Государственное учреждение образования «Средняя школа №12
г.Новополоцка»

Уравнение
в целых числах

Авторы: Дубино Андрей, Дубино Алексей,
учащиеся 8 «Г» класса
Руководитель Березнёва Ольга Николаевна,
учитель математики

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование диофантовых уравнений – уравнений в целых числах - интересовало математиков с древних времен до современности. Общего подхода к решению таких уравнений открыть не удалось, не зря их называют неопределенными.

Решение таких уравнений рассматривают и для натуральных значений переменных. В этом случае количество решений ограничено. Какое количество натуральных решений может быть у диофантового уравнения? Такой вопрос стал главным в нашей работе.

Основой для нашего исследования послужила задача Минского открытого турнира юных математиков 2022 года, в которой предлагалось изучить количество натуральных решений уравнения $x^2 - y^2 = N$ для разных значений N. Этапы исследования совпадают с этапами (пунктами) решения задания.

Цель: найти способ (формулу), позволяющий определить количество натуральных решений уравнения $x^2 - y^2 = N$.

Задачи исследования:

- выяснить при каких условиях уравнение имеет натуральные решения;
- сравнить количество натуральных решений уравнения для разных значений N;
- найти все значения N (меньшие 1000000), при которых уравнение имеет заданное количество решений (три натуральных решения);
- обобщить полученные результаты для чисел других видов.

Объект исследования: диофантово уравнение.

Предмет исследования: уравнение вида $x^2 - y^2 = N$.

Методы исследования:

- анализ источников информации;
- анализ по четности и нечетности;
- преобразование алгебраических выражений;
- методы решения уравнений в натуральных числах;
- выделение полного квадрата;

Гипотеза: для любого натурального числа N можно определить количество натуральных решений уравнения $x^2 - y^2 = N$, не решая это уравнение.

1. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ РАВНА СТЕПЕНИ ДВОЙКИ

Определим натуральное значение n так, чтобы уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$ имело ровно 2022 решения в натуральных числах.

Решение: $x^2 - y^2 = 2^n$

$(x - y)(x + y) = 2^n$

Из $x, y \in N$ следует, что $x + y \in N$ и $x + y > x - y$

т. к. $2^n \in N$, то $x - y \in N$, значит, что $x > y$

Тогда решениями уравнения будут решения систем:

$\begin{cases} x\text{-}y=1 \\ x+y=2^n \end{cases}$ $\begin{cases} x\text{-}y=2 \\ x+y=2^{n-1} \end{cases}$ $\begin{cases} x\text{-}y=2^2 \\ x+y=2^{n-2} \end{cases}$ …. и так далее.

Первая система решений в натуральных числах не имеет, т.к. сумма и разность натуральных чисел x и y – это числа одной чётности.

Так как числа вида $2^n -$ четные, то $x + y$ и $x - y$ должны быть чётными, а 1 – нечетное число.

Значит, количество решений уравнения равно количеству пар чётных неравных множителей, на которые разбивается 2^n

Эти множители являются делителями 2^n . Делители 2^n: 1, 2^1,2^3,2^3, ..., 2^n. Количество делителей равно n+1.

а) Если n – четное, то имеется делитель без пары: n=2k ($k \in N$), $2^n=2^{2k}=(2^k)^2$.

2^k – делитель без пары. Вычитаем 1 из n+1.

Значит, при $n -$ *четном* число пар делителей $\frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$.

Т.к. в паре 2^n и 1, 1 – нечетное, то убираем еще одну пару.

$\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ – количество пар четных делителей числа 2^n, т.е. количество решений уравнения.

Решим уравнение:

$$\frac{n}{2} - 1 = 2022$$

$$n = 4046$$

б) Если $n -$ *нечетное,* то все делители числа 2^n имеют пару. Тогда число пар $\frac{n+1}{2}$. Исключив пару 2^n и 1, получим $\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)$ - количество решений.

$$\frac{n+1}{2} - 1 = 2022$$

$$n = 4045$$

Ответ: 4045 и 4046.

2. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ РАВНА СТЕПЕНИ ТРИДЦАТИ ШЕСТИ

Найдем натуральное значение n такое, что уравнение $x^2 - y^2 = 36^n$ имеет а) 49, б) 199, в) 2047 решений в натуральных числах.

Решение: $x^2 – y^2 = 36^n = (2^2 3^2)^n = 2^{2n} 3^{2n}$

(2n+1)(2n+1) – общее количество делителей числа $2^{2n}3^{2n}$;

(2n+1)(2n+1) –1 – количество делителей, имеющих пару, так как делитель 2^n3^n пары не имеет;

$\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2}$ – количество пар делителей;

1+2n – количество пар, в которых один из делителей нечетный (это пары вида 3^k и 2^n3^{n-k}, где k = 0; 1; 2;…);

$\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2} - 1 - 2n$ – количество пар, в которых оба делителя четные, равное количеству решений уравнения.

Чтобы найти n решим уравнения

а) $\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2} - 1 - 2n = 49$

$$\frac{4n^2 + 2n + 2n + 1 - 1}{2} - 2n = 50$$

$$\frac{4n^2 + 4n}{2} - 2n = 50$$

$4n^2+4n–4n=100$

$4n^2=100$

$n^2=100/4$

$n^2=25$

n=5

Ответ:5

б)

$$\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2} - 1 - 2n = 199$$

$$\frac{4n^2 + 2n + 2n + 1}{2} - 2n = 200$$

$$\frac{4n^2 + 4n}{2} - 2n = 200$$

$4n^2+4n - 4n=400$

$4n^2=400$

$n^2=400/4$

$n^2=100$

n=10

Ответ:10

в)

$$\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2}-1-2n=2047$$

$$\frac{4n^2+2n+2n+1-1}{2}-2n=2048$$

$$\frac{4n^2+4n}{2}-2n=2048$$

$4n^2+4n-4n=4096$

$4n^2=4096$

$n^2=4096/4$

$n^2=1024$

$n=32$

Ответ:32

3. СРАВНИМ КОЛИЧЕСТВО РЕШЕНИЙ

А) Докажем, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^n$ имеет больше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$.

Решение:

Так как 2017 - это простое нечетное число, то количество его делителей равно n+1 и все они нечетные.

Тогда количество пар делителей при n – четном равно $\frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$, что равно количеству решений уравнения.

При n – нечетном количество пар делителей равно $\frac{n+1}{2}$, то есть количество решений уравнения – $\frac{n+1}{2}$.

2 – это простое четное число. Количество его делителей также равно n+1.

При четном n количество пар делителей равно $\frac{n}{2}$, при нечетном - $\frac{n+1}{2}$. Но среди этих пар есть пара 1 и 2^n, которая не дает натуральных решений уравнения $x^2 - y^2 = 2^n$. Поэтому количество решений уравнения при четном n равно $\frac{n}{2} - 1$, а при нечетном равно $\frac{n+1}{2} - 1$. (см п.1)

И при четном и нечетном n количество решений второго уравнения на 1 меньше, чем первого.

А значит, количество решений уравнения $x^2 - y^2 = 2017^n$ больше, чем уравнения $x^2 - y^2 = 2^n$ на одно решение.

Б) Докажите, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^{4n}$ имеет меньше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 72^n$.

Решение.

4n+1 - количество делителей числа 2017^{4n}.

Так как есть один делитель без пары (2017^{2n}), то количество пар неравных делителей будет 4n.

4n/2 = 2n количество пар делителей или количество решений уравнения $x^2 - y^2 = 2017^{4n}$.

$72^n = 3^{2n}2^{3n}$

2^{3n} имеет 3n+1 делитель, 3^{2n} имеет 2n+1 делитель.

