сигнал также может частично отражаться от капель (снежинок), что приводит к паразитному эхо-сигналу.

Сильный ветер может повлиять на распространение волн (буквально «сдуть»), что также приводит к ошибке измерений.

### Прибор 3. Ультразвуковой расходомер

Ультразвуковыми расходомерами называют расходомеры, принцип работы которых основан в прохождении ультразвуковой волны через поток жидкости или газа (рис. 21). Ультразвуковые расходомеры работают в диапазоне частот от 20кГц до 1000 МГц.



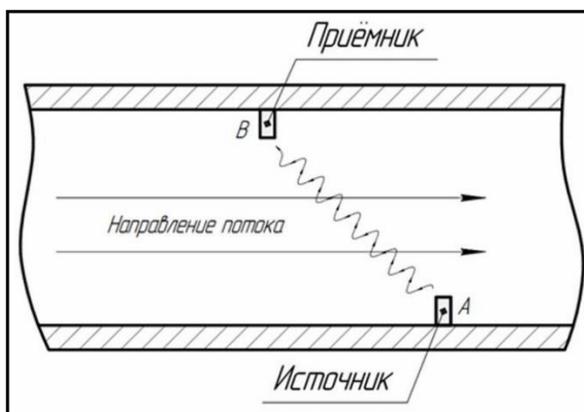
Рис.21. Ультразвуковой расходомер

Для прохождения волны и её интерпретации необходимы приемник и передатчик, которые обладают пьезоэлектрическим эффектом (Пьезоэлектрический эффект — эффект возникновения поляризации диэлектрика под действием механических напряжений (прямой пьезоэлектрический эффект). Существует и обратный пьезоэлектрический эффект — возникновение механических деформаций под действием электрического поля. При прямом пьезоэффекте деформация пьезоэлектрического образца приводит к возникновению электрического напряжения между поверхностями деформируемого твердого тела, при обратном пьезоэффекте приложение напряжения к телу вызывает его деформацию). Таким эффектом обладают следующие материалы кварц, турмалин, тартрата калия, сульфата лития, титанат бария, цирконаттитаната свинца. Помещая пьезоэлектрический кристалл в электрическое поле упругая деформация вызывает уменьшение или увеличение его длины в соответствии с величиной и направлением полярности поля.

Для контроля расхода и учёта воды и теплоносителя с 60-х годов прошлого века в промышленности применяются ультразвуковые (акустические) расходомеры. Неоспоримые достоинства ультразвуковых расходомеров: малое или полное отсутствие гидравлического сопротивления, надёжность (так как нет подвижных механических элементов), высокая точность, быстродействие, помехозащищённость — определили их широкое распространение.

Принцип действия ультразвуковых расходомеров основан на измерении разницы во времени прохождения сигнала. При этом два ультразвуковых сенсора, расположенные по диагонали напротив друг друга, функционируют попеременно как излучатель и приёмник. Таким образом, акустический сигнал, поочередно генерируемый обоими сенсорами, ускоряется, когда направлен по потоку, и замедляется, когда направлен против потока. Разница

во времени, возникающая вследствие прохождения сигнала по измерительному каналу в обоих направлениях, прямо пропорциональна средней скорости потока, на основании которой можно затем рассчитать объёмный расход. А использование нескольких акустических каналов позволяет компенсировать искажения профиля потока (рис. 22).



**Рис.22.** Принцип работы ультразвукового расходомера

Преобразователь ультразвукового расходомера состоит из отрезка трубы, на котором установлены пьезоэлементы. Диаметр пьезоэлемента находится в пределах 5-20 миллиметров, а его толщина выбирается в зависимости от частоты. В частотных и время-импульсных расходомерах для повышения точности измерений используют частоты 5-20 МГц. Обычно в жидкостях применяются частоты 50 кГц — 2 МГц. В газовых средах необходимо уменьшать частоты до сотен и десятков кГц, это вызвано сложностью создания в газах интенсивных акустических колебаний, особенно высокой частоты.

В большинстве случаев плоскости излучающих и приемных пьезоэлементов расположены под некоторым углом к оси трубы. Прохождение ультразвука направленного по потоку и против него характеризуется значением скорости прохождения требуемого расстояния и время затраченное на его прохождение.

Таким образом, разность времен прямо пропорциональна скорости.

По числу акустических каналов ультразвуковые расходомеры подразделяются на однолучевые или одноканальные, двухлучевые или двухканальные и многолучевые или многоканальные. У первых имеются только два пьезоэлемента, каждый из которых по очереди выполняет функции излучения и приема. Их существенное достоинство — отсутствие пространственной асимметрии акустических каналов, зависящих от различия их геометрических размеров, а также различия температур и концентрации потока в них. Вторые имеют два излучателя и два приемника, образующих два независимых акустических канала, которые располагаются параллельно или перекрещиваются друг с другом. Многоканальные применяются при необходимости измерения расхода деформированных потоков или же для достижения повышенной точности, в частности, в случае применения ультразвукового расходомера в качестве образцового.

Фазовыми называют ультразвуковые расходомеры, основанные на зависимости фазовых сдвигов ультразвуковых колебаний, возникающих на приемных пьезоэлементах, от разности времен прохождения этими колебаниями одного и того же расстояния по потоку движущейся жидкости или газа и против него. Действительно, при условии, что начальные фазы обоих колебаний, имеющих период и частоту, совершенно одинаковы.

В расходомере, разработанном для контроля нефти и нефтепродуктов, переключение пьезоэлементов с излучения на прием производится с помощью мультивибратора, управляющего модуляторами задающего генератора. Особый генератор создает

синусоидальное напряжение низкой частоты, из которого в триггерном устройстве образуются прямоугольные импульсы. Задний фронт этих импульсов служит для включения мультивибратора.

Ввиду сложности большинства схем переключения пьезоэлементов с излучения на прием созданы фазовые одноканальные расходомеры, не требующие переключения. В таких расходомерах оба пьезоэлемента непрерывно излучают ультразвуковые колебания двух разных, но весьма близких частот, например, 6 МГц и 6,01 МГц.

Частотными называются ультразвуковые расходомеры, основанные на зависимости разности частот повторения коротких импульсов или пакетов ультразвуковых колебаний от разности времен прохождения этими колебаниями одного и того же расстояния по потоку движущейся жидкости или газа и против него.

Времяимпульсными называются ультразвуковые расходомеры, в которых измеряется разность времен перемещения коротких импульсов по направлению потока и против него на длине пути.

