Кириллова Анастасия Николаевна, студент Удмуртского государственного университета

Разработка элективного курса по математике «Элементы теории чисел» для 10 класса

Курсовая работа

**Введение**

 Реформы математического образования, затрагивая содержание школьных программ, неизменным сохраняют некоторое ядро из тем, без которых учащиеся не получат полного представления о математике и ее методах. Данные темы концентрируют в себе математические знания, основами которых должен обладать человек в современном обществе, и которые используются как в повседневной жизни для решения возникающих на практике задач, так и для решения внутриматематических проблем и задач прикладного характера. К таким темам относятся некоторые разделы теории чисел.

Теория чисел – одна из древнейших математических теорий. Арифметические исследования послужили базой для создания ряда разделов математики и, в то же время, теория чисел использует аналитические, алгебраические, геометрические и многие другие методы для решения теоретико-числовых проблем.

Делимость – фундаментальное понятие алгебры, арифметики и теории чисел, связанное с операцией деления. Вопросами делимости чисел занимались еще математики Древней Греции. В теории чисел ими была проведена большая работа по типологии натуральных чисел. Они делили множество натуральных чисел на классы, выделяя классы совершенных чисел, дружественных чисел, фигурных чисел, простых чисел и др.

В книге Евклида «Начала» содержится доказательство бесконечности множества простых чисел. Древнегреческий ученый Эратосфен нашел способ составления таблиц простых чисел, названный позднее «решето Эратосфена».

Вклад в изучение признаков делимости чисел внес Блез Паскаль. Он нашел алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, из которого следуют все частные признаки.

Проблемами делимости чисел на уроках математики занимались многие математики и методисты: Ж. Адамар, В. Г. Болтянский, И.М. Виноградов, В. А. Далингер, Д. Пойа, Г. И. Саранцев, К. П. Сикорский, А. А. Столяр, П. Л. Чебышев и др.

В основном, элементы теории чисел в школьном курсе математики представлены в разделах «Делимость натуральных чисел», «Делимость чисел». Тема «Делимость чисел» включена в программу по математике для 5- 6 классов и почти не рассматривается в 7-11 классах. Хотя в контрольно-измерительных материалах государственной итоговой аттестации задачи по элементам теории чисел присутствуют, что делает необходимым включение таких задач в школьный курс алгебры 7-9 классов, старшей школы и обуславливает **актуальность** темы исследования.

**Объект исследования:** элементы теории чисел в школьном курсе математики.

**Предмет исследования:** организация обучения элементам теории чисел в школьном курсе математики.

**Цель исследования** – разработать программу элективного курса «Элементы теории чисел» для учащихся 10 класса.

**Задачи исследования:**

1. Обобщить значение тории чисел в школьном курсе математики;
2. Рассмотреть основные понятия «Теории чисел», изучаемые в школьном курсе математики».
3. Проанализировать учебно-методическую литературу по теме исследования.
4. Разработать программу элективного курса «Элементы теории чисел» для учащихся 10 класса.
5. Провести педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

**Гипотеза:** разработка и внедрение элективного курса «Элементы теории чисел» в учебный процесс способствует более успешному изучению математики.

**Методы исследования:** теоретический анализ литературы; составление библиографии; конспектирование; аннотирование; цитирование; анализ нормативных документов; наблюдение; обобщение опыта работы действующих учителей; моделирование структуры методических материалов.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, представлены объект, предмет исследования, изложены цели и задачи данной работы.

В первой главе изложен основной теоретический материал «Теории чисел», изучаемый в школьном курсе математики. Во второй главе представлен анализ учебных программ 5 – 11 классов, обзор учебников школьной программы, а также программа элективного курса «Элементы теории чисел» для 10 класса. В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы.

В Приложениях представлено тематическое планировании элективного курса «Элементы теории чисел» 10 класса, а также примерные задания для контрольной работы по итогам этого курса.

**Глава 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ**

**ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ**

* 1. **Основные понятия теории чисел**

Теория чисел - один из древнейших математических разделов предметом, которого являются числа и их свойства, т.е. числа выступают здесь не как средство или инструмент, а как объект исследования. Начала исследований натуральных чисел были заложены в Древней Греции. Здесь были изучены свойства делимости чисел, доказана бесконечность множества простых чисел и открыты способы их построения (Евклид, Эратосфен). Задачи, связанные с решением неопределенных уравнений в целых числах, были предметом исследований Диофанта, их изучением занимались ученые Древней Индии и Древнего Китая, стран Средней Азии. В XVII веке П. Ферма и в XVIII Л. Эйлер внесли огромный вклад в наши знания о натуральных числах. И если Ферма оставил лишь свои открытия, не сопроводив их доказательствами, то Эйлер, оказавший большое внимание на развитие всей математики, а также и механики, создал новые методы и приемы, реализовал новые идеи, которые играют важную роль и в современных исследованиях и приложениях теории чисел. В частности, Эйлера был первым, кто предложил использовать средства математического анализа при исследовании проблем теории чисел.

Понятие числа принадлежит к числу фундаментальных понятий, так как определяется потребностями практики. Накопление сведений о числах и операциях над ними имели долгую историю формирования и окончательно сложились как система теорем во второй половине 19 века. В современных математических теоретических построениях принята следующая последовательность изучения числовых множеств: натуральные числа; целые числа; рациональные числа; действительные числа; комплексные числа.

В каждом из типов указанных множеств есть типы отношений между его элементами и определенные операции над ними. Для построения арифметики натуральных чисел выделяют два способа:

1) теоремы (1875 – 1918 г Кант);

 2) аксиомы (Пеано 1858 – 1932 г).

«Теоремный подход» базируется на классах эквивалентных множеств. При этом сами натуральные числа определяются как мощности не пустых конечных множеств. Мощность пустого множества принимается за ноль. Сравнение натуральных чисел осуществляется при помощи теорем. Умножение – результат объединения пересекающихся множеств.

Аксиоматический подход трактует натуральные числа как символы с отношением «непосредственно следует за». Аксиоматически определены четыре аксиомы:

1) Число 1 не следует ни за каким натуральным числом;

2) Для любого натурального m имеется единственное непосредственно следующее за ним число n;

3) Любое натуральное m непосредственно следует только за одним натуральным числом;

4) Если содержит число 1, и наряду с содержит , то .

Очевидно, что ни один из упомянутых способов не может применяться в школьном преподавании.

В школьном курсе более распространенным является построение множества присоединением к элементам множества некоторых новых элементов. Таким образом, расширено множество натуральных чисел до целых, целых до рациональных, рациональных до действительных.

Натуральные числа изучаются в начальной школе. Особенностями их изучения является индуктивный характер изложения на основе конкретных фактов; сокращение числа формулировок и усиленное внимание к выработке вычислительных навыков в сочетании с наглядностью, а также возвращение к ранее изученному материалу.

Также в начальной школе происходит изучение обыкновенных дробей. Школьники умеют находить доли числа , и восстанавливать число по известной доле. Подход к изучению дробей продолжает носить индуктивный характер. Так как изучение десятичных дробей связано с вопросами метрической системы мер, то именно они предваряют изучение рациональных чисел. По-прежнему значимую роль имеют геометрические иллюстрации.

В 6 классе школьники начинают систематически изучать рациональные обыкновенные дроби. Однако теория делимости (простые и составные числа, каноническое разложение, НОК и НОД) предваряет их изучение так же, как изучение десятичных дробей предваряет изучение рациональных чисел.

Цель теории делимости – подготовка к выполнению действий над рациональными числами. При этом также параллельно изучаются пропорция, проценты.

Отрицательные числа даются школьникам, как правило, труднее. Наибольшую трудность представляет обоснование действий над отрицательными числами. При этом с пониманием доказательства умножения чисел разных знаков у учащихся возникают особые проблемы. Как правило, доказательств правила знаков при умножении преподаватель не в состоянии предоставить школьникам и озвучивает их как факт.

Определения также можно вводить по-разному:

1) рассмотреть примеры, а потом дать определение. Недостатком является внутренняя подмена у учащихся примеров доказательствами;

2) дать определение, а потом пример.

Сформированность представлений о числах в целом способствуют правильному формированию у школьников «чувства числа» [29] и выстраиванию грамотных знаний о системе работы с видами чисел и системами мер. В этой связи адаптация методики преподавания к возрастным особенностям учащихся, разработка факультативных и элективных курсов в немалой степени способствует общей успешности формирования математического аппарата школьника.

Одним из первых свойств чисел, открытых человеком, было то, что некоторые из них могут быть разложены на два или более множителя, например,

В то время как другие, например, 3, 7, 13, 37 не могут быть разложены на множители подобным образом. Вообще, когда число является произведением двух чисел и , то мы называем и *множителями* или *делителями* числа . Каждое число имеет тривиальное разложение на множители . Соответственно, мы называем числа 1 и тривиальными делителями числа .

Любое число , у которого существует нетривиальное разложение на множители, называется составным. Если число имеет только тривиальное разложение на множители, то оно называется простым. Среди первых 100 чисел простыми числами являются следующие 25 чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Все остальные числа, кроме 1, являются составными.

*Теорема 1.* Любое целое число является либо простым, либо имеет простой множитель.

*Доказательство.* Если не является простым числом, то у него есть наименьший нетривиальный множитель . Тогда – простое число, так как если бы – было составным, то число имело бы еще меньший множитель.[19]

Как определить является ли произвольное число простым или нет, и в случае, если оно составное, как найти его нетривиальный делитель?

Заметим, что при разложении на множители оба множителя и не могут быть больше, чем , так как в противоположном случае мы получили бы , что невозможно. Таким образом, чтобы узнать, имеет ли число делитель, достаточно проверить, делится ли число на простые числа, не превосходящие .

*Пример 1.* Если , то ; проверив делимость числа 91 на простые числа 2, 3, 5, 7, находим, что .

*Пример 2.* Если , то находим, что . Так как ни одно из простых чисел до 43 не делит , то это число является простым.

Существует достаточно много таблиц простых чисел (Рисунок 1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 |
| 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 | 107 | 109 |
| 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 |
| 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 |
| 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 |
| 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 |
| 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 |
| 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 |
| 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 |
| 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 |
| 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 |
| 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 |
| 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 |
| 809 | 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 |
| 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 |
| 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |  |

Рисунок 1 – Таблица простых чисел от 1 до 1000

Другой очень простой метод – это применение таблиц простых чисел. За последнее 200 лет было составлено и издано много таблиц простых чисел. Наиболее обширной из них является таблица Д.Х. Лемера, содержащая все простые числа до 10 000 000.

Третий интересный метод – это решето Эратосфена. Его схема состоит в следующем: напишем последовательность всех целых чисел от 1 до числа, которым мы хотим закончить таблицу: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15.

Начнем с простого числа 2. Будем вычеркивать каждое второе число, начиная с 2, т.е. четные числа. После этой операции первым невычеркнутым числом будет число 3. Оно простое, так как не делится на 2. Далее будем вычеркивать каждое третье число после него, т.е. 6, 9, 12, 15. Следующим невычеркнутым числом будет 5. Повторяя этот процесс, мы получим последовательность невычеркнутых чисел, все они (кроме 1) являются простыми. [24]

Любые нетривиальные делители называются составными. Как только процесс разложения на множители заканчивается на тривиальных делителя, получается разложение числа на простые множители, которое является единственным, вне зависимости от способа разложения.

Как только получается в разложении составного числа последний тривиальный делитель, больший единицы, процесс разложения на множители заканчивается. При этом все делители уже будут простыми. Таким образом, каждое больше единицы целое число либо является простым, либо их произведением. При этом результат разложения всегда будет единственным вне зависимости о его способаx (*основная теорема арифметики*).

Запись числа в виде , (\*) где - различные простые множители числа , причем число входит раз, входит раз и т.д., называется каноническим разложением на простые множители. [7]

*Пример 1.* Представим число 12345678 в виде канонического разложения на простые множители. Для этого будем последовательного делить данное число на простые числа, начиная c наименьшего.