(2n+1)(3n+1) – количество делителей числа $3^{2n}2^{3n}$

$\frac{(2n+1)(3n+1)}{2}$ – количество пар делителей, если n – нечетное.

$\frac{(2n+1)(3n+1)-1}{2}$ – количество пар делителей, если n – четное.

2n+1 – количество пар делителей, в которых один из делителей нечётный.

Тогда $\frac{(2n+1)(3n+1)}{2}-(2n+1)$ или $\frac{(2n+1)(3n+1)-1}{2}-(2n+1)$ – количество пар делителей, в которых оба делителя чётные, что равно количеству решений уравнения $x^2-y^2=72^n$.

Найдем разность количеств решений уравнений при нечетном n:

$$\frac{(2n+1)(3n+1)}{2}-(2n+1)-\ 2n\ =\frac{6n^2+2n+3n+1}{2}-2n-1-2n=$$

$$=3n^2+1n+1{,}5n+\frac{1}{2}-2n-1-2n=3n^2-1{,}5n-\frac{1}{2}=$$

$$=3(n^2-0{,}5n-\frac{1}{6})=3((n^2-2\cdot 0{,}25+\frac{1}{16})-\frac{1}{16}-\frac{1}{6})$$

$$=3(\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{11}{48})=3\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{11}{16}$$

Так как n ϵ N, то наименьшее n=1. Чем больше n, тем больше значение полученного выражения, т.к. $\left(n-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$

При n=1 будет $3\left(1-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{11}{16}=3\cdot\left(\frac{9}{16}\right)-\frac{11}{16}=\frac{27}{16}-\frac{11}{16}=1>0$, значит, $\frac{(2n+1)(3n+1)}{2}-(2n+1)-2n>0$ при натуральных нечетных значениях n.

Найдем разность количеств решений уравнений при четном n:

$$\frac{(2n+1)(3n+1)-1}{2}-(2n+1)-\ 2n$$

$$=\ \left(\frac{6n^2+2n+3n+1-1}{2}\right)-2n-1-2n=$$

$$=3n^2+1n+1{,}5n-2n-1-2n=3n^2-1{,}5n-1$$

$$=3\left(n^2-0{,}5n-\frac{1}{3}\right)==3\left(\left(n^2-2n\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=3\left(\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{3}\right)==3\left(n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{19}{16}$$

n ϵ N, наименьшее четное n=2.

При n=2 будет $3\left(2-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{19}{16}=3\left(\frac{49}{16}\right)-\frac{19}{16}=\frac{147}{16}-\frac{19}{16}=\frac{49}{8}>0$. При больших значениях n значение разности будет еще больше. Значит,

$\frac{(2n+1)(3n+1)-1}{2}-(2n+1)-2n>0$ при четных n.

Таким образом, и при четном и при нечетном n количество решений уравнения $x^2-y^2=72^n$ будет больше, чем количество решений уравнения $x^2-y^2=2017^{4n}$.

4. УСЛОВИЕ РАВЕНСТВА РЕШЕНИЙ

Определим натуральное значение n такое, что уравнения $x^2 - y^2 = 20\ 000$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имеют одинаковое количество решений в натуральных числах.

Решение.

$$x^2 - y^2 = 4^n$$

$4^n=2^{2n}$

общее количество делителей 2n+1;

количество пар делителей равно $\frac{2n+1-1}{2} = n$;

$(n-1)$ – количество пар, в которых оба делителя четные;

$(n\ -1)$ – количество решений уравнения $x^2–y^2=4^n$.

$$x^2 - y^2 = 20\ 000.$$

$20000=2^5 5^4$;

2^5 имеет 6 делителей;

5^4 имеет 5 делителей;

$2^5 5^4$ имеет 30 делителей;

30/2=15 количество пар делителей.

Имеется 5 пар делителей, в которых 1 делитель нечётный.

15–5=10 – количество решений уравнения $x^2 - y^2 = 20\ 000$.