Времяимпульсные расходомеры в большинстве случаев одноканальные и работают на очень коротких импульсах длительностью 0,1-0,2 мкс, посылаемых навстречу друг другу поочередно или одновременно с частотой, например, 0,5 кГц.

#### **Прибор 4. Шумомер**

Определение уровня шума является важной задачей во многих областях, таких как производство или научные исследования. Даже в быту нередко возникает такая необходимость. Сегодня человек довольно много времени проводит в шумных обстановках. А высокий уровень звука, как известно, может негативно влиять на здоровье, и это, не говоря уже об ощущаемом дискомфорте.

Для проведения подобного рода замеров был создан специальный прибор, называемый шумомером (рис. 23).



**Рис.23. Шумомер**

Шумомер является электронным аппаратом, который позволяет измерять уровень звукового давления. Говоря простым языком, он показывает вам уровень шума в децибелах. Его можно отнести к высокоточным приборам.

Сильный шум негативно влияет не только на людей, но и на окружение. Из-за него человек может испытывать головные боли, а также он наносит значительный вред барабанным перепонкам.

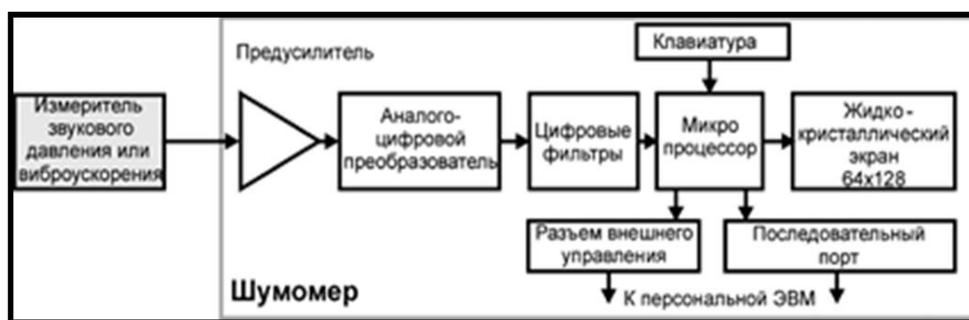
Конструкция шумомера не слишком сложна. Чтобы понимать, по каким принципам он функционирует, нужно знать, из чего состоит. Вот основные элементы, которые содержатся в данном аппарате:

- 1) микрофон ненаправленного типа;
- 2) усилитель;
- 3) фильтры;
- 4) детектор;
- 5) индикатор.

Шум представляет собой беспорядочные колебания, отличающиеся друг от друга по частоте. Шумомер улавливает их с помощью микрофона, который преобразовывает эти колебания в электрический сигнал. После обработки усилителем он проходит через корректирующие фильтры. Они отвечают за выделение определенных частот, чтобы измерить именно их. Фильтры разделяют на 4 вида:

- 1) фильтры А – для низкого уровня звукового давления;
- 2) фильтры В – для среднего уровня звукового давления;
- 3) фильтры С – для высокого уровня звукового давления;
- 4) фильтры D – для крайне высокого уровня давления.

Фильтры позволяют отсеять лишние звуки, которые не воспринимаются человеческим ухом. Затем индикатор аппарата получает измеренные данные. Полученные результаты выводятся на экран шумомера (рис. 24).



**Рис.24.** Схема устройства шумомера

Их можно разделить на 4 класса, в зависимости от точности измерений:

- 1) Класс 0 – в него входят самые точные шумомеры с диапазоном от 20 Гц до 18 кГц. Они предназначены для использования в лабораторных условиях. Как правило, данный класс применяется для контроля других создаваемых шумомеров и близких по назначению устройств.
- 2) Класс 1 – эти приборы практически не уступают предыдущему классу по точности, так как имеют точно такой же диапазон, но более простое строение. Они применяются для измерения уровней шума на различных производствах. При этом погрешность, как и в предыдущем случае, минимальна.
- 3) Класс 2 – включает наиболее распространенные шумомеры. Их диапазон составляет от 20 Гц до 8 кГц. Этого бывает достаточно для определения условий труда на не слишком вредных производствах. Также с их помощью можно делать различные технические замеры на стройках и при техосмотре транспорта.
- 4) Класс 3 – можно так же назвать его бытовым. Включает в себя самые простые и дешевые аппараты, которые используются для замеров шума в жилых зонах, а также для проверки

санитарных норм. Третий класс позволяет получить лишь приблизительные показания. Он отличается от второго узким диапазоном от 31,5 Гц до 8 кГц.

### Прибор 5. Аппарат УЗИ-диагностики

Ультразвуковое исследование – это метод диагностики, который используют для оценки практически всех систем и органов человека. Это самый популярный, простой и информативный метод исследования и постановки диагнозов, а также оценки динамики лечения.

УЗИ, или ультразвуковая диагностика, известна достаточно давно, у всех на слуху, и успешно используется в различных областях медицины – в гастроэнтерологии и гепатологии, гинекологии, акушерстве, кардиологии, исследовании вен и артерий, щитовидной и молочных желез, в урологии.

Принцип ее действия основан на эхолокации: датчик, который располагается на коже пациента, является одновременно и излучателем, и приемником ультразвука. Ультразвук, выйдя из датчика, проникает через кожу и отражается в той или иной степени от плотных органов, таких, например, как печень или почки. Отраженный звук регистрируется тем же датчиком и преобразуется аппаратом УЗИ в изображение. Этим обусловлена безопасность УЗИ (излучается всего лишь звук, хоть и не слышимый человеческим ухом из-за очень высокой частоты колебаний) (рис. 25). Метод абсолютно безопасен даже при беременности и у маленьких детей. Исследование занимает непродолжительное время и результат известен сразу. Единственный недостаток – не все органы человеческого тела можно исследовать с помощью УЗИ, а только плотные, которые не содержат воздуха (например, печень, селезенка, почки или поджелудочная железа), поскольку звук «воздушными» органами (такими, например, как легкие) не отражается.