12345678 2

 6172839 3

 2057613 3

 685871 47

 14593 14593

 1

Таким образом, число представимо в виде канонического разложения на множители в виде: .

*Пример 2.* Разложим на множители число 123456654321:

123456654321 3

 41152218107 7

 5878888301 11

 534444391 13

 41111107 37

 1111111 239

 4649 4649

 1

Таким образом, каноническое разложение может быть записано в виде .

Зная вид канонического разложения числа, можно указать число всех его делителей.

Мы можем узнать, какие числа делят число . Так, если возможными делителями числа 123456654321 будут числа вида

 , при этом показатели степеней могут принимать значения: ; и эти значения могут сочетаться всеми возможными способами, то число делителей равно .

Таким образом, если разложение числа на простые множители определяется в виде , (\*) где - различные простые множители числа , причем число входит раз, входит раз и т.д., то общее число делителей находится по формуле .

Делители и кратные начинают изучать в 6 классе. Данные понятия предваряют тему «Простые и составные числа» и изучаются с связи необходимостью последующих операций с обыкновенными дробями. После понятия «Делитель» и «Кратное» приступают к изучению признаков делимости. При этом вводятся указанные понятия как правило через наглядные примеры (пачки печений по 8 штук, потребность разделить 20 яблок между 5 ребятами и т.п.). Предлагаемые по теме задачи ориентированы на умение выбрать правильные делители и кратные для указанной системы чисел. При этом, на наш взгляд, приводимые по теме примеры недостаточно абстрактны и опираются на простой жизненный опыт. Хотя, несомненно, требуется определенное развитие приводимых примеров в направлении «от простого к сложного», от «примитивного к абстрактному».

 Нарастание уровня сложности заданий предполагает выбор наименьшего числа, кратного сразу для трех чисел, или расположение делителей в порядке возрастания.

Разделить целое число на целое число – означает нахождение целого , при умножении которого на получается , то есть . Если для целых чисел и такое целое число существует, то говорят, что делится на .

Если делится на , то называется делителем .

Например, 64 делится на 8, так как существует такое целое число , что , а именно ; число 27 не делится на 6, так как не существует такого целого числа , при котором верно равенство .

Вместо « делится на » говорят также: « кратно », «число делитель », « делит ».

Обозначают: (делится на ). Это эквивалентно пониманию некоего соотношения между ними.

Делимость как категория относится только к целым числам. Для рациональных чисел данная категория не имеет смысла ввиду обязательного наличия результата деления одного рационального числа на отлично от нуля другое. Поэтому под «числом», говоря о делимости, подразумевают целое число.

*Признак делимости на 2.*

Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся - нечетным. Число делится на два, если его последняя цифра четная или нуль. В остальных случаях - не делится.

*Пример.* Число 1024 делится на 2, так как 4 делится на 2; 123 не делится на 2, так как 3 – не делится на 2; 100 делится на 2, так как последняя цифра нуль.

*Признаки делимости на 3 и на 9.*

 Если сумма цифр делится на 3 (или 9), то число делится на 3 (или 9).

 *Пример.* Число 123456654321 делится на 3 и не делится на 9, так как сумма его цифр 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 42 делится на 3 и не делится на 9. Число 12345678 делится и на 3, и на 9, так как сумма его цифр 36 делится и на 3, и на 9.

*Признак делимости на 4 (на 8).*

 Число делится на 4 (или 8), если две (три) его последние цифры являются числом, делящимся на 4 (или 8), или нули.

 *Пример.* Число 12700 делится на 4, так как последние две цифры нули; 108 028 делится на 4, так как 28 делится на 4; 108 027 не делится на 4, так как 27 не делится на 4.

106000 делится на 8, так как последние три цифры – нули. 170 008 делится на 8, так как последние три цифры представляют число 8, которое делится на 8. 222210 не делится на 8, так как 210 не делится на 8.

Аналогичные признаки деления можно указать и для кратных степеней 2, то есть чисел 16, 32, 64 и т. д., но они не будут иметь практического значения.

*Признак делимости на 6.*

Так как , очевидно, что признаком деления на 6 будет одновременная делимость и на 2, и на 3.

*Пример.* 246 делится на 6, так как оно делится и на 2 и на 3.

*Признаки делимости на 5 (на 25).*

Признаком делимости на 5 (или на 25) является окончание числа на 0 (или последние цифры нули) или 5 (или последние 2 цифры образуют число, кратное 25).

*Пример.* 1233210, 1233215 делятся на 5 (последние цифры 0 и 5); 1233211 не делится на 5 (последняя цифра 1).

1213450 делится на 25 (оканчивается на 50), 12300 делится на 25 (оканчивается на два нуля), 1234540 не делится на 25 (40 не делится на 25).

*Признаки делимости на степени числа 10.*

На делятся только те числа, последние цифр которых нули.

*Пример.* 123321000 делится на 10, 100 и 1000.

*Признак делимости на 11.*

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

*Пример.* Число 103785 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, равна сумме цифр, занимающих четные места . Число 9163627 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, есть 9 + 6 + 6 + 7 = 28, а сумма цифр, занимающих четные места, есть 1 + 3 +2 =6; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11. Число 461025 не делится на 11, так как числа и не равны друг другу, а их разность на 11 не делится.

*Признак делимости на 7.*

Число делится на 7 тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 343 делится на 7, так как делится на 7).

Рассмотрим свойства делимости, широко применяемые при решении задач.

1) Если – результат деления на , то - единственное.

2) Любое число делится на само себя.

3) Если делится на , делится на , то делится на .

4) Если делится на и делится на , то или .

5) Если делится на и , то .

6) Если делится на и , то .

7) Если каждое из чисел делится на , то их сумма (разность) также делится на .

8) Если сумма чисел и слагаемое этой суммы делится на , то и слагаемое делится на .

Свойства делимости широко применяются при решении задач.

Разделить целое число на целое число с остатком – это значит представить его в виде , где и целые числа, .

*Теорема о делении с остатком утверждает, что* для любых целых и существует единственная пара и , удовлетворяющая условию , . При этом называется неполным частным, а – остатком от деления на .

 Деление с остатком предваряет весь материал, связанный с делимостью и начинает изучаться с 5 класса. На конкретных примерах разбирается, что такое «делимое», «делитель», «неполное частное», «остаток». При этом задачи носят часто жизненный, «экономический» характер. Например, требуется выяснить, сколько болванок по 18 кг можно отлить из 20 кг чугуна и сколько кг чугуна при этом останется.

Дальнейшее закрепление аналогичных задач происходит на абстрактных числовых примерах.

*Наибольшим (наименьшим) общим делителем (кратным)* НОД (НОК) (натуральных чисел и , является наибольшее (наименьшее) натуральное число, на которое делятся и , и (которое делится и на , и на ).

Свойства НОК и НОД:

1. НОД() = НОД().

2. Если делится на , то НОД(. Частным случаем является НОД(.

3. Если , где и – целые, то множество общих делителей чисел и совпадает с множеством общих делителей чисел и , в частности, НОД = НОД().

4. Если – любое натуральное число, то НОД

5. Если – любой общий делитель чисел и , то

6. .

Темы «НОД» и «НОК» являются важнейшими для изучения приведения дробей к общему знаменателю. Хорошим правилом является нарастание задач от конкретных числовых примеров до «жизненных» (задача про замену деревянных столбов линии электропередачи на железобетонные с 30-метровой дистанции на 50-метровую при условии совпадения 1-го столба).

Олимпиадные задачи указанных тем предполагают выход на более высокий уровень знаний. Так, предлагаемые Н.В. Горбачевым задания на признаки делимости предполагают знание разложения на множители, умение решения квадратных и биквадратных уравнений. Приведем примеры указанных задач.

*1)* *Вася написал на доске пример умножения двух двузначных чисел, заменив в нем одинаковые цифры одинаковыми буквами. В итоге у него получилось . Докажите, что он где-то ошибся.*

Данный пример можно решить несколькими способами. Самый простой требует знаний признаков делимости на 11.

*Решение:*

Число ДДЕЕ делится на 11, так как: . 11 - это простое число, значит, на него должен делиться хотя бы один из сомножителей слева. Однако АБ и ВГ, очевидно, на 11 не делятся, так как состоят из разных цифр. Таким образом, Вася где-то ошибся в записи.

*2) Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны цифры его десятков и единиц.*

*Решение:*

Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7. Пусть 1-я цифра - , 2-я и 3-я цифра - Тогда исходное число , причем и отсюда . Число без последней цифры . Отнимаем удвоенную последнюю цифру . Данное выражение делится на 7, и, следовательно, исходное число делится на 7.

*3) Может ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?*

*Решение:*

 Квадрат целого числа при делении на 4 в остатке образует 0 или 1, а делится на 4. Таким образом, остатком от деления на 4 является 0 или 1.

23 при делении на 4 дает остаток 3.

Вывод: 23 не может быть дискриминантом квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

*4) Можно ли прямоугольный параллелепипед разрезать на кирпичики ?*

*Решение:*

Нет, так как , a . *Так как не кратно 2, то и не кратно .*

5) Доказать, что не делится на 3.

*Решение:*

 – геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и числом членов 1990. Их сумма . С другой стороны, не делится на 3. Таким образом, не может делиться на 3.

Таким образом, из трех типов задач, традиционно встречающихся в средней школе, по теории чисел применяются задачи на вычисление и на доказательство, включая олимпиадные. Задачи на построение не применяются.

* 1. **Анализ программы по математике и учебников различных авторов по проблеме исследования**

Элементы теории чисел рассматриваются на протяжении всего обучения математики в школе. Рассмотрим учебную программу 5-11 классов на содержании элементов теории чисел.

*Анализ учебной программы по математике* 5*-6 класса по учебнику* С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина «Математика, 5», «Математика, 6».

В пятом классе изучаются тема: «Делимость натуральных чисел». На данную тему отводиться 19 часов. В содержании темы: «делимость натуральных чисел» входит: «Свойства делимости», «Признаки делимости на 10, на 5 и на 2», «Признаки делимости на 9 и на 3», «Простые и составные числа», «Делители натурального числа», «Разложение на простые множители», «Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа», «Наименьшее общее кратное», «Использование четности при решении задач».

Далее, элементы теории делимости можно выделить при изучении следующих тем: «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями», «Умножение и деление обыкновенных дробей», «Умножение и деление положительных и отрицательных чисел».

*Анализ учебной программы по математике* 6*-го класса по учебнику* Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова «Математика, 6»

В начале первой четверти идет систематизация и обобщение темы «Делимость чисел». Далее, элементы теории делимости встречаются при изучении темы «Отношение чисел и величин», «Целые числа», но основная часть программы (38 часов) посвящена изучению темы «Рациональные числа», которая потом плавно переходит в изучение десятичных дробей и на протяжении всей четвертой четверти происходит закрепление, коррекция и систематизация знаний учащихся по теме «Дроби».

*Анализ учебной программы по алгебре* 7*-го класса по учебнику* Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 7».

В начале учебного года проводится повторение по темам «Обыкновенные дроби» и «Действия с рациональными числами». Далее элементы теории чисел встречаются при изучении тем «Одночлены и многочлены», а именно при изучении деления одночлена и многочлена на одночлен. Далее, при изучении темы «Разложение многочленов на множители» можно выделить некоторые элементы теории делимости, а

именно, вынесение общего множителя за скобки, применение нескольких

способов разложения многочлена на множители. Так же, элементы теории делимости можно выделить в теме «Алгебраические дроби», а именно, приведение дробей к общему знаменателю и умножение и деление алгебраических дробей.

*Анализ учебной программы по алгебре* 8*-го класса по учебнику* Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 8».

Элементы теории делимости можно встретить в начале первой четверти при изучении темы «Алгебраические дроби. Арифметические операции над алгебраическими дробями». В основном элементы теории делимости рассмотрены в разделе «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями», «Умножение и деление алгебраических дробей», «Квадратные уравнения. Теорема Безу». Элементы теории сравнения встречаются так же как ив7 классе только в учебных программах, разработанных для профильного уровня по учебнику Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 8». Здесь уже идет обобщение и систематизация материала, на изучение которого выделяется 4 часа.