Так как количества решений уравнений $x^2 - y^2 = 20\ 000$ и $x^2–y^2=4^n$ равны, составим уравнение

$n - 1 = 10$

$n = 11$

Ответ:11

5. НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ, ПРИ КОТОРОМ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ОДИННАДЦАТЬ РЕШЕНИЙ

Определим наименьшее натуральное значение n для которого уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 11 решений в натуральных числах.

Решение.

Так как надо найти наименьшее n, то будем рассматривать числа $2^m \cdot 3^k$, поскольку 2 и 3 наименьшие простые числа, где m, k – целые неотрицательные числа.

Число вида $2^m \cdot 3^k$ имеет (m+1)(k+1) делителей.

Если m и k оба четны, то, чтобы найти количество решений (количество пар четных делителей числа $2^m \cdot 3^k$) нужно из числа (m+1)(k+1) исключить делитель без пары, разделить на 2 и вычесть число (k+1) пар, в которых один из делителей нечетный. Получим

$$\frac{(m+1)(k+1)-1}{2} - (k+1) = 11$$

$$(m+1)(k+1) - 1 - 2k - 2 = 22$$

$$mk + m - k - 1 = 23$$

$$(m-1)(k+1) = 23$$

В целых неотрицательных числах это уравнение имеет решения, если

$\begin{cases} m-1=1 \\ k+1=23 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=23 \\ k+1=1 \end{cases}$

Тогда решения это m=2, k=22 или m=24, k=0.

А n может быть равно $2^2 \cdot 3^{22}$ или 2^{24}.

Если среди чисел m и k хотя бы одно нечетно, то, чтобы найти количество решений (количество пар четных делителей) нужно число (m+1)(k+1) разделить на 2 и вычесть (k+1) - число пар, в которых один из делителей нечетный. Получим

$$\frac{(m+1)(k+1)}{2} - (k+1) = 11$$

$$(m+1)(k+1) - 2k - 2 = 22$$

$$mk + m - k - 1 = 22$$

$$(m-1)(k+1) = 22$$

В целых неотрицательных числах это уравнение имеет решения, если

$\begin{cases} m-1=1 \\ k+1=22 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=22 \\ k+1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=11 \\ k+1=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=2 \\ k+1=11 \end{cases}$

Тогда решения это m=2, k=21 или m=23, k=0 или m=12, k=1 или m=3, k=10.

Тогда n может быть равно $2^2 \cdot 3^{21}$ или 2^{23} или $2^{12} \cdot 3$ или $2^3 \cdot 3^{10}$.

Так как надо найти наименьшее n, то n=$2^{12}\cdot 3$= 12288.

Заметим, что если n будет содержать больше простых множителей, например три, то есть будет иметь вид $2^m\cdot 3^k\cdot p^c$ (p – простое число большее 3), то количество решений уравнения $x^2-y^2=n$ будет равно

$$\frac{(m+1)(k+1)(c+1)}{2}-(k+1)(c+1),$$

при условии, что хотя бы одно из чисел m, k, c нечетно.

Тогда уравнение $\frac{(m+1)(k+1)(c+1)}{2}-(k+1)(c+1)=11$ преобразуется к виду

$$(m-1)(k+1)(c+1)=22$$

Число 22=1·1·22 или 22=1·2·11.

Если (m–1)≠1 , то k или(и) c будут равны нулю и число n будет содержать в разложении не более двух простых множителей 2^{23}, $2^3\cdot 3^{10}$, $2^3\cdot p^{10}$, $2^{12}\cdot 3$, $2^{12}\cdot p$. Наименьшим среди них также является $2^{12}\cdot 3$.

Если (m–1)=1, то число n будет иметь вид $2^2\cdot 3^{21}$, $2^2\cdot p^{21}$, $2^2\cdot 3^{10}\cdot p$, $2^2\cdot 3\cdot p^{10}$. Каждое из этих чисел больше найденного ранее.