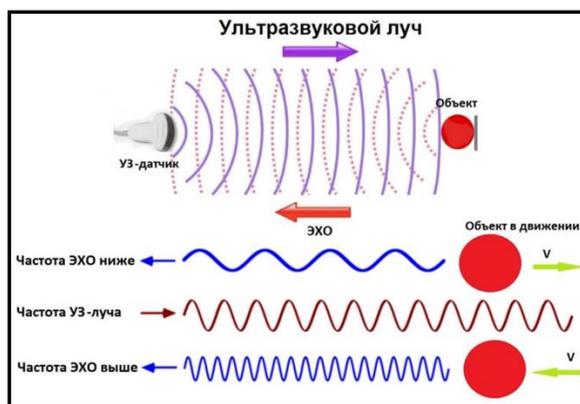


Рис.25. Принцип работы УЗИ аппарата

Виды ультразвуковой диагностики в зависимости от получаемого изображения:

- 1) 2D – двумерное изображение - самый распространенный вид УЗИ. Режим показывает анатомическую структуру, как на поперечном разрезе при томографии
- 2) 3D –УЗИ, которое позволяет получить трехмерное изображение, отображающий объемную картинку.
- 3) 4D – показывает объемное изображение еще и во времени.

## 2.2.2 Приборы, работающие на электромагнитных волнах

### Прибор 1. Радиопередатчик

Одним из видов электромагнитных волн являются радиоволны. И распространённым прибором, где используется радиоволны является радиопередатчик (рис. 26).



Рис. 26. Радиопередатчик

Радиопередатчик, устройство, служащее для получения модулированных электрических колебаний в диапазоне радиочастот с целью их последующего излучения в виде электромагнитных волн.

Схема и конструкция радиопередатчика зависят от различных факторов: назначения, диапазона рабочих частот, мощности и т.д. Тем не менее можно выделить некоторые типовые блоки, которые однако имеются в большинстве передатчиков.

Структурная схема (рис. 27) передатчика определяется его основными общими функциональными возможностями, к которым относятся:

- 1) Получение высокочастотных колебаний требуемой частоты и мощности;
- 2) Модуляция высокочастотных колебаний передаваемым сигналом;
- 3) Фильтрация гармоник (гармоники-частотные составляющие сигнала, кратные его основной частоте. Обычно, гармоники бывают выше основной частоты. Во сколько раз гармоника больше основной частоты-такой её номер) и прочих колебаний, частоты которых выходят за пределы необходимой полосы излучения и могут создать помехи другим радиостанциям;
- 4) Излучение колебаний через антенну.

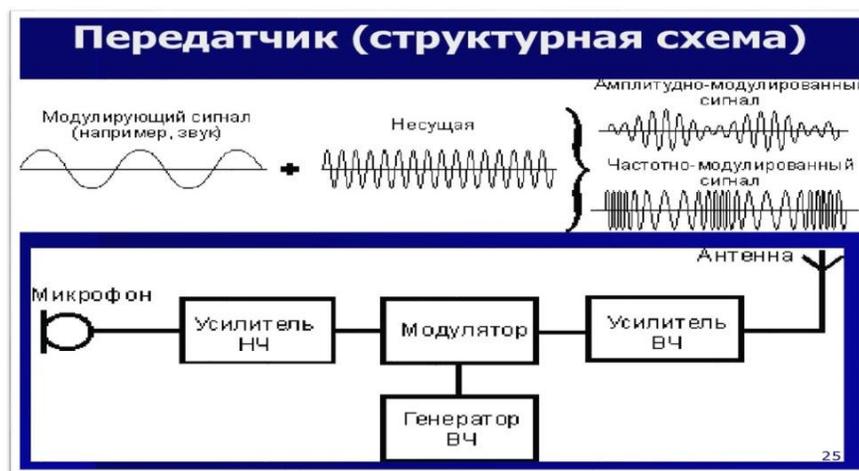


Рис. 27. Принцип работы радиопередатчика

Генератор высокой частоты, часто называемый задающим или опорным генератором, служит для получения высокочастотных колебаний, частота которых соответствует высоким требованиям к точности и стабильности частоты радиопередатчиков.

Синтезатор преобразует частоту колебаний опорного генератора, которая обычно постоянна, в любую другую частоту, которая в данное время необходима для радиосвязи или вещания. Стабильность частоты при этом преобразовании не должна существенно ухудшаться. В отдельных случаях синтезатор частоты не нужен, например, если генератор непосредственно создает колебания нужной частоты. Однако с синтезатором легче обеспечить требуемую высокую точность и стабильность частоты, так как он, во-первых, работает на более низкой частоте, на которой легче обеспечить требуемую стабильность; во-вторых, он работает на фиксированной частоте. Кроме того, современные синтезаторы приспособлены для дистанционного или автоматического управления синтезируемой частотой, что облегчает общую автоматизацию передатчика.

Промежуточный усилитель высокой частоты, следующий за синтезатором, необходим по следующим причинам:

- 1) Благодаря промежуточному усилителю с достаточно большим коэффициентом усиления от опорного генератора и синтезатора не требуется значительной мощности.
- 2) Применение промежуточного усилителя между синтезатором и мощным усилителем ослабляет влияние на генератор и синтезатор возможных регулировок в мощных каскадах передатчика и в антенне.

Усилитель мощности (его называют генератором с внешним возбуждением) увеличивает мощность радиосигнала до уровня, определяемого требованиями системы радиосвязи.

Выходная цепь служит для передачи усиленных колебаний в антенну, для фильтрации высокочастотных колебаний и для согласования выхода мощного оконечного усилителя с антенной, т.е. для обеспечения условий максимальной передачи мощности.

Модулятор служит для модуляции несущих высокочастотных колебаний передатчика передаваемым сигналом. Для этого модулятор воздействует в зависимости от особенностей передатчика и вида модуляции (амплитудная, частотная, однополосная и др.) на один или несколько блоков.

Устройство электропитания обеспечивает подведение ко всем блокам токов и напряжений, необходимых для нормальной работы входящих в их состав транзисторов, ламп и прочих электронных элементов, а также систем автоматического управления, устройств защиты от аварийных режимов и прочих вспомогательных цепей и устройств.

Радиопередатчики диапазонов километровых, гектометровых и декаметровых волн обычно размещаются группами на специальных предприятиях – передающих радиостанциях. При большом числе передатчиков радиостанции называются радиоцентрами. Радиовещательные передатчики метровых и дециметровых волн, как правило, размещаются вместе с передатчиками телевизионного вещания.