*Анализ учебной программы по алгебре* 9*-го класса по учебнику* Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворова «Алгебра, 9».

Основными темами в курсе 9 класса при рассмотрении теории делимости является темы «Квадратный трехчлен», «Разложение многочлена на множители» и «Деление многочлена на многочлен». Эта тема хороша рассмотрена при углубленном изучении.

Элементы теории делимости и сравнения практически встречаются в начале учебного года при повторении курса алгебры 7 – 8 класса и в течение всего курса при изучении решений (разных видов) уравнений и при решении неравенств с двумя переменными (квадратных неравенств с одной переменной).

*Анализ учебной программы по алгебре* 10*-го и* 11*-го класса по учебнику* С.М. Никольского, С.М. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина«Алгебра и начала математического анализа 10 – 11 класс (базовый ипрофильный уровни).

Элементы теории делимости встречаются на протяжении всего 10 класса. В начале года учащиеся повторяют материал 7 – 9 класса, затем изучают действительные числа. Действительным числам посвящена целая глава. Здесь ученики закрепляют знания о делимости чисел, сравнение по модулю, задачи с целочисленными неизвестными. В дальнейшем ученики изучают тему, посвященную рациональным уравнениям и неравенствам, корень степени, степенные положительные числа. Большое внимание учителя уделяют подготовке к ЕГЭ (можно выделить некоторые элементы теории делимости и сравнения, в заданиях 19).

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: элементы теории чисел прослеживаются на протяжении всего курса алгебры основной и старшей школы, но основные понятия и прикладные задачи рассматриваются только в 5 – 6 классе, далее теоретический материал даётся только в 10 классе.

Анализ методической литературы показал, что задачи по теории чисел представлены в государственной итоговой аттестации и едином государственном экзамене. Для устранения указанного «пробела» целесообразно рассматривать задачи по теории делимости при изучении ряда тем школьного курса «Алгебра 7-9».

При введении любой новой темы, в базовый курс школы возникает проблема изложения данного раздела (темы) в школьных учебниках.

Существует множество учебных пособий, включающих элементы теории чисел. Но для анализа мы выбрали несколько учебных пособий, которые могут применяться как на уроках, так и во внеурочной работе по математике:

1. «Математика. 5класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина. –14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.: ил. (МГУ – школе).

2. «Математика. 6 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина; Рос.акад. наук, Рос. акад. образования, изд. «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил. – (Академический школьный учебник).

3. «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» под редакцией Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С. Б. Суворова, С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.: ил.

4. «Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7 – 8 классов» под редакцией К.П. Сикорского. – 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 1974. – 367 с.

5. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Планирование учебного материала для 8 класса с углубленным изучением математики: методическое пособие. М., Просвещение,1988. 78 с.

По нашему мнению, в этих учебниках хорошо изложен теоретический материал, хорошо подобран задачный материал и к данным учебникам разработаны методические рекомендации. Рассмотрим подробнее каждый из учебников.

«Математика. 5 класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина. – 14-е изд. –М.: Просвещение, 2015. – 256 с.: ил. – (МГУ – школе).

В 5 классе основы теории чисел рассматриваются в начале учебника. Особое внимание уделяется изложению материала делимости чисел. Материал доступен для учеников, так как выстроена четкая и структурированная линия изучаемых тем, а именно вначале четко дается определение делимости двух чисел, на основе повторения определений делимое, делитель, частное и остаток от деления за тем вводиться понятие кратного. Далее, идет изучение признаков делимости на 5, на 10 и на 2, а затем на 9 и на 3. При изучении этой темы четко подобран задачный материал. Задачи приведены в четкой последовательности по уровню усложненности (от более простой до более сложной). Так же приведены задачи олимпиадного уровня для более одаренных детей.

Следующей темой в данном учебнике является тема «Простые и составные числа». Вначале рассматриваются примеры простых и составных чисел, а затем на основании примеров вводятся определения простого и составного числа. Далее, нашему вниманию предлагается изучение темы «Разложение на простые множители». Она рассматривается на основе уже изученного материала простого и составного числа. Большее внимание уделяется не на рассмотрении теоретического материала, а на рассмотрение практического материала: рассматриваются различные примеры и задачи на разложение на простые множители. Затрагиваются задачи более высокого уровня: олимпиадные, большое количество логических, занимательных задач для детей, желающих расширить и углубить знания.

Рассматривается тема НОД и НОК. Эти понятия вводятся на основе примеров разложения на простые множители. Очень хорошо подобран задачный материал. В конце раздела расположены дополнительные задачи и исторические сведения. Авторы учебника как можно глубоко рассмотрели теоретический и практический материал.

В шестом классе идет повторение, и закрепление раздела (темы) «Делимость чисел» на протяжении всего курса. Линия делимости чисел прослеживается в темах «Отношения, пропорции, проценты», «Целые числа», «Рациональные числа».

В учебнике очень обширный дополнительный материал, который будет полезен для самостоятельного изучения. Так же подобранный комплекс задач можно использовать в качестве самостоятельной и исследовательской работы.

«Математика. 6 класс», «Математика. 7 класс» под редакцией Г. В.Дорофеева и И.Ф. Шарыгина; Рос.акад. наук, Рос. акад. образования, изд. «Просвещение». – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил. –(Академический школьный учебник).

В 6 классе основы теории чисел рассматриваются в начале учебника. Особое внимание уделяется изучению материала делимости чисел. Материал доступен для учеников, так как выстроен четко материал изучаемых тем, а именно вначале дается определение делимости чисел, на основании повторения определений делимое, делитель, частное и остаток от деления за тем вводиться понятие кратного. Далее, идет изучение признаков делимости на 5, на 10 и на 2, а затем на 9 и на 3. При изучении этой темы удачно подобран задачный материал. Задачи приведены в четкой последовательности по уровню усложненности (от более простой до более сложной). Так же приведены задачи повышенного, олимпиадного уровня для более одаренных детей.

Следующей темой в данном учебнике является тема «Простые и составные числа». Далее, изучается тема «Разложение на простые множители». Она рассматривается на основе изученных понятий простого и составного числа. Затрагиваются задачи более высокого уровня: олимпиадные, некоторые задачи из ЕГЭ для детей, желающих расширить и углубить знания.

Рассматривается тема НОД и НОК. Эти понятия вводятся на основе примеров разложения на простые множители. Очень хорошо подобран задачный материал. В конце раздела расположены контрольные вопросы по изученным темам и дополнительные задачи. Авторы учебника как можно глубоко рассмотрели теоретический и практический материал.

В седьмом классе идет повторение, и закрепление раздела (темы) «Делимость чисел». На данный раздел (тему) по программе выделяется всего один час, хотя в учебнике очень обширный материал, который будет полезен для самостоятельного изучения. Так же подобранный комплекс задач можно использовать в качестве текущего контроля (самостоятельных работ или тестирования).

«Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» под редакцией Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С. Б. Суворова, С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.: ил.Зубарева И.И., Мордкович А. Г. «Математика. 6 класс».

Отличительные особенности данного учебника: при реализации учебной программы используется дополнительный материал - «Раздел для тех, кто хочет знать больше», создавая условия для максимального математического развития учащихся, интересующихся предметом, для совершенствования возможностей и способностей каждого ученика. В целях развития межпредметных связей, развития творческой активности учащихся, активизации поисково-познавательной деятельности используются творческие задания, задачи на моделирование, задачи из химии на определение процентного содержания раствора.

В основном элементы теории делимости рассмотрены в разделе «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями», «Умножение и деление алгебраических дробей», «Квадратные уравнения. Теорема Безу». Теория делимости хорошо рассмотрена при изучении тем «Квадратный трехчлен», «Разложение многочлена на множители» и «Деление многочлена на многочлен», но при углубленном изучении предмета.

«Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7 – 8 классов» под редакцией К.П. Сикорского. – 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 1974. – 367 с.

Это учебное пособие предназначено для учащихся 7 – 8 классов, оно дополняет учебники: Н. Я. Виленкин «Математика. 6 класс», «Математика. 7класс».

Книга состоит из семи разделов. В разделе содержатся теоретические сведения и соответствующие упражнения. В конце раздела приводятся упражнения для повторения. К каждому разделу даются дополнительные упражнения более высокого уровня сложности по сравнению с основными упражнениями. Первый раздел, состоящий из 15 параграфов, посвящен делимости чисел и простым числам. Упражнения к разделу можно разделить на 2 группы. Первую группу составляют задания на доказательство утверждений. Ко второй группе относятся задания, которые основываются не только на определение и теоремы, но и на умение проводить необходимые рассуждения, использовать ранее введенный алгебраический аппарат.

На наш взгляд, материал излагается не в четкой хронологии. Правильней было изучить темы: «Простые числа», «Взаимно простые числа», «Признаки делимости», «Наибольший общий делитель», «Наименьшее общее кратное», а затем уже тему «Сравнения».

Задачный материал подобран очень хорошо. В начале даются задачи на определение, затем на основе использования теорем, а затем на использование логического мышления и умения рассуждать.

Теоретический материал рассмотрен широко. Понятия рассматриваются более глубоко, вводя математические символы и определения, теоремы и утверждения записываются в символьной форме.

Вводятся новое понятия сравнения. Определение вводится на основании делимости чисел, что для детей трудно понимается. Стоит для начала рассмотреть пример делимости чисел и уже на основании примера дать определение.

М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Планирование учебного материала для 8 класса с углубленным изучением математики: методическое пособие. М., Просвещение, 1988. 78 с.

Пособие содержит весь теоретический и практический материал, необходимый для реализации обучения на трех уровнях. Включен разнообразный дополнительный материал: тесты по проверке готовности изучения каждой темы, таблицы ожидаемых результатов обучения, исследовательские и лабораторные работы, справочный материал.

Тренажеры представляют собой наборы заданий на отработку конкретных алгоритмов. В наборах заданий сложность постепенно увеличивается. Тренажеры можно использовать в качестве дополнительного задачника к учебнику, откуда можно подбирать домашние и индивидуальные задания для более слабых учащихся или, наоборот, для наиболее сильных.

Пособие содержит матричные тесты. Эта форма представления заданий наименее традиционна для школы. Такой тест представляет собой таблицу, в которой входная (верхняя) строка и входной (левый) столбец характеризуют изучаемый объект с различных точек зрения. Задача ученика установить соответствие между этими характеристиками. Природа характеристик, соответствие между которыми надо найти, может быть различной: «формула-картинка», «картинка-картинка», «текст-формула». Тесты носят скорее обучающий, чем контролирующий характер.

Самостоятельные работы (с/р) рассчитаны на 15 – 20 минут урока и призваны обеспечить контроль усвоения небольших разделов темы. Некоторые задания имеют повышенный уровень сложности. В этом случае количество заданий и время, отводимое на их выполнение, определяются учителем. Исследовательские работы (и/с) позволяют в более доступной, «осязаемой» форме подготовить учащихся к восприятию нового материала. Каждая работа состоит из 5 – 15 заданий, сгруппированных вокруг исследования одного объекта.

Очень хорошо рассмотрены темы «Квадратный трехчлен», «Деление многочлена на двучлен и многочлен». Подобранный практический материал разнообразный и посилен слабому ученику. Дополнительные задачи так же рассмотрены, вначале даются примеры с подобными заданиями, затем сами задания, которые с каждым разом усложняются. Встречаются задания олимпиадного уровня, которые рассчитаны на сильного ученика.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: теоретический и практический (задачный) материал, представленный в рассмотренных учебниках почти идентичен, но наилучшим способом, на наш взгляд, материал изложен в учебнике С. М. Никольского. В нем были рассмотрены следующие вопросы: свойства делимости; признаки делимости; простые и составные числа; делители натурального числа; наибольший общий делитель; наименьшее общее кратное. При рассмотрении каждого из них, авторы уделяют много внимания формированию доказательных умений. Хотя доказательство свойств и признаков делимости проводится на числовых примерах, методы, используемые при доказательстве, могут быть распространены на общий случай.