Радиопередатчики, помимо их использования в радиовещании, являются необходимой составной частью многих электронных устройств, которые обмениваются информацией друг с другом по радио, например, мобильные телефоны, беспроводные компьютерные сети, Bluetooth-совместимые устройства, рации на самолётах, кораблях и космических радиолокационных установках, а также навигационные маяки

Самостоятельно радиопередатчики используются в тех областях, где не нужен приём информации в месте её передачи - сигналы точного времени, разнообразные навигационные радиомаяки для определения местоположения объектов,

многопозиционная радиолокация, радиовещание, телеметрия, дистанционное управление и др.

### Прибор 2. Микроволновая печь

Следующим прибором, где используются электромагнитные волны – это микроволновая печь (рис. 28).



Рис. 28. Микроволновая печь

Как известно, полярные молекулы (иначе называемые диполями (диполь – это два разноимённых, равных по величине точечных заряда, расположенных на фиксированном расстоянии друг от друга.)) ориентируются в пространстве вдоль силовых линий магнитного поля.

Если такую молекулу поместить в переменное магнитное поле, она, обладая дипольным моментом, начнет поворачиваться, следуя за его магнитными линиями. Чем выше частота смены направления силовыми линиями поля, тем чаще молекула будет менять свое положение.

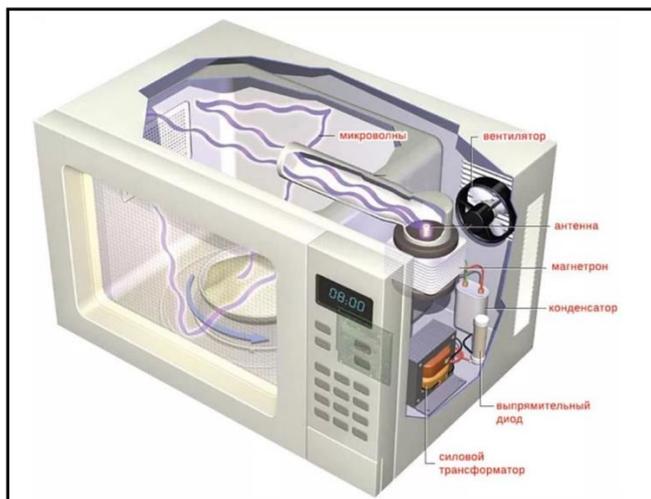
Ярким представителем диполя является молекула воды, самого распространенного на Земле вещества. Приложение переменного магнитного поля к молекулам воды заставляет их находиться в постоянном движении, обусловленном дипольным моментом.

Из-за сил трения, возникающих между соседними молекулами, выделяется тепло и, соответственно, повышается температура материала, помещенного в электромагнитное поле. Причем чем быстрее и чаще меняется направление поля, тем быстрее происходит внутренний нагрев. Такое поведение молекулы воды является основополагающим принципом готовки в микроволновой печи.

Любой продукт содержит то или иное количество воды, поэтому если поместить его под действие электромагнитных волн, это гарантированно вызовет его нагрев. Причем продукт нагревается изнутри, а не снаружи, как это происходит при традиционных способах готовки. СВЧ-волны проникают вглубь продукта примерно на 2,5-3 см, а остальной нагрев происходит за счет теплового движения молекул.

Магнетрон - узел, генерирующий радиоволны высокой частоты, это вакуумная электролампа. Узел состоит из толстостенного анода, как правило, выполненного из медного сплава и имеющего в своей конструкции камеры резонаторов, а также катода с дополнительной обмоткой, изготовленной из сплава вольфрама и тория. Катод осуществляет эмиссию электронов в вакуумную среду устройства. Для ускорения процесса отделения электронов с поверхности катода, обмотка нагревается путем подачи на нее небольшого напряжения.

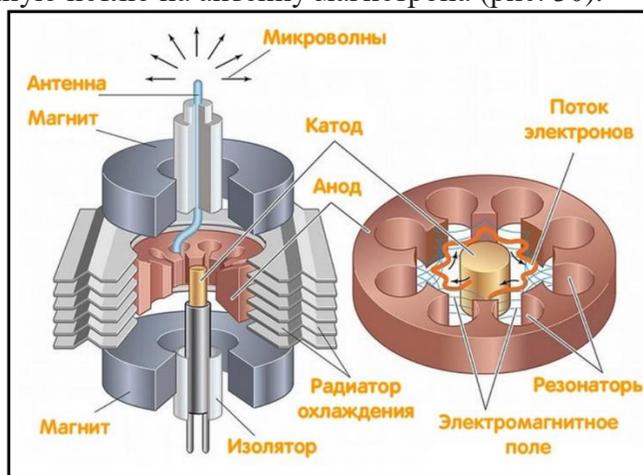
Колба магнетрона с обоих торцов заключена в постоянные магниты, создающие внутри нее постоянное магнитное поле (рис. 29).



**Рис. 29.** Устройство микроволновой печи

Возникновение волн сверхвысокой частоты происходит при взаимодействии перпендикулярных друг другу постоянного магнитного поля, сформированного постоянными магнитами, и переменного электромагнитного поля, возникающего при подаче высокого напряжения на выводы магнетрона. Для питания излучателя СВЧ-волн используется высокое напряжение, величина которого составляет порядка 4000 В.

В кольцевом промежутке между катодом и анодом, иначе называемым пространством взаимодействия, происходит формирование потока электронов и их круговое вращение внутри воздушного зазора. Во время прохождения потока электронов мимо полостей резонаторов скорость электронов несколько замедляется. В этот момент происходит отбор энергии из пучка электронов и формирование СВЧ-волн, которые в свою очередь усиливаются в резонаторах и выводятся через проволочную петлю на антенну магнетрона (рис. 30).



**Рис. 30.** Устройство магнетрона

Дальнейший путь СВЧ-волн довольно прост. По волноводу они попадают в рабочую камеру печи и поглощаются помещенными в нее продуктами, в результате чего пища нагревается.

### Прибор 3. Рентгеновская трубка

Рентгеновская трубка - электровакуумный прибор, предназначенный для генерации рентгеновского излучения, в котором генерация происходит за счёт тормозного излучения электронов, ускоренных до энергии более 10 кэВ и облучающих металлический анод.

Рентгеновское излучение — электромагнитные волны, энергия фотонов которых лежит на шкале электромагнитных волн между ультрафиолетовым излучением и гамма-излучением.

Прототип рентгеновской трубки, которая сейчас используется во всех современных рентгеновских аппаратах, изобрел американский физик Уильям Кулидж.

Принцип получения изображения при помощи рентгеновских лучей построен на особенностях их поглощения различными тканями тела.