В учебниках «Алгебра» для 7-9 классов, предназначенных для общеобразовательных школ, эта тема почти не затрагивается на базовом уровне. Также следует отметить, что в основной школе завершается изучение методов решения текстовых задач, однако при изучении курса алгебры (на базовом уровне) почти не рассматриваются текстовые задачи на использование свойств делимости, понятий наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного.

С другой стороны, анализ методической литературы показал, что задачи по теории делимости представлены в государственной итоговой аттестации. Например, в 2015 году в демоверсии ЕГЭ на базовом уровне предложена задача «Сумма цифр трехзначного числа делится на 13. Сумма цифр 5 также делится на 13. Найдите число »; в 2016 году – задача «Приведите пример трехзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9».

Для устранения указанного «пробела» целесообразно рассматривать задачи по теории делимости при изучении ряда тем школьного курса «Алгебра 7-9».

Для этого в содержании школьного курса алгебры 7-9 классов были выявлены темы, при изучении которых можно использовать задачи по теории делимости.

В курсе «Алгебра 7» – темы «Формулы сокращенного умножения», «Разложение на множители», «Решение линейных уравнений», «Система линейных уравнений».

Например, при изучении формул сокращенного умножения можно предложить учащимся следующую задачу.

*Задача*. Докажите, что число составное:

.

В курсе «Алгебра 8» – тема «Квадратные уравнения».

Квадрат разности корней уравнения равен Найдите *p*.

В курсе «Алгебра 9» – темы «Квадратный трехчлен», «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Например, при изучении в рамках темы «Квадратный трехчлен» вопроса, связанного с выделением полного квадрата двучлена, можно рассмотреть задачу.

*Задача* (С. Жермен). Доказать, что каждое число вида есть

составное (если не равно ).

**Глава 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

* 1. **Содержание элективного курса по математике «Элементы теории чисел» для 10 класса**

Элективный курс «Элементы теории чисел» является предметноориентированным и предназначен для расширения и углубления теоретических и практических знаний учащихся.

*Актуальность курса* определяется значимостью понимания школьниками особого положения теории чисел в школьной программе. Но программа школьного курса ограничена и не позволяет в полном объеме рассмотреть задачи на использования алгоритма Евклида при нахождении НОД и решении диофантовых уравнений, также подробного рассмотрения признаков делимости чисел, многочленов, сравнения чисел. Эти задачи часто включаются в письменные работы при поступлении в различные учебные заведения и вызывают у учащихся трудности, обусловленные необходимостью понимания закономерностей, наличия навыка анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, систематичности и последовательности в решении, умения объединять рассмотренные частные случаи в единый результат. Разрешить трудности учащихся и рассмотреть вышеназванные задачи может данный элективный курс «Элементы теории чисел».

*Место и роль курса в образовательном процессе*. Курс «Элементы теории чисел» предназначен для подготовки школьников к прохождению ЕГЭ, в частности решения задач 18. Реализуется в 10 классе. Он, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса алгебры, направлен на систематизацию знаний, реализацию внутрипредметных связей, а с другой – служит для построения индивидуального образовательного пути. Курс формирует такие умения и навыки как логичность и самостоятельность мышления, умение обобщать и систематизировать, навыки в решении задач. Предлагаемый курс, как и любой другой, улучшает имидж и повышает конкурентоспособность школы, так как реализация данного курса дает более глубокие знания по математике, увеличивает уровень интеллектуального развития учащихся, что благоприятствует их дальнейшему обучению.

Цель курса: перейти от репродуктивного уровня усвоения материала (простого решения задач) к творческому; научить применять знания алгоритма Евклида, свойств простых и составных, дружественных, фигурных, совершенных чисел, составление диофантовых уравнений при решении задач.

Приобретенные в процессе практической деятельности знания и умения помогут учащимся в формировании ключевых компетенций: готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности в реальной жизни для решения практических задач.

Содержание курса рассчитано на один год (10 класс) и полностью соответствует требованиям к уровню подготовки выпускников по математике на ступени основного общего образования, а именно: свободно, правильно излагать свои мысли в устной и письменной форме, развивать свою мыслительную деятельность, абстрактное мышление. Это связанно с тем, что в это время учащиеся располагают всеми знаниями, которые нужны на начальном этапе изучения элективного курса и углубят свои знания на следующем этапе элективного курса. Данный курс не дублирует программы по математике, а лишь опирается на знания и умения, полученные учащимися, совершенствует их, восполняет возникшие проблемы в обучении, давая широкий простор для развития самостоятельности и творческой деятельности. Учащиеся более подробно знакомятся с теорией чисел (с делимостью чисел, с делимостью многочленов и сравнением).

Курс рассчитан на 1 год: 58 часов в год, 2 часа в неделю. Занятия проводятся в форме лекций учителя, бесед с учащимися, практикумов, консультаций.

Задачи курса:

1. Расширение кругозора школьников;

2. Развитие культуры математического мышления на основе решения творческих задач;

3. Формирование естественнонаучного мировоззрения.

4. Развитие навыков исследовательской деятельности;

5. Подготовка к ЕГЭ;

 6. Систематизация и обобщение знаний и умений по математике.

Дидактические принципы курса:

1. Подача материала от простого к сложному.

2. Принцип систематичности и последовательности.

3. Принцип поэтапного обучения логике решения задач.

Планируемые образовательные результаты.

По окончании курса учащиеся будут **знать**:

1. базовые приемы решения задач по изученным элементам теории;
2. методы решения нестандартных задач по рассматриваемым аспектам теории чисел.

По окончании курса учащиеся будут **уметь**:

1. строить модель решения исследуемой задачи и проводить его анализ; 2. применять рассмотренную методику решения, в частности, при решении заданий 18 типа ЕГЭ.

Тематическое планирование.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование темы | Кол-во часов |
|  1 | Введение в историю математики | 1 |
| 2 | Свойства делимости. Решение задач на доказательство. | 4 |
| 3 | НОД и НОК. Основные свойства. | 3 |
| 4 | Алгоритм нахождения НОД и НОК | 4 |
| 5 | Признаки делимости на 4, 6, 7 и на 8. | 4 |
| 6 | Признаки делимости на 11, 12, …, 17. | 4 |
| 7 | Признаки делимости. Обобщение и систематизация. Решение задач. | 4 |
| 8 | Решение олимпиадных задач. | 4 |
| 9 | Признаки делимости суммы и разности. | 3 |
| 10 | Признаки делимости суммы, разности и произведения. | 3 |
| 11 | Делимость многочленов. Разложение многочленов на множители. | 4 |
| 12 | Нахождение НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида. | 4 |
| 13 | Сравнение чисел и их свойства. | 2 |
| 14 | Сравнение чисел и их свойства. Самостоятельная работа. | 2 |
| 15 | Сравнение первой степени | 4 |
| 16 | Обобщение, систематизация и коррекция знаний по изученным темам. | 2 |
| 17 | Решение задач №18 КИМ ЕГЭ | 6 |
|  | **Итого:** |  **58** |

Программа элективного курса для 10 класса представлена в Приложении № 1.

Остановимся более подробно на описании содержания некоторых тем.

Тема №1. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Алгоритм Евклида.

Основными задачами учащихся при изучении данной темы являются:

- практика и совершенствование использования алгоритма нахождения НОД двух чисел путем их разложения на простые множители;

- формирование способностей к корректировке допущенных ошибок;

- ознакомление с алгоритмом Евклида (в качестве второго способа нахождения НОД двух положительных целых чисел).

Наибольшим общим делителем (НОД) двух чисел и называется такое наибольшее натуральное число, на которое нацело делится как число a, так и число b.

Алгоритм нахождения НОД двух натуральных чисел [30, С. 199]:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) выписать все простые числа, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений;

3) каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел;

4) записать произведение полученных степеней.

Пример. Найти

Решение. ; .

Из этих разложений числа с наименьшими показателями степени это 2 2 , 32 и 111 . Поэтому .

Таким же способом находится НОД трех и более натуральных чисел.

Отыскание НОД двух натуральных чисел путем разложения их на простые множители несложно сделать, если эти числа невелики. Однако для ряда многозначных чисел найти их канонические разложения на простые множители бывает трудно. Поэтому существует способ отыскания НОД, требующий лишь выполнения последовательного деления с остатком. Этот способ предложил Евклид, и его называют алгоритмом Евклида [31, С. 6].

В рассмотренных нами учебниках для 6 и 7 классов алгоритм Евклида не рассматривается (за исключением учебника Г.К. Муравина для 6 класса) – НОД находится только путем разложения на простые множители, однако этот метод нужно рассматривать с классами с углубленным изучением математики.

Нахождение НОД двух чисел и с помощью алгоритма Евклида:

1) производится деление «уголком» большего числа на меньшее (предположим, что );

2) если остаток от деления на оказался не равен нулю, то выполняется последующее деление, где делимым выступает , а делителем выступает остаток (если числа разделились нацело, то число является наибольшим общим делителем чисел и );

3) следует аналогично выполнять дальнейшее деление до тех пор, пока остаток не будет равен нулю. Тогда НОД исходных чисел и будет последний остаток от деления, не равный нулю.

 Например, найти НОД (64; 48) с помощью алгоритма Евклида.

 64 48

 48 1

 48 16

 48 3

 0 НОД (64; 48) = 16 (последний отличный от нуля остаток).

Если у двух натуральных чисел и НОД равен единице, то такие числа называются *взаимно простыми числами*.

Пример. НОД (30; 19) = ?

Решение.

 и – взаимно простые числа.

*Теорема о делимости взаимно простых чисел*. Если число делится на каждое из двух взаимно простых чисел и , то оно делится и на их произведение . [32, С. 24].

Тема № 2. Свойства делимости суммы, разности и произведения чисел

Целью изучения этого пункта является ознакомление с простейшими свойствами делимости чисел, а непосредственная задача педагога – это подготовить учащихся к доказательству делимости суммы, разности и произведения.

В результате изучения материла слабые ученики должны знать формулировки и уметь применять эти свойства при выполнении заданий, а сильные ученики должны уметь их доказывать, опираясь на определение делимости чисел [33].

Все свойства делимости (так же как и само определение делимости) учащимся уже должны быть известны. Так, свойство «Если , то» фактически является следствием из умножения числа на единицу, а свойство «Если , то » просто показывает возможность деления нуля на любое число , отличное от нуля ( так как ), объясняемое еще в 3-ем классе начальной школы. Вся новизна материала заключается только в том, что все эти и последующие свойства делимости строго доказываются.

При объяснении этих свойств, критически важно демонстрировать их на конкретных примерах, а также применять в решении школьных задач.

В учебнике Г.К. Муравина [34] для 6 класса, в одном из заданий в качестве теоремы указано следующее:

«Если делится на , а , в свою очередь, делится на , то тоже делится на » [34, С. 58].

Это – одно из свойств делимости, которое называется транзитивность: если и , то . Для этого свойства, следует сделать запись на доске:

Также делимость обладает такими свойствами как:

*рефлексивность*, то есть любое целое число делится само на себя: ,

*антисимметричность*, и , то либо , либо .

Например, числа и одинаково делятся друг на друга без остатка, только если или .

 Свойство делимости суммы натуральных чисел. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число [30, С. 172].

Если и , то .

Например, , . Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число [35, c. 36].

Например, 4 ⋮ 2, 6 ⋮ 2, 7 не делится на 2 ⇒ сумма (4 + 6 + 7) не делится на 2.

Свойство делимости разности натуральных чисел. Если и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность делится на это число.

Если и , то .

Например, .

Свойство делимости произведения натуральных чисел.

 Если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Если или , то .

Например, , а .

Результатом изучения этой темы должно стать умение учащихся пользоваться свойствами делимости чисел; также они должны уметь применять свойства делимости суммы, разности и произведения при решении различных задач.

В этом пункте продолжается дальнейшее рассмотрение свойств делимости, которые применяются при решении разнообразных задач. Некоторые из этих задач уже рассматривались в курсе 7 класса, например, задачи на доказательство в пункте 22 «Вычисления. Доказательство тождеств» в учебнике Ю.Н. Макарычева [36, С. 135]. Но, стоит заметить, что в 7 классе решение этих задач опиралось на интуитивные представления учащихся о делимости чисел, без строгих определений и знаний свойств делимости. Возвращаясь к этим задачам в 8 классе, учащиеся уже осознанно применяют свойства делимости. Кроме того, ряд задач носит принципиально новый характер [37].

При объяснении свойств нужно снова напомнить учащимся, то на множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения, то есть сумма, разность и произведение любых целых чисел также является целым числом.

После доказательства каждого из свойств, не лишним будет задать учащимся конкретные вопросы, которые будут побуждать их к использованию свойств делимости. Например, «Что можно сказать о делимости на 11 числа ?» или «Почему сумма (125 + 525 + 23) не делится на 5?» и т.д. Обязательно нужно обратить внимание учеников на то, что обратное свойству делимости суммы утверждение не верно, так как не верно, что если , то и . Для доказательства этого достаточно привести один контрпример.

В учебнике Ю.Н. Макарычева за 8 класс свойство делимости разности чисел и доказывается через представления разности через сумму [35, С. 36], то есть имеется в виду если , то и . Однако учащимся можно показать и более продвинутое доказательство.

Доказательство. Если , то существует такое целое число , что . Если , то существует такое целое число , что .

Тогда , где - целое число (как разность двух целых чисел).

И по определению делимости чисел получаем, что [37].

Свойства делимости суммы и разности схожи по содержанию и доказательству, поэтому их часто формируют в одно свойство делимости: если и , то . В некоторых случаях это свойство может пригодится при решении задач следующего типа: известно, что , требуется доказать, что . В этом случае доказывается, что или , после чего делается вывод о том, что делится на .

В доказательстве свойства о неделимости суммы целых чисел применяется метод от противного. Рекомендуется точно определить, что дано, а что требуется доказать, после чего сформулировать противоположное утверждение.

Дано: , не делится на .

Доказать: сумма чисел не делится на .

Доказательство. Предположим, что . Так как и , то по свойству делимости суммы получим . Так как по допущению и , то разность этих чисел (по свойству делимости разности) также делится на , то есть, то есть .

 Но утверждение , противоречит условию. Следовательно, допущение не верно, а верно то, что сумма не делится на , что и требовалось доказать [37].

Тема № 3. Сравнения по модулю и свойства.

Число делится на натуральное с остатком , если , причем и . Чтобы найти остаток у числа при делении на , нужно из вычесть ближайшее число, не превосходящее , делящееся на .

Например: Если мы хотим найти остаток для числа при делении на , то ближайшее не превосходящее число, которое делится на , равно , поэтому и остаток будет равен .

Аналогично это работает и для отрицательных . Если , то ближайшее не превосходящее число, которое делится на 3, равно -6 (не -3, потому что мы ищем не превосходящее число), то есть −5 = (−3) · 2 + 1, поэтому у -5 остаток 1 при деление на 3.

Целые числа, разность которых делится на , называются сравнимыми по модулю . Запись: .

Например:

;

;

;

.

Свойства сравнений.

1. числа и дают одинаковые остатки по модулю .

Замечание. Несмотря на это свойство, если вы хотите проверить сравнимы ли два числа по модулю, то чаще всего удобнее рассматривать их разность, а не пытаться найти остатки для каждого.

Доказательство. Раз , , то делится на и делится на . Значит их сумма тоже делится на , то есть .

1. .

Доказательство. Аналогично раз , , то делится на и делится на . Значит их разность делится на , то есть .

1. .

Доказательство. Так как , то (выражение означает, что делится на ), значит и .

Доказательство. Воспользуемся предыдущим свойством. Так как , то и так как , то . Значит у и одинаковые остатки при делении на и у и одинаковые остатки при делении на , поэтому у и одинаковые остатки при делении на m и отсюда следует, что .

1. для любого натурального.

Доказательство. Применяем последнее свойство для и и получим, что . Доказали для . Теперь опять применим последнее свойство для и и получим, что . Так можно делать сколько угодно раз, поэтому для любого натурального .

Теперь давайте решим пару задач, используя доказанные свойства.

Пример. Найдите остаток от деления: a) на 3; b) на 7.

Доказательство.

a) . По последнему свойству можно возводить в степень, поэтому .

b) . По последнему свойству можно возводить в степень, поэтому . Но — это не остаток, так как оно меньше , но дает остаток при делении на (так как ), поэтому тоже дает остаток 6 при делении на 7.

Пример. Решить сравнение по определению:

1. ; б) .

Решение:

а) Напомним определение сравнения: пусть число целое, больше 1, говорят, что целые числа сравнимы друг с другом по модулю , если и обозначают (mod ).

У нас задано (mod 14). По определению сравнения получаем но число нечетное при любом. Значит, 14 не может делить

 Следовательно, сравнение не разрешимо.

б) Задано (mod 7).

 По определению имеем: т.е. .

 *х* – целое число, значитдолжно делится на 3.

 Возьмем в качестве тогда

По теореме: сравнение разрешимо если сравнение разрешимо, то оно имеет единственное решение по модулю .

, то система имеет единственное решение по модулю 7.

**Ответ:** а) решения нет; б) .

* 1. **Педагогический эксперимент и его результаты**

Педагогический эксперимент по обучению элективного курса «Элементы теории чисел» проводился на базе МБОУ «СОШ № 67» г. Ижевска.

В эксперименте приняли участие учащиеся 10 «А» и 10 «Б» класса в составе 52 человека, в течение 2021-2022 учебного года.

Цель опытно-экспериментальной работы: доказать эффективность внедрения в учебный процесс элективного курса «Элементы теории чисел»

Задачи исследования:

1. Провести входную диагностическую контрольную работу № 1. Полный текст которой представлен в Приложении № 2.
2. Провести формирующий этап опытно-экспериментальной работы по формированию умений и навыков.
3. Провести контрольный этап опытно-экспериментальной работы, заключающийся в диагностике динамики уровня сформированности умений и навыков решения задач по теории чисел у учащихся 10 «А» и 10 «Б» классов.
4. Проанализировать полученные результаты.

В соответствии с гипотезой и задачами исследования был разработан план педагогического эксперимента, который включал в себя три этапа: констатирующий, формирующий и контрольный.

Констатирующий этап эксперимента проводился в сентябре 2021 учебного года. Его целью являлась проверка базовых знаний учащихся по теме «Теория чисел».

На формирующем этапе – октябрь (2021 года) – апрель (2022 года), проводилась работа по формированию умений и навыков работы с заданиями по теме «Теория чисел» во время изучения элективного курса «Элементы теории чисел».

Контрольный этап – май 2022 года, ставил своей целью проверку усвоения школьников 10 «Б» класса экспериментальной программы.

**Констатирующий этап**

На констатирующем этапе эксперимента (сентябрь 2021 года) проверялись исходные знания учащихся по теме: «Теория чисел».

Цели этапа: выявить уровень подготовки учащихся к теме «Теория чисел», проверить базовые знания учащихся по данной теме.

В связи с этой целью проводилась входная диагностическая работа № 1 (см. Приложение № 2) по проверке базовых знаний, умений и навыков.

Данная работа включала в себя 7 заданий. Задания были направлены на такие темы, как простые и составные числа, признаки делимости, НОД и НОК, алгоритм Евклида. На выполнение данной работы отводилось 40 минут.

Приведем пример и решение одного из задания.

Пример. Может ли произведение целого числа и суммы его цифр равняться 90309?

Решение. 1) Пусть число делится на 3, тогда по признаку делимости сумма его цифр тоже делится на 3, но тогда произведение этого числа и суммы его цифр делится на 9, а число 90309 не делится на 9 (сумма его цифр не делится на 9).

2) Пусть число не делится на 3, тогда сумма его цифр тоже не делится на 3, тогда произведение этого числа и суммы его цифр не делится на 3, но число 90309 делится на 3.

Ни один из рассмотренных случаев невозможен. Так как других случаев не бывает, то такого и быть не может.

Ответ: Нет

Результаты проведенной работы представлены в таблице 1.

**Таблица №1.**

**Результаты выполненных** **заданий диагностической** **работы №1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  №  задания | 10 «А» класс 26 учащихся   | 10  «Б» класс 26 учащихся   |
| Абсолютное число | % | Абсолютное число | % |
| 1  | 18 | 69% | 19 | 73% |
| 2  | 17 | 65% | 17 | 65% |
| 3  | 18 | 69% | 19 | 73% |
| 4  | 20 | 77% | 21 | 81% |
| 5  | 17 | 65% | 16 | 62% |
| 6  | 16 | 61% | 15 | 58% |
| 7  | 17 | 85% | 18 | 69% |

По данной таблице можно сделать вывод о том, что уровень знаний обучающихся по теме: «Теория чисел» находится на среднем уровне. При чем уровень знаний 10 «А» и 10 «Б» класса практически одинаковый.

Для выявления у учащихся исходного уровня знаний, умений и навыков по данной теме, были разработаны следующие критерии.

Были выделены три уровня:

**Высокий:** учащиеся полностью справились со всеми семью заданиями, не допустив ни одной ошибки 91% - 100% выполнения всех заданий.

**Средний**: учащиеся выполнили 71% - 90% всех заданий.

**Низкий:** учащиеся выполнили меньше 50% - 70% всех заданий.

Результаты дифференцирования знаний и умений по уровням представлены в таблице № 2.

**Таблица № 2.**

**Уровень знаний и умений учащихся по результатам диагностической работы №1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уровень знаний/умений | 10 «А» класс 26 учащихся  | 10 «Б» класс 26 учащихся |
| Абсолютное число | % | Абсолютное число | % |
| Высокий  | 0 | 0% | 0 | 0% |
| Средний | 19 | 73% | 18 | 69% |
| Низкий | 7 | 27% | 8 | 31% |

**Формирующий этап**

На формирующем этапе (октябрь 2021 – апрель 2022 года) проводились занятия на элективных курсах в 10 «Б» классе (экспериментальном классе) МБОУ «СОШ №67».

Для определения содержания работы было изучено перспективное планирование занятий по теме: «Теория чисел» на период с 1 октября 2021 года по 29 февраля 2022 года. На основании этой программы было разработано 58 элективных занятий. Занятия были дифференцированы по темам «Делимость чисел», «Уравнения в целых числах», «Сравнение чисел».

Цель этапа: провести курс элективных занятий по теме «Элементы теории чисел».

Данный курс занятий был направлен на формировании у учащихся основных навыков, необходимых для решений заданий по теме: «Теория чисел». На основании данного курса учащиеся познакомились с основными методами решения задач, рассмотрели задачи на применение данных методов. После прохождения элективного курса учащиеся стали рационально подходить к заданиям, а именно строить модель решения исследуемой задачи и проводить ее анализ.

**Контрольный этап**

Контрольный этап – май 2022 года, позволил подвести итог работе, и ставил своей целью проверку усвоения 10 «Б» класса (экспериментального класса) программы обучения теме «Теория чисел».

Учащимся 10 «А» и 10 «Б» (экспериментального класса) была предложена диагностическая работа № 2 (см. приложение 2), включающая в себя 8 заданий, и что актуально, подобными заданиями ЕГЭ, связанных с темой «Теория чисел». Время, которое отводилось на выполнение заданий, составило 60 минут.

 Приведем пример и решение одного из задания.

Пример. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Решение: Пусть – три последовательных натуральных числа, где . Имеем . Докажем, что произведение кратно 3.

I способ. . Так как произведение трех последовательных чисел делится на 3 и кратно 3, то кратно 3.

II способ. Разобьем множество натуральных чисел на три класса: .

1) Если , то очевидно, что кратно 3.

2) Если , то кратно 3.

3) Если , то кратно 3.