Принцип работы рентгеновского аппарата основывается на подведении напряжения к пульту управления, откуда, после регулировки, напряжение передается на главный трансформатор. Затем возросшее напряжение достигает рентгеновской трубки, и происходит излучение (рис. 31). Лучи проходят через кожный покров и в разной степени поглощаются мышечной и костной тканью. Больше всего рентгеновские лучи поглощает кальций, входящий в состав костей. Поэтому кости на снимке ярко-белого цвета. Соединительные ткани, мышцы, жир и жидкость не так интенсивно поглощают лучи, поэтому на изображении они имеют оттенки серого цвета. Меньше всего рентгеновские лучи поглощает воздух. Поэтому содержащие его полости будут на изображении самыми темными.

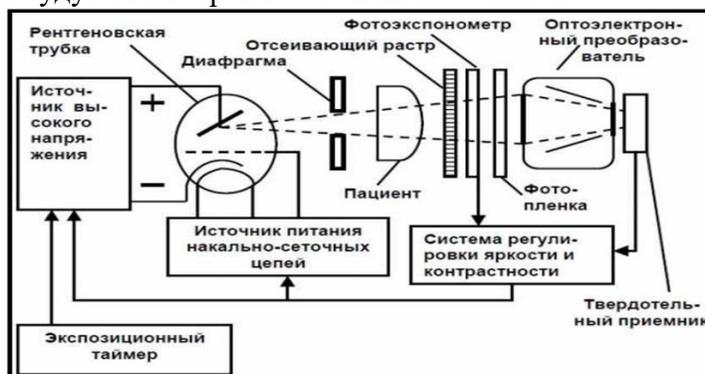


Рис.31. Принцип действия рентгеновского аппарата

На снимке, полученном при помощи устройства, преобразующего в рентгеновском аппарате излучение в готовое изображение, хорошо видны кости и внутренние органы (иногда для лучшей визуализации органы предварительно наполняют контрастной субстанцией), что позволяет точно выявить различные патологии.

Аппарат надежно защищен толстым корпусом из свинца. Атомы этого металла отлично поглощают рентгеновские лучи, что позволяет обеспечить безопасность для медицинского персонала и точно направить лучи на объект исследования через отверстие, имеющееся в корпусе аппарата.

Цифровые рентгеновские системы и аппараты более современные, хотя и более дорогие в приобретении. Им не нужна фотолаборатория и изображения сразу получаются в цифровом виде и моментально могут быть отправлены по почте в виде файла. Пленка печатается только при необходимости. Цифровым рентгенам требуется меньше времени на получение изображения. Благодаря этому пациент получает до 90-95% меньше дозы облучения, чем это было в пленочных аппаратах. При этом скорость получения практически моментальная — менее одной минуты.

#### Прибор 4. Осциллограф

Осциллограф – прибор, отображающий получаемую информацию в графическом виде, т.е. он попросту рисует диаграмму электрического сигнала (рис. 32). Этот прибор широко используется в лабораториях, научно-исследовательских центрах, мастерских и сервисах. Его применяют для наблюдения за амплитудными и временными параметрами электрического сигнала, их измерениями и записью. В большинстве приложений, диаграмма отражает изменения сигнала во времени: вертикальная ось (Y) представляет значения напряжения, а горизонтальная ось (X) – время. Интенсивность или яркость выведенной на экран прибора картинки иногда называется осью Z.



Рис.32. Осциллограф

Простейшая диаграмма способна многое поведать о сигнале, например: значение напряжения в определенный момент времени; частота колебаний сигнала; участки схемы с изменяющимися характеристиками, представленные конкретным сигналом; частота, с которой определённая часть сигнала соотносится с другими его составляющими; насколько сильно искажается сигнал за счет наличия неисправных компонентов; каково соотношение в сигнале постоянной и переменной составляющих; какова шумовая составляющая сигнала и изменяется ли это значение во времени.

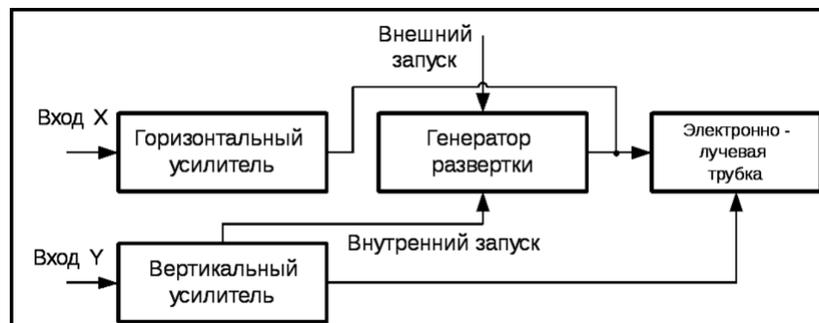
Общепринятый термин для любого колебательного процесса – волна. Это могут быть звуковые волны, волны, генерируемые человеческим мозгом, океанские волны и электромагнитные волны, все они относятся к разряду периодических колебаний. Осциллограф измеряет колебания напряжения. Один период колебания представляет собой ту часть этой волны, которая полностью повторилась. Форма волны – есть графическое представление колебания как такового. Форма колебания напряжения выражается в виде диаграммы зависимости величины напряжения (по вертикали) от времени (по горизонтали).

Внешний вид формы волны очень многое говорит о самом сигнале. Каждый раз, когда вы видите изменения по высоте формы сигнала, вы знаете, что это изменилось значение напряжения. Когда вы видите плоскую горизонтальную линию, вы делаете вывод, что за этот промежуток времени напряжение не изменилось. Прямые диагональные линии означают линейное изменение напряжения, т.е. периодическое нарастание или спад. Острые углы на диаграмме сигнала указывают на внезапные изменения.

Синусоида являет собой основную форму сигнала по нескольким причинам. Она соответствует математическому определению гармонической функции – это та самая функция  $\sin x$ . Напряжение, присутствующее в электрической розетке, изменяется по синусоидальному закону. Тестовые сигналы, создаваемые генератором стандартных функций, также имеют синусоидальную форму. Большинство источников переменного тока выдают синусоидальный

сигнал. Затухающая синусоида представляет собой особый случай, который можно наблюдать в колебательных контурах при отсутствии резонанса.