Поскольку произведение кратно 3, то кратно 9, что и требовалось доказать.

 Результаты диагностической работы №2 представлены в таблице 3.

**Таблица № 3.**

**Сравнительный анализ результатов выполненных заданий учащимися 10 «А» и 10 «Б» (экспериментального класса)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № задания | 10 «А» класс 26 учащихся  | 10 «Б» класс 26 учащихся |
| Абсолютное число | % | Абсолютное число | % |
| 1 | 16 | 62% | 24 | 92% |
| 2 | 18 | 69% | 23 | 88% |
| 3  | 17 | 65% | 25 | 96% |
| 4  | 14 | 54% | 26 | 100% |
| 5  | 15 | 58% | 25 | 96% |
| 6 | 17 | 65% | 24 | 92% |
| 7 | 15 | 58% | 23 | 88% |
| 8 | 14 | 54% | 24 | 92% |

На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что экспериментальный класс 10 «Б» значительно лучше справился с диагностической работой №2 по сравнению с 10 «А» классом, у которого не проводилось элективных занятий по данной тематике.

Вновь были выделены аналогичные три уровня оценивания данной работы:

**Высокий:** учащиеся полностью справились со всеми восьмью заданиями, не допустив ни одной ошибки 91% - 100%.

**Средний:** учащиеся выполнили 71% - 90% всех заданий.

**Низкий**: учащиеся выполнили меньше 50% - 70% всех заданий.

**Таблица №4.**

**Сравнительный анализ уровня знаний и умений обучающихся 10«А» и 10 «Б» класса (экспериментального класса).**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уровень знаний/умений  | 10«А» класс 26 учащихся  | 10 «Б» класс 26 учащихся  |
| Абсолютное число | % | Абсолютное число | % |
| Высокий | 0 | 0% | 16 | 61% |
| Средний | 12 | 46% | 10 | 39% |
| Низкий | 14 | 54% | 0 | 0% |

Можно сделать вывод о том, что динамика уровня знаний и умений учащихся 10 «Б» класса после эксперимента значительно улучшилась, а вот динамика 10 «А» класса снизилась. Учащиеся 10 «Б» класса успешно справились с заданиями. Уровень знаний и умений в преобладающей степени стал высоким. На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что обучающиеся 10 «Б» (экспериментального класса) в полной мере усвоили курс элективных занятий по теме: «Теория чисел», успешно выполнив диагностическую работу №2. Также, сравнивая диагностические работы №1 и №2, можно заметить тот факт, что после проведения эксперимента наблюдается положительная динамика, следовательно у обучающихся повышается уровень базовых знаний по данной теме. Веденный элективный курс демонстрирует положительный результат, что имеет важное значение не только при обучении, но и при подготовке учащихся к ЕГЭ.

**Заключение**

В данной работе была поставлена цель рассмотрение элементов теории чисел с точки зрения сравнительного анализа представления в школьном курсе.

В первой главе рассмотрены теоретические основы теории чисел, подлежащие рассмотрению в школьном курсе. Выяснено, что традиционно в школьном курсе изучаются делимость, неполное частное, признаки и свойства делимости, НОД и НОК. А также глава была посвящена выборочному анализу тематического содержания и логики изучения элементов теории чисел в школьных учебниках математики базового уровня.

Рассмотрены также особенности проектирования элективных курсов по математике, их типология и значение для отдельных категорий обучающихся разных профилей. Выяснено, что практика составления 18 задачи ЕГЭ строится в основном на материале теории чисел углубленного уровня. С этой целью мы предложили элективный курс «Теория чисел» для школьников 10 класса, рассчитанный на 68 часов.

 Таким образом, задачи данного исследования решены в полной мере, цель достигнута.

В заключение отметим, что данная программа и методические разработки занятий могут быть востребованы учителями математики в организации и проведении занятий элективного курса по теме «Теория чисел».

В процессе проделанной работы в соответствии с ее целями и задачами были получены следующие выводы и результаты:

1. Пропедевтика, то есть введение в теорию делимости происходит еще в начальной школе, когда учащиеся изучают доли, пытаясь разделить количество каких-либо предметов между собой или выделяя часть или несколько частей от одного предмета.

2. В нынешней учебной структуре основными для изучения теории делимости являются 5 и 6 классы. В последующих классах средней школы встречаются только элементы теории делимости, такие как деления дробей, разложение многочленов на множители и деление многочленов.

3. При изучении теории делимости важно соблюдать правильную последовательность подачи материала, для его полноценного усвоения учащимися. К примеру, нельзя рассматривать темы НОД и НОК не изучив тему «Простые и составные числа».

4. Элективный курс по теме «Теории делимости» может быть использован для объяснения учащимся с высокой успеваемостью тех тем, которые не обязательны для усвоения на текущей учебной стадии, но которые обязательно пригодятся в дальнейшем.

5. Изложение элементов теории делимости в школьных учебниках мало чем отличается друг от друга. Все определения элементарны и их сложно представить в каком-то ином, непривычном виде. Сделав выбор в пользу одного учебника, тем самым педагог не упустит чего-то важного из другого. Однако при разработке факультативных занятий и элективных курсов, правильный выбор учебной литературы крайне важен. Наилучшим вариантом будет выбор методических и дидактических дополнений от автора выбранного школьного учебника.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел : учеб. пособ. М. : Мир, 1987. 416 с.

2. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для студентов – заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов (Н. А. Казачек,Г. Н. Перлатов, 52 Н. Я. Виленкин, А. И. Бородин; Под ред. Н. Я. Виленкина) —2-е изд.—М.: Просвещение, 1984. -192 с.

3. Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел/В.А. Александров, С.М. Горшенин.-М.: Просвещение, 1972.- 81 с.

4. Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. —М.: МЦНМО, 2002.— 264 с.

5. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. - М.: Мир, 1987. - 416 с.

6. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.— 1985.— 504 с. - 3-е изд.доп.

7. Брадис В. М., Минковский В. Л., Еленев Л. К. «Ошибки в математических рассуждениях» / В.М. Брадис, В.Л. Минковский, Л.К. Еленев. - М.: Наука, 1967. – 367с.

8. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб - М.: Просвещение, 1966. - 384 с.

9. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.- 176 с.

10. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов - М.- Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952. – 380с.

11. Виленкин Н.Я. и др. Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/ Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288с.: ил.

12. Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов М.К., Ященко И.В. «ЕГЭ 2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра», Москва, Издательство МЦНМО, 2013. - 256 стр. 53

13. Воробьев Н. Н. « Признаки делимости». — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — Т. 38. — 94 с.

14. Вейль А. Основы теории чисел. - М.: Мир, 1972 –408 с.

15. Гашков С.Б., Чубариков В.Н., Садовничий В.А. (ред.) Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. 3-е издание, исправленное. - Дрофа, 2005. - 320 с.

16. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел М.: Просвещение, 1964. - 144 с.

17. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел.- М.: Наука, 1965. -176с., ил.

18. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. - М.: Издательский центр "Академия", 2007. - 304 с.

19. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2- х томах, т. 2. Геометрия — М.: Наука. 1987.—416 с.

20. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2- х томах, т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ.— М.: Наука, 1987.—432 с.

21. Кочева А. А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч. III. Для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1984. — 41 с.

22. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел.- М.: «Просвещение», 1970. - 128 с.

23. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с., ил.

24. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учебное пособие для студентов физико– математических специальностей педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с., ил.

25. Михелович Ш.Х. Теория чисел. -2-е изд. - М.: Высшая школа, 1967. - 336 с. 54

26. Нестеренко Ю. В. Теория чисел : учебник для студ. высш. учеб.заведений / Ю. В. Нестеренко. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. - 272 с.

27. Оре О. Приглашение в теорию чисел: Пер с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 128 с.

28. Просветов Г. И. Теория чисел: задачи и решения: Учебнопрактическое пособие М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2010. — 72 с.

29. Чубаров И. А. «Математика. Решение задания №4 для 8-х классов (2000-2001 учебный год)» МФТИ, 2001.

30. Сластенин В. А., Исаев И. Ф., Шиянов Е. Н. Педагогика : учеб. пособ. для студ. высш. пед. учеб. заведений. М. : Издательский центр «Академия», 2007. 576 с.

31. Зубарева, И.И. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – Москва: Мнемозина, 2009. – 264 с.

32. Миракова, Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в VVIII классах: пособие для учителя / Т.Н. Миракова. – Львов: Журнал «Квантор», 1991. – 95 с.

33. Сикорский, К.П. Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7-8 классов / К.П. Сикорский. – Москва: Просвещение, 1974. – 367 с.

34. Муравин, Г.К. Математика. 6 класс: методическое пособие к учебнику Г.К. Муравина, О.В. Муравиной «Математика. 6 класс» / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2010. – 271 с.

35. Муравин, Г.К. Математика. 6 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2014. – 319 с.

36. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику. 8 класс: учебное пособие для учащихся и классов с углубленным изучением математики / Под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – Москва: Просвещение, 1996. – 207 с.

37. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 8-е изд. – Москва: Мнемозина, 2008. – 335 с.

38. Феоктистов, И.Е. Делимость чисел // Математика в школе - 2009. - № 8. – С. 47 – 58.

39. Жафяров, А.Ж. Компетентностный подход к изучению школьного курса алгебры // Педагогическое образование и наука - 2011. - № 8. – С. 64 – 68.

40. Цулина И. В. Элективные курсы в системе школьного математического образования // Молодой ученый. 2009, № 11. С. 318–326.

 *Приложение № 1.*

**Рабочая программа для 10-11 класса**

1. **Пояснительная записка**

Элективный курс «Элементы теории чисел» является предметноориентированным и предназначен для расширения и углубления теоретических и практических знаний учащихся.

*Актуальность курса* определяется значимостью понимания школьниками особого положения теории чисел в школьной программе. Но программа школьного курса ограничена и не позволяет в полном объеме рассмотреть задачи на использования алгоритма Евклида при нахождении НОД и решении диофантовых уравнений, также подробного рассмотрения признаков делимости чисел, многочленов, сравнения чисел. Эти задачи часто включаются в письменные работы при поступлении в различные учебные заведения и вызывают у учащихся трудности, обусловленные необходимостью понимания закономерностей, наличия навыка анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, систематичности и последовательности в решении, умения объединять рассмотренные частные случаи в единый результат. Разрешить трудности учащихся и рассмотреть вышеназванные задачи может данный элективный курс «Элементы теории чисел».

*Место и роль курса в образовательном процессе*. Курс «Элементы теории чисел» предназначен для подготовки школьников к прохождению ЕГЭ, в частности решения задач 18. Реализуется в 10 классе. Он, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса алгебры, направлен на систематизацию знаний, реализацию внутрипредметных связей, а с другой – служит для построения индивидуального образовательного пути. Курс формирует такие умения и навыки как логичность и самостоятельность мышления, умение обобщать и систематизировать, навыки в решении задач. Предлагаемый курс, как и любой другой, улучшает имидж и повышает конкурентоспособность школы, так как реализация данного курса дает более глубокие знания по математике, увеличивает уровень интеллектуального развития учащихся, что благоприятствует их дальнейшему обучению.

Цель курса: перейти от репродуктивного уровня усвоения материала (простого решения задач) к творческому; научить применять знания алгоритма Евклида, свойств простых и составных, дружественных, фигурных, совершенных чисел, составление диофантовых уравнений при решении задач.

Приобретенные в процессе практической деятельности знания и умения помогут учащимся в формировании ключевых компетенций: готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности в реальной жизни для решения практических задач.

Содержание курса рассчитано на один год (10 класс) и полностью соответствует требованиям к уровню подготовки выпускников по математике на ступени основного общего образования, а именно: свободно, правильно излагать свои мысли в устной и письменной форме, развивать свою мыслительную деятельность, абстрактное мышление. Это связанно с тем, что в это время учащиеся располагают всеми знаниями, которые нужны на начальном этапе изучения элективного курса и углубят свои знания на следующем этапе элективного курса. Данный курс не дублирует программы по математике, а лишь опирается на знания и умения, полученные учащимися, совершенствует их, восполняет возникшие проблемы в обучении, давая широкий простор для развития самостоятельности и творческой деятельности. Учащиеся более подробно знакомятся с теорией чисел (с делимостью чисел, с делимостью многочленов и сравнением).