Осциллограф выполняет замеры при помощи электронно-лучевой трубки (рис. 33). Это лампа, которая фокусирует анализируемый ток в луч. Он попадает на экран прибора, отклоняясь в двух перпендикулярных направлениях:



**Рис.33.** Упрощённое устройство осциллографа

За отклонение луча отвечают две пары пластин электронно-лучевой трубки. Те, что расположены вертикально, всегда находятся под напряжением. Это помогает распределять разнополюсные значения. Положительное притяжение отклоняется вправо, отрицательное — влево. Таким образом, линия на экране прибора движется слева направо с постоянной скоростью.

На горизонтальные пластины также действует электрический ток, что отклоняет демонстрирующий показатель напряжения луча. Положительный заряд — вверх, отрицательный — вниз. Так на дисплее устройства появляется линейный двухмерный график, который называется осциллограммой.

Расстояние, которое проходит луч от левого до правого края экрана называется развёрткой. Линия по горизонтали отвечает за время измерения. Помимо стандартного линейного двухмерного графика существует также круглые и спиральные развёртки. Однако пользоваться ими не так удобно, как классическими осциллограммами.

## 2.2.3 Приборы, которые измеряют иные периодические колебания в жизни

### Прибор 1. Сейсмограф

Слово «сейсмограф» имеет греческое происхождение и образовано от двух слов: «seismos» – сотрясение, колебание, и «grapho» – писать, записывать. То есть, сейсмограф – это прибор, предназначенный записывать колебания земной коры (рис. 34).

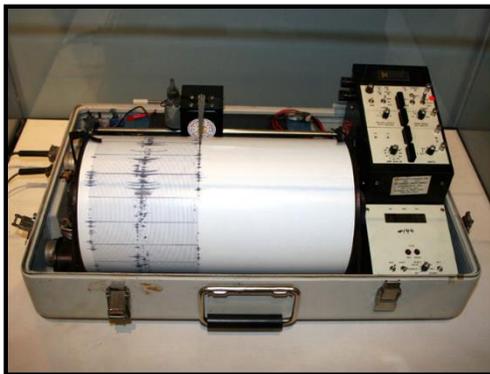


Рис.34. Сейсмограф

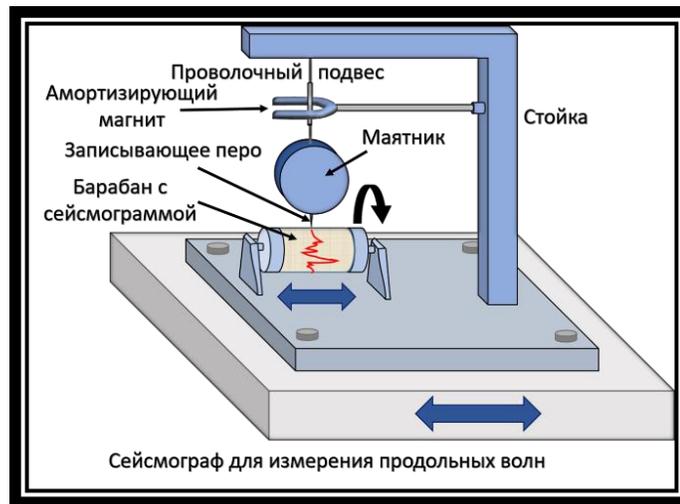
Первый сейсмограф современной конструкции изобрел русский ученый, князь Б. Голицын, который использовал преобразование механической энергии колебаний в электрический ток.

Конструкция довольно проста: грузик подвешивается на вертикально или горизонтально расположенной пружине, а к другому концу груза крепится перо самописца.

Вращающаяся бумажная лента служит для записи колебаний груза. Чем сильнее толчок, тем дальше отклоняется перо и дольше колеблется пружина. Вертикальный груз позволяет регистрировать горизонтально направленные толчки, и наоборот, горизонтальный самописец записывает толчки в вертикальной плоскости. Как правило, горизонтальная запись ведется в двух направлениях: север–юг и запад-восток.

Сейсмические волны - волны, переносящие энергию упругих (механических) колебаний в горных породах. Источником сейсмической волны может быть землетрясение, взрыв, вибрация, удар, как и любое воздействие на горные породы, вызывающие в них появление упругих колебаний.

Принцип работы сейсмографа основан на передаче колебаний предметам, установленным на участке земной коры. При нахождении одной плиты земной коры на другую накапливается огромное количество энергии, при ее высвобождении происходит сотрясение. Что такое сейсмограф? Современные приборы состоят из маятника, подвешенного на нити и закрепленного к стойке, прочно стоящей на грунте. На конце маятника имеется перо, которое при колебании будет вычерчивать амплитуду значения деформации. Барабан с бумагой, на которой будет отображаться процесс землетрясения, устанавливается также на грунте жестко. Когда происходит землетрясение, маятник за счет инерции остается на месте, а барабан с бумагой совершает колебательные движения, вычерчивая значение энергии, высвобождаемой при явлении землетрясения (рис. 35). Современные приборы способны контролировать даже незначительные изменения, не несущие разрушения.

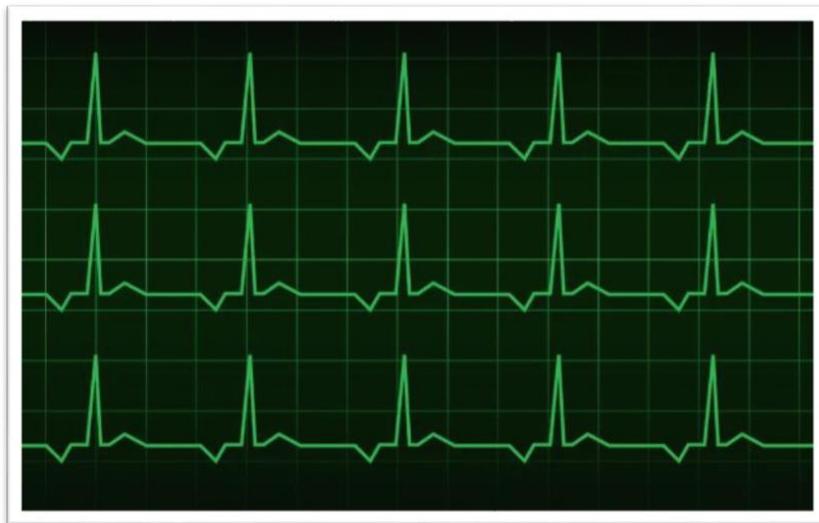


**Рис.35.** Схема строения сейсмографа

Современные сейсмографы способны определять и измерять амплитуду колебаний в трех плоскостях. Измеряя виброскорость, сейсмографы имеют диапазон частот измерения от 0,3 до 500 Гц, при диапазоне измерения скорости колебания - от 0,0002 до 20 мм/с. Сейсмографы бывают как переносные, так и стационарные. Переносные сейсмографы устанавливают на участках горных или подземных разработок, чтобы избежать человеческих жертв, предупредив землетрясения и эвакуировав рабочий персонал.

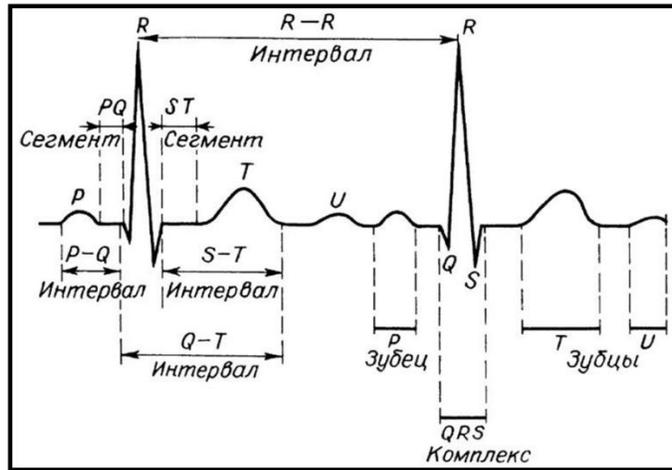
### Прибор 2. Кардиограф

Вы видели, как выглядит звуковая волна, а теперь посмотрите, как бьётся сердце (рис. 36).



**Рис.36.** Кардиограмма сердца

По графику видно, что кардиограмма сердца человека - это тоже наша с вами тригонометрическая функция. Так как наше сердце совершает периодические колебания (рис. 37).



**Рис.37.** Схема кардиограммы

Для исследования работы сердца кардиологи используют электрокардиографию. Принцип работы медицинского ЭКГ аппарата – фиксация электрических импульсов сердца во время работы сердечной мышцы и в период покоя (рис. 38). Электрокардиограф регистрирует разность потенциалов, которые появляются между размещенными на теле электродами. Результат исследования записывается на бумажной ленте, в виде цифровых данных на персональном компьютере.



**Рис.38.** ЭКГ аппарат

Существуют различные модели электрокардиограмм, разница между ними значительна, но в основе заложен единый принцип – фиксация сердечного ритма.

Назначение электрокардиографа – это диагностирование работы сердечной мышцы. При помощи его можно узнать:

- 1) О серьезных нарушениях работы сердца (ишемия, инфаркт).
- 2) О сбоях сердечного ритма (аритмия, тахикардия).
- 3) Об острой сердечной недостаточности.
- 4) О нехватке микроэлементов и о других сопутствующих заболеваниях.

Устройство ЭКГ аппарата включает в себя несколько блоков (рис. 39). Одним из них являются электроды и провода, которые устанавливаются на конечности и тело пациента. Именно они направляют сигнал прямо к прибору. В базовом корпусе прибора – фильтры,

которые отбрасывают непригодную часть сигнала. Еще в кардиографе находится гальванометр, механизм, протягивающий ленту, и блок питания.



**Рис.39.** Устройство ЭКГ аппарата

Кардиограмма сердца похожа на синусоиду. ЭКГ синусовый ритм что это? Синусовый ритм, обнаруженный на ЭКГ, говорит о хорошей деятельности сердечной мышцы, при которой патологии отсутствуют. Данный ритм характеризует колебания, возникающие от импульсов в определенном узле и расходящиеся по предсердию и по желудочку. В результате чего происходит сжатие сердечной мышцы. Чтобы обследование показало верный результат, пациент не должен волноваться, ему нужно пребывать в спокойном состоянии.

Если все параметры, отраженные на кардиограмме, соответствуют синусовому ритму, это означает, что импульсы иннервации верно следуют от верха к низу. В противном случае импульсы исходят из второстепенных отделов сердца.

Что означает вертикальное положение при синусовом ритме на ЭКГ? Это нормальное расположение сердца в грудном отделе на линии условного расположения центральной оси. Расположение органа допустимо под различными углами наклона и в разных плоскостях, как в вертикальной, так и в горизонтальной, а также в промежуточных. Это не является патологией, а лишь указывает на отличительные характеристики строения организма пациента и выявляется в результате обследования на ЭКГ.

## ВЫВОД

Подводя итог всему выше сказанному, мы достигли цели работы, которую определили вначале проекта. Действительно, большинство физических явлений природы можно описать с помощью тригонометрии и тригонометрических функций. Сейчас в век инновационных технологий еще сложнее представить жизнь без использования тригонометрии. Как показал пример, даже для измерения глубины моря, расстояния до объектов, кардиограммы человеческого сердца необходимы тригонометрические функции.

Изучив графики тригонометрических функций – синусоиду и косинусоиду, можно сделать вывод, что тригонометрия тесно связана с жизнью человека и его деятельностью, начиная с древности, и заканчивая настоящим временем.

Исследовав аналитический материал, мы выяснили, что тригонометрия присутствует во многих приборах, в которых используются физические явления на основе тригонометрических функций. Сформулировали строгие определения тригонометрическим функциям. Определили сферы применения синусоиды и косинусоиды, а также подтвердили значимость математики в окружающем нас мире. Благодаря формулам, которые мы рассмотрели можно решить задачи, встречающиеся на практике.