Курс рассчитан на 1 год: 58 часов в год, 2 часа в неделю. Занятия проводятся в форме лекций учителя, бесед с учащимися, практикумов, консультаций.

*Основные цели курса:*

1. Расширение кругозора учащихся;
2. Развитие математического мышления и формирование активного познавательного интереса к предмету;
3. Воспитание мировоззрения и ряда личностных качеств, средствами углубленного изучения математики.
4. Приобщение учащихся к исследовательской деятельности;
5. Подготовка одаренных школьников к олимпиадам;
6. Систематизация, обобщение знаний и умений по математике.

Обучение по данной программе имеет ряд методических особенностей:

1. Подача материала выстраивается от простого к сложному.

2. Новый материал дается на основе того, что уже изучено.

3. Постепенно вырабатываются навыки правильного абстрактного и логического мышления.

4. Поэтапное обучение логике построения решения математических задач.

5. Знакомство с творческой деятельностью и самостоятельностью.

6. Каждое правило и утверждение сопровождается соответствующими примерами.

7. Набор тем полностью соответствует школьной программе, охватывает все возможные варианты делимости для этого этапа обучения.

*Основные требования к знаниям и умениям учащихся.*

Для успешного усвоения этих тем ученик должен иметь следующий исходный уровень знаний и умений:

– знать определения делимости чисел;

– знать признаки делимости на 5, на 10 и на 2;

– знать признаки делимости на 3 и на 9;

– знать понятие делителя, делимого и кратного;

– знать определение простого и составного числа;

– знать алгоритм разложения на простые множители;

– знать определение НОД и НОК;

– знать определение понятия взаимно простые числа;

– уметь находить НОД и НОК;

– уметь применять алгоритм разложения на простые множители;

– уметь применять признаки делимости;

– уметь отличать простое число от составного;

– уметь находить остаток и частное при делении многочленов;

– уметь проводить преобразования буквенных выражений;

– уметь распознавать признаки делимости;

– уметь применять основные факты математического анализа для решения задач, применения признаков делимости и их комбинация;

–уметь использовать свойства сравнения для решения задач.

*Планируемые результаты.*

По окончании курса учащиеся будут **знать**:

1. основные приемы решения задач по элементам теории чисел;

2. нестандартные методы решения задач;

**уметь:**

3.строить и анализировать предполагаемое решение поставленной задачи;

4. пользоваться на практике методикой решения задач по элементам теории чисел;

5. решать задачи 18 КИМ ЕГЭ.

1. **Тематическое планирование.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование темы | Кол-во часов |
|  1 | Введение в историю математики | 1 |
| 2 | Свойства делимости. Решение задач на доказательство. | 4 |
| 3 | НОД и НОК. Основные свойства. | 3 |
| 4 | Алгоритм нахождения НОД и НОК | 4 |
| 5 | Признаки делимости на 4, 6, 7 и на 8. | 4 |
| 6 | Признаки делимости на 11, 12, …, 17. | 4 |
| 7 | Признаки делимости. Обобщение и систематизация. Решение задач. | 4 |
| 8 | Решение олимпиадных задач. | 4 |
| 9 | Признаки делимости суммы и разности. | 3 |
| 10 | Признаки делимости суммы, разности и произведения. | 3 |
| 11 | Делимость многочленов. Разложение многочленов на множители. | 4 |
| 12 | Нахождение НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида. | 4 |
| 13 | Сравнение чисел и их свойства. | 2 |
| 14 | Сравнение чисел и их свойства. Самостоятельная работа. | 2 |
| 15 | Сравнение первой степени | 4 |
| 16 | Обобщение, систематизация и коррекция знаний по изученным темам. | 2 |
| 17 | Решение задач №18 КИМ ЕГЭ | 6 |
|  | **Итого:** | **58** |

**III. Содержание программы**

 1. Введение в историю математики.

2. Делимость чисел. Свойства делимости. Решение задач на

доказательство. НОД и НОК. Основные свойства НОД и НОК.

Алгоритм нахождения НОД и НОК. Признаки делимости на 4, 6, 7 и 8.

Признаки делимости на 11, 12, …, 17. Обобщение и систематизация.

Решение задач. Решение олимпиадных задач.

3. Делимость многочленов. Разложение многочленов на множители.

Нахождение НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида. 4.

Сравнение.Сравнение чисел и их свойства. Сравнение первой степени.

Обобщение, систематизация и коррекция знаний по изученным темам.

Решение задач №18 КИМ ЕГЭ.

*Формы контроля знаний учащихся.*

Самостоятельные работы, практические работы.

*Критерии оценивания:*

«Высокий уровень» - школьник проявляет высокий уровень самостоятельности в решении нестандартных задач, при решении практических заданий демонстрирует умение самостоятельно мыслить и искать творческие подходы.

«Средний уровень» - школьник освоил методы и содержание курса на среднем уровне, может решить задания стандартного уровня.

«Низкий уровень» - школьник освоил самые простейшие методы решения задач и заданий по содержанию курса на репродуктивной уровне.

*Тематика индивидуальных проектов:*

1. Магические квадраты.

2. Решето Эратосфена.

3. Дружественные числа.

4. Алгоритм Евклида.

5. Олимпиадные задачи по теории чисел.

7. Работы по теории чисел русских и советских математиков (Л. Эйлер, П.Л. Чебышев, Е.И. Золотарѐв и др.)

8.Сравнимость чисел по модулю.

9. Метод перебора как способ решения уравнений в целых числах.

10. Разложение на множители как способ решения нелинейных уравнений.

*Темы творческих работ:*

1. Составить таблицу простых чисел, больших числа 200 и не превосходящих числа 300.

2. Выведите признак делимости на .

3. Выведите признак делимости на .

4. Выведите признак делимости на 13.

5. Выведите признак делимости на 17.

6. Основные теоремы теории сравнения по модулю.

7. Решение уравнений в целых числах методом перебора.

8. Решение нелинейных уравнений методом разложения на множители.

**Технологическая карта занятия элективного курса по теме «Признаки делимости»**

|  |  |
| --- | --- |
| Тема  | Признаки делимости на 11, 12, 17 |
| Цель занятия | Усвоение знаний в целостной системе, умение использовать имеющиеся знания для доказательства новых  |
| Задачи занятия  | Образовательные: - сформировать представление о признаках делимости чисел 11, 12, 17; - отработать навыки решения задач на признаки делимости чисел 11, 12,17. Развивающие: − развивать умения логически подходить к решению задач, оперировать полученными сведениями; − развивать грамотную математическую речь. Воспитательные: − воспитывать систему математических доказательств, последовательность и аккуратность |
| Тип занятия  | Комбинированный  |
| Планируемые результаты  | Предметные: − применение различных признаков делимости к решению задач; грамотное использование терминологии и математической символики. Метапредметные: Личностные УУД: − формировать учебную мотивацию; − развивать интерес к получению новых знаний. Регулятивные УУД: − понимать учебную задачу урока; − умение давать оценку собственным действиям; − осуществлять поиск правильного решения учебной задачи под руководством преподавателя; − оценивать способы достижения учебной задачи.Коммуникативные УУД: − умение включаться в диалог с одноклассниками и учителем; − умение обосновывать собственную точку зрения; − умение слушать себя и других; − осуществлять контроль чужих и самоконтроль собственных действий. Познавательные УУД: − ориентироваться в своей системе знаний; − осуществлять поиск и анализ объектов; − умение преобразовывать информацию из одной формы в другую: переводить естественный язык на язык условия, готовить письменные и устные ответы на вопросы. |
| Организация пространства  | Учебный кабинет |
| Ресурсы  | 1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /[С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. –М.: Просвещение, 2021. – 430 с. 2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. – М.: Просвещение, 2021. – 415 с. 3. Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия. Книга для учащихся 10–11-х классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1996. 4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. - М.: МЦНМО. 2004. - 560 с. |

**Структура и ход занятия**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Этап занятия**  | **Задачи этапа**  | **Деятельность учителя**  | **Деятельность учащихся**  | **Формируемые УУД** |
| 1 | Организационный момент | Включение учащихся в учебную деятельность | Приветствует учащихся. Проверяет подготовленность учащихся и кабинета к учебному занятию. Озвучивает цели, тему и план занятия | Приветствуют учителя. Записывают тему урока в тетрадь. | Личностные: − самоорганизация; Регулятивные:  − организация своей учебной деятельности;  − умение выделять целевой и нравственный аспекты в поведении; − целеполагание. Коммуникативные: − умение слушать и вести диалог; Познавательные:  − мотивация к познанию нового. |
| 2 | Этап актуализации и пробного учебного действия | Актуализация опорных знаний и способов действий. | Фронтальный опрос, устная работа с классом. - Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы: 1.Сформулируйте основные признаки делимости на 3,9,4,8,7,5,10. 2. Выберите из чисел, написанных на доске, делящиеся на 9,4,7: 14500, 168, 175, 182 3. Назовите все делители числа 36. 4. Назовите все двузначные числа кратные числу 18. | Учащиеся отвечают на поставленные вопросы. | Личностные: − самоопределение. Регулятивные:  − целеполагание;  - выделение и осознание уже изученного; - оценка затруднений в собственной и чужой работе. Коммуникативные: − умение грамотно выражать свои мысли;  − умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: − анализ и выделение необходимой информации. |
| 3 | Объяснение нового материала | Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока. | - Темой нашего сегодняшнего задания будет «Признаки делимости на 11, 12,…, 17». Это новая для вас тема. Однако признаки делимости на 2,3,4,5,6,7,8,9 мы уже знаем. Осталось разобраться с двузначными числами второго десятка. Как вы считаете, как можно сформулировать признак делимости на 12?Правильно. Почему?Верно.Давайте теперь попробуем сформулировать признак делимости на 14: Совершенно верно. Теперь давайте решим, к каким из оставшихся чисел 11, 13, 15, 17 можно применить такой же подход?Да, верно. В чем трудность формулировки правила для 11, 13 и 17? Верно. Признак делимости на 11: На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечётные места, либо равна сумме цифр, занимающих чётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11. **Примеры.** (Учитель объясняет у доски) Так как в числе 123321 сумма цифр четных позиций равна сумме цифр нечетных, то оно делится на 11. По аналогичной причине число 123322 не удовлетворяет признаку делимости на 11 Если в записи трёхзначного числа сумма боковых цифр равна цифре в середине, значит, число делится на 11. А ответ будет состоять из тех самых боковых цифр. Например: (Учитель объясняет у доски) 198÷11, т.к. сумма боковых: 1+8 = 9, 9 — цифра в середине. При этом 198 = 11 ⋅18. 253 ÷ 11 т. к. сумма боковых: 2 + 3 = 5, 5 — цифра в середине. При этом 253 = 11 ⋅23Признак делимости на 13: Число делится на 13 ⇔ когда результат вычитания последней цифры умноженной на 9 из этого числа без последней цифры делится на 13. Например: 286 делится на 13 так как . Признак делимости на 17: Число делится на 17 ⇔ когда если разность числа кроме последней цифры справа и последней цифры, умноженной на пять, делится на 17 Пример: (Учитель объясняет у доски) . Подумайте, как можно сформулировать этот признак по другому? Верно.Число делится на 19 ⇔ когда число его десятков (число без последней цифры) в сумме с удвоенной последней цифрой делится на 19. Например *делится на 19* | Учащиеся формулируют предположения и записывают правильные утверждения в тетрадь Учащиеся выдвигают свои предположения. Число будет делиться на 12, тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и 4 (без остатка). Потому что 3 и 4 – взаимно простые.Число будет делиться на 14, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и 7 (без остатка). Потому что 2 и 7 – взаимно простые. К 15, потому что 15 = 3 ⋅ 5, а 3 и 5 – взаимно простые Трудность в том, что эти числа простые сами по себе Записывают формулировку теоремы в тетрадь. Учащиеся записывают доказательство теоремы за учителем.Записывают примерычисло делится на 17 ⇔ когда разность между числом его десятков и упятерённым числом единиц делится на 17. | Личностные: − оценивание усваиваемого материала. Регулятивные:  − контроль и оценка процесса и результатов деятельности. Коммуникативные: − умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: − структурирование собственных знаний |
| 4 | Первичное закрепление | Применение полученных знаний в процессе работы. | - Мы частично изучили теоретический материал, и приступаем к решению задач. - Решим следующие задачи. 1. Проверить делимость чисел на 11: 1354, 1356531 2. Проверить делимость чисел на 12: 1479852, 1476 3. Проверить делимость чисел на 13: 1598, 1603173: 4. проверить делимость на 14: 15274, 1723 5. проверить делимость на 17: 2091, 15274 6. проверить делимость на 19: 20729, 2338 7. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 11? Учитель обсуждает с учащимися план решения каждой задачи. Сопровождает ученика при решении задачи у доски. | Один из учащихся решает задачи на доске, остальные ведут запись в тетрадях. | Личностные:  − самоопределение;  − смыслообразование. Регулятивные:  − планирование своей деятельности для решения поставленной задачи;  − контроль и коррекция полученного результата;  − саморегуляция. Коммуникативные:  − умение слушать и вступать в диалог; − участие в коллективном обсуждении проблем. Познавательные:  − умение структуризировать знания;  − выбор наиболее эффективных способов решения задач. |
| 5 | Информация о домашнем задании | Обеспечение понимание детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания. | Задает дозированное домашнее задание. -Выучить признаки делимости. Решить следующие задания: 1. Какие нечетные числа делятся на 19? 2. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 13? 3. Самостоятельно сформулировать признак делимости на 16. | Ученики записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению. | Личностные:  − нравственно-этическая ориентация. Регулятивные:  − оценка промежуточных результатов; − саморегуляция. |
| 6 | Рефлексия | Дать качественную оценку работы класса и отдельных учеников. | Учитель подводит итоги работы в классе. | Учащиеся отвечают на вопросы, задают вопросы, если они есть, анализируют свою работу на уроке. | Личностные:  − смыслообразование. Регулятивные:  − оценка осознания уровня и качества усвоения;  − контроль. |