В ходе практического исследования применили полученные знания. Мы убедились, что выдвинутая нами гипотеза подтвердилась и графики тригонометрических функций – синусоида и косинусоида действительно являются яркими представительницами в окружающем нас мире. Хочется, чтобы данное исследование оказалось не только интересным, но и полезным. А информационная брошюра будет служить наглядностью практического применения этих функций на уроках математики и физики при изучении этих тем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрова О.В., Семенов Ю.С. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. Решение упражнений и задач: Учеб. Пособие. / Под ред. М.К. Потапова – М.: ИЛЕКСА, 2015. – 508 с.
2. Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия. – М.: МЦНМО, 2022. – 199 с.
3. Матвиевская Г.П. Становление плоской и сферической тригонометрии: Из истории математических идей. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 72 с.
4. Мякишев Г.Я. Физика. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Г. Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев, В.М. Чаругин: под ред. Н.А. Парфентьевой. – М.: Просвещение, 2019. – 432 с.
5. Для чего нужен осциллограф и как им выполнять измерения тока, напряжения, частоты и сдвига фаз. – Текст: электронный // [odinelectric.ru](https://odinelectric.ru/equipment/dlja-chego-nuzhen-oscillograf-i-kak-im-polzovatsya): [сайт]. – <https://odinelectric.ru/equipment/dlja-chego-nuzhen-oscillograf-i-kak-im-polzovatsya> (дата обращения 30.03.2023).
6. Как работает микроволновка. – Текст: электронный // [club.dns-shop.ru](https://club.dns-shop.ru/blog/t-186-mikrovolnovyie-pechi/35208-kak-rabotaet-mikrovolnovka/?ysclid=lfvf89srdz100967329): [сайт]. – <https://club.dns-shop.ru/blog/t-186-mikrovolnovyie-pechi/35208-kak-rabotaet-mikrovolnovka/?ysclid=lfvf89srdz100967329> (дата обращения 30.03.2023).
7. Как работает рентген. – Текст: электронный // [profilaktica.ru](https://profilaktica.ru/for-population/profilaktika-zabolevaniy/tuberkulez/kak-rabotaet-rentgen/?ysclid=levjj9m8rz931078891): [сайт]. – <https://profilaktica.ru/for-population/profilaktika-zabolevaniy/tuberkulez/kak-rabotaet-rentgen/?ysclid=levjj9m8rz931078891> (дата обращения 30.03.2023).
8. Как работает ультразвуковой дальномер. – Текст: Текст: электронный // [robotosha.ru](http://robotosha.ru/electronics/how-works-ultrasound-meter.html): [сайт]. – <http://robotosha.ru/electronics/how-works-ultrasound-meter.html> (дата обращения 30.03.2023).
9. Контурный анализ ЭКГ: анализ сердечного ритма. – Текст: Текст: электронный // [bioscaner.com](https://bioscaner.com/tech/konturnyj-analiz-ekg/): [сайт]. – <https://bioscaner.com/tech/konturnyj-analiz-ekg/> (дата обращения 30.03.2023).
10. Механические колебания. – Текст: Текст: электронный // [ege-study.ru](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/fizika/mexanicheskie-kolebaniya/?ysclid=lebf5ztwke662858918): [сайт]. – <https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/fizika/mexanicheskie-kolebaniya/?ysclid=lebf5ztwke662858918> (дата обращения 30.03.2023).
11. Опять синусы. Теперь на алгебре. – Текст: Текст: электронный // [ege-study.ru](https://dzen.ru/a/XsMBZqjZSHiRLr2v): [сайт]. – <https://dzen.ru/a/XsMBZqjZSHiRLr2v> (дата обращения 30.03.2023).
12. Принцип действия радиопередатчика. – Текст: Текст: электронный // [studfile.net](https://studfile.net/preview/7741034/page:2/): [сайт]. – <https://studfile.net/preview/7741034/page:2/> (дата обращения 30.03.2023).
13. Радиопередатчик. – Текст: Текст: электронный // [wikipedia.org](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B0%D1%82%D1%87%D0%B8%D0%BA): [сайт]. – <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B0%D1%82%D1%87%D0%B8%D0%BA> (дата обращения 30.03.2023).
14. Устройство и основные принципы работы эхолота. – Текст: Текст: электронный // [ivan-susanin.ru](https://ivan-susanin.ru/reviews/ustroystvo_i_osnovnye_printsipy_raboty_ekholota/?ysclid=lfvewxexg9269332121): [сайт]. – [https://ivan-susanin.ru/reviews/ustroystvo\\_i\\_osnovnye\\_printsipy\\_raboty\\_ekholota/?ysclid=lfvewxexg9269332121](https://ivan-susanin.ru/reviews/ustroystvo_i_osnovnye_printsipy_raboty_ekholota/?ysclid=lfvewxexg9269332121) (дата обращения 30.03.2023).
15. Ультразвуковые датчики. – Текст: Текст: электронный // [mirrobo.ru](https://mirrobo.ru/micro/ultrazvukovye-datchiki/#:~:text=%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BF%20%D0%B4%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%8F,%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%BE%20%D0): [сайт]. – <https://mirrobo.ru/micro/ultrazvukovye-datchiki/#:~:text=%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BF%20%D0%B4%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%8F,%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%BE%20%D0>

- [%BE%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%8C%D0%B0%D1%81%D1%81%D1](#) (дата обращения 30.03.2023).
16. Ультразвуковые исследования (УЗИ-диагностика). – Текст: электронный // medelite.ru: [сайт]. – <https://medelite.ru/uzi/?ysclid=lfux7s345v891452849> (дата обращения 30.03.2023).
  17. Ультразвуковой расходомер. – Текст: электронный // wikipedia.org: [сайт]. – URL:<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BB%D1%8C%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B2%D1%83%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B9%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80> (дата обращения 30.03.2023).
  18. Ультразвуковой расходомер. – Текст: электронный // npopramen.ru: [сайт]. – <http://npopramen.ru/information/other-flowmeters/physycal-phenomena/9-acoustic-flowmeters?ysclid=lfuxgdmtp68837866> (дата обращения 30.03.2023).
  19. Что такое сейсмограф, описание и принцип действия – Текст: электронный // fb.ru: [сайт]. – <https://fb.ru/article/432704/chto-takoe-seysmograf-opisanie-i-printsip-deystviya?ysclid=ldxc4suf04877039685> (дата обращения 30.03.2023).
  20. Шумомеры: разновидности, принцип работы и правила использования. – Текст: электронный // stroy-podskazka.ru: [сайт]. – <https://stroy-podskazka.ru/pribory-dlya-izmereniya-faktorov-okruzhayushchej-sredy/shumomery/?ysclid=lfvfe6qbjj313548294> (дата обращения 30.03.2023).
  21. Электромагнитные волны – Текст: электронный // studfile.net: [сайт]. – <https://studfile.net/preview/994536/> (дата обращения 30.03.2023).
  22. Электромагнитны волны – Текст: электронный // zaochnik.com: [сайт]. – <https://zaochnik.com/spravochnik/fizika/elektromagnitnye-kolebanija-volny/elektromagnitnye-volny/> (дата обращения 30.03.2023).
  23. Электромагнитные волны: что это такое, свойства, формулы, применение– Текст: электронный // asutpp.ru: [сайт]. – <https://www.asutpp.ru/elektromagnitnye-volny.html> (дата обращения 30.03.2023).