**Технологическая карта занятия элективного курса по теме «Решение задач №18 КИМ ЕГЭ»**

|  |  |
| --- | --- |
| Тема  | Решение задач №18 КИМ ЕГЭ |
| Цель занятия | Развитие творческих способностей школьников при решении нестандартных задач. |
| Задачи занятия  | Образовательные: - формировать умения решать нестандартные задачи ЕГЭ с использованием математического аппарата теории чисел; - формировать умения применять теоретические положения математики к решению задач повышенного уровня. Развивающие: - расширять кругозор школьников, развивать внутреннюю потребность к получению новых знаний по математике; - формировать потребность в решении нестандартных задач в целях подготовки к ЕГЭ и получения дальнейшего образования; - развивать грамотность математической речи, умение слушать себя и других, формулировать логические выводы. Воспитательные: - воспитывать уважение к чужому мнению; - воспитывать культуру математических записей и высказываний; - показать значимость знаний, возможность их применения на практике. |
| Тип занятия  | Комбинированный  |
| Планируемые результаты  | Предметные: - применение теоретических положений элементов теории чисел к решению задач; - грамотное использование терминологии и математической символики. Метапредметные: Личностные УУД: - формировать учебную мотивацию; - развивать интерес к получению математических знаний. Регулятивные УУД: - понимать учебную математическую задачу; - оценивать собственные действия; - производить поиск решения учебной задачи под руководством преподавателя; - производить оценку методов решения учебной задачи. Коммуникативные УУД: - умение коммуницировать с одноклассниками и преподавателем;- умение обосновывать свою точку зрения; - умение выслушивать альтернативные решения и выносить им оценку; - осуществлять собственный самоконтроль и контроль действий одноклассников. Познавательные УУД: - ориентироваться в собственной системе знаний; - осуществлять анализ и поиск информации и выделение математических объектов; - преобразовывать информацию из одной формы в другую: переводить естественный язык на язык математической модели, готовить письменные и устные ответы на вопросы. |
| Организация пространства  | Учебный кабинет |
| Ресурсы  | 1. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2022. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2022 года/ Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухов, С.О. Иванов, Е. Г. Коннова, Е.М. Фридман, Д. И. Ханин, Н. И. Авилов, С. В. Дерезин, А. М . Домашенко, А. Г Корянов, В. М. Кривенко, Н. М. Резникова, К. А. Талипова, А. П. Уваровский, Е. Э. Чурилкина, А. Ф. Ягудин:- Ростов-на-Дону: Легион, 2022. – 416 с. 2. Садовничий Ю. В. ЕГЭ. Математика. Задание 21. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю. В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 126 с.  |

**Структура и ход задания**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Этап занятия**  | **Задачи этапа**  | **Деятельность учителя**  | **Деятельность учащихся**  | **Формируемые УУД** |
| 1 | Организационный момент | Включение учащихся в учебную деятельность. | Приветствует учащихся. Проверяет подготовленность учащихся и кабинета к учебному занятию. Озвучивает цели, тему и план занятия | Приветствуют учителя. Записывают тему урока в тетрадь. | Личностные: − самоорганизация; Регулятивные:  − организация своей учебной деятельности;  − умение выделять целевой и нравственный аспекты в поведении; − целеполагание. Коммуникативные: − умение слушать и вести диалог; Познавательные:  − мотивация к познанию нового. |
| 2 | Этап актуализации  | Актуализация опорных знаний и способов действий. | Фронтальный опрос, устная работа с классом. - Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы: 1.Сформулируйте основные признаки делимости на 3,9,4,8,7,5,6,10.2. Сформулируйте основные признаки делимости на 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 193. Сформулируйте определения НОД, НОК 4. Укажите способ определения НОД, НОК | Учащиеся отвечают на поставленные вопросы. | Личностные: − самоопределение. Регулятивные: − целеполагание; - выделение и осознание уже изученного; - оценка затруднений в собственной и чужой работе.Коммуникативные: − умение грамотно выражать свои мысли; − умение слушать и вступать в диалог. Познавательные:− анализ и выделение необходимой информации. |
| 3 | Объяснение нового материала | Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока. | - Темой нашего сегодняшнего задания будет «Подготовка к решению задач ЕГЭ». Эта тема как правило опирается на знания признаков делимости и всех связанных с ними понятий и определений, а также может опираться на прогрессии. Как решение 18-го задания требует внимательного изучения текста задачи, умения проводить его анализ и использовать основные изученные факты применительно к тексту. Задание 18 содержит в себе три подзадачи (пункты) а), б) и в). Пункты а) и б), оцениваются по 1 баллу, традиционно предлагается решить несложную задачу на построение примера или обосновать невозможность построения. Пункт в), оцениваемый в 2 балла, сложнее. - Давайте приступим к решению задач. |  | Личностные: − оценивание усваиваемого материала. Регулятивные:  − контроль и оценка процесса и результатов деятельности. Коммуникативные: − умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: − структурирование собственных знаний. |
| 4 | Применение знаний при решении практических задач. | Установление правильности и осознанности усвоения учебного материала. | - Ребята, а сейчас я предлагаю вам задания для самостоятельного решения. Учитель контролирует процесс решения задач у доски. Задача 1. При каких значениях число 90x0y01 делится нацело на 11? Задача 2. Найдите все трехзначные числа, кратные 7 и представимые в виде суммы квадрата и куба одного и того же целого числа. Задача 3. Коля умножил некоторое натуральное число на соседнее с ним натуральное число, и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение равное n . а) может ли модуль разности чисел m и n равняться 6? б) может ли модуль разности чисел m и n равняться 13? в) какие значения может принимать модуль разности чисел m и n? Задача 4. Может ли дробь (a+c)/(b+d) быть в 11 раз меньше, чем сумма a/b+c/d? | Учащиеся по очереди решают данные задачи у доски с помощью учителя. | Личностные:  − положительное отношение к проделанной работе. Регулятивные: − саморегуляция;  − планирование своей деятельности для решения поставленной задачи. Коммуникативные:  − умение слушать и вступать в диалог. Познавательные:  − выбор наиболее эффективных способов решения задач. |
| 5 | Информация о домашнем задании | Обеспечение понимание детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания. | Учитель задает дозированное домашнее задание. 1. Может ли четырехзначное число, записанное цифрами 4,6,х,у, записанными в произвольном порядке, быть равно 46 (40х+у)? 2.Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 183. Докажите, что если натуральное k делится на 999999999, то в его записи более 8 цифр отличны от 0 4. Существует ли десятичное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу? | Ученики записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению. | Личностные:  − нравственно-этическая ориентация. Регулятивные:  − оценка промежуточных результатов; − саморегуляция. |
| 6 | Рефлексия | Дать качественную оценку работы класса и отдельных учеников. | Организует самооценку учениками деятельности на уроке. Фиксируется степень соответствия поставленной цели и результатов деятельности | Оценивают свое эмоциональное состояние и свою деятельность на уроке | Личностные: − осознание учащимися практической и личностной значимости результатов каждого этапа урока, − умение оценить себя, − видеть свои ошибки. Регулятивные: − умение делать выводы. |

*Приложение №2*

**Входная диагностическая контрольная работа № 1.**

1. Разложите на простые множители числа:

а) 13104;

б) 17325;

в) 9373;

г) 14497 .

2. Может ли произведение целого числа и суммы его цифр равняться 90309?

3. Можно ли в числе 1\*21934 поставить вместо звёздочки цифру так, чтобы полученное число делилось на 11?

4. Найдите целое частное и остаток от деления:

а) 121 на 5;

б) -218 на 17;

в) 54321 на 6;

г) -127 на 3.

5. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) 1400 и -132;

б) 4444 и 222;

в) 14, -48 и -8;

г) 12, 333 и 1580.

6. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю и найдите их сумму.

7. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите НОД и укажите два целых числа , таких что :

а) ;

б) .

**Диагностическая контрольная работа № 2.**

1. Известно, что число m делится на 9. Простым или составным является число m?
2. Докажите, что при любом целом n выражение  делится на 5.
3. Найти НОД и НОК следующих чисел:

а) 1073, 3683, 34481;

б) 420, 126, 525;

в) 529. 1541, 1817;

г) 528, 628, 124.

1. Найти число и сумму натуральных делителей натурального числа:

а) 1524; б) 1640;

в) 1280; г) 2488.

1. Сократите дробь при помощи разложения на простые множители:

а) ; б) ;

в) ; г) .

1. Решить в целых числах уравнение:

а) ; б) ;

в) ; г) .

1. Найдите остаток от деления числа на 17.
2. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

*Приложение № 3.*

**Примерная контрольная работа по итогам изучения элективного курса «Элементы теории чисел» для 10 класса.**

Вариант 1.

1. Найдите каноническое разложение числа .

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел

3. Найдите все простые числа из промежутка используя «решето Эратосфена».

4. Найти наибольший общий делитель чисел и его линейное представление (с проверкой):

а) ; б) .

5. Докажите свойство: если для целых чисел и существую целые и такие, что , то .

6. Решите уравнение в целых числах:

7. Найдите остаток от деления числа на 17.

# 8. Решите уравнение в целых числах: .

Вариант 2.

1. Найдите каноническое разложение числа .

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел

3. Найдите все простые числа из промежутка , используя «решето Эратосфена».

4. Найти наибольший общий делитель чисел и его линейное представление

(с проверкой):

а) ; б) .

5. Докажите свойство: если , то для любого целого .

6. Решите уравнение в целых числах: .

7. Найдите остаток от деления числа на 3.

8. Решите уравнение в целых числах: .