Ответ: 12288

6. УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ТРИ РЕШЕНИЯ

Найдем, сколько существует натуральных значений n, меньших 1 000 000 таких, что уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 3 решения в натуральных числах?

Решение.

Рассмотрим несколько случаев

1) Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$,

где p_1, p_2, p_3 $-$ простые нечетные числа и среди чисел k_1, k_2, k_3 хотя бы одно нечетное,

то количество делителей n равно $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)$;

число пар делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}$, что равно количеству решений данного уравнения.

Тогда имеем уравнение $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2} = 3$.

$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) = 6$$

Так как k_1, k_2, k_3 – натуральные числа, а 6 можно разложить только на два множителя (2 и 3) неравных 1, то хотя бы одно из чисел k_1, k_2, k_3 должно быть равно нулю (например, $k_3 = 0$). Это значит, что в разложении числа n на простые множители может быть не более двух разных простых нечетных множителей.

Если 6=3·2, то возможно $k_2 = 2, k_1 = 1$, тогда $n = p_1 p_2^2$.
Так как $n < 1000000$, то таких значений n 21696 штук:

1: p_1=5 p_2=3 (9) n=45

2: p_1=7 p_2=3 (9) n=63

3: p_1=3 p_2=5 (25) n=75

4: p_1=11 p_2=3 (9) n=99

5: p_1=13 p_2=3 (9) n=117

6: p_1=3 p_2=7 (49) n=147

….

21695: p_1=20407 p_2=7 (49) n=999943

21696: p_1=111109 p_2=3 (9) n=999981

Так как шесть можно представить как произведение 6·1, то так же возможно $k_2 = 0, k_1 = 5$, тогда $n = p_1^5$.

В этом случае n = $3^5; 5^5; 7^5; 11^5; 13^5$ – ***пять*** значений n для чисел такого вида.

2) Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$, где p_1, p_2, p_3 $-$ простые нечетные числа и числа k_1, k_2, k_3 четные,

то количество делителей n равно $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)$,

число пар неравных делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)-1}{2}$, что равно количеству решений уравнения.

Тогда имеем уравнение $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)-1}{2} = 3.$

$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) = 7$$

Число 7 нельзя разложить на 3 неравных единице множителя. Значит, и в этом случае в разложении числа n не может быть трех (и более) разных нечетных простых множителей. 7=7·1·1. Значит, $k_2 = k_3 = 0,\ k_1 = 6.$

Тогда $n = {p_1}^6$ и n = 3^6; 5^6; 7^6 - ***три*** значения n.

3) Если $n = 2^{k_1}{p_2}^{k_2}{p_3}^{k_3},\ где\, p_2\ ,p_3$ – простые нечетные числа и среди чисел k_1, k_2, k_3 хотя бы одно нечетное, то количество делителей n равно $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)$, число пар делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}$, количество пар четных делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2} - (k_2+1)(k_3+1)$ что равно количеству решений уравнения.

Тогда имеем уравнение $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2} - (k_2+1)(k_3+1) = 3.$

$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) - 2(k_2+1)(k_3+1) = 6$$

$$(k_1-1)(k_2+1)(k_3+1) = 6$$

Разложить число 6 на три натуральных множителя можно двумя способами 6=1·2·3 или 6=1·1·6.

Пусть 6=3·2·1. Так как, чтобы в разложении n было три разных простых множителя, числу 1 может быть равна только первая скобка (иначе k_2 или k_3 равно нулю).

Значит, $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 1$. Тогда число n $= 2^2{p_2}^2 p_3$.

n<1000000, тогда ${p_2}^2 p_3 < 250000$:

1: p_3=5 p_2=3 (9) n=45

2: p_3=7 p_2=3 (9) n=63

3: p_3=3 p_2=5 (25) n=75

4: p_3=11 p_2=3 (9) n=99

5: p_3=13 p_2=3 (9) n=117

6: p_3=3 p_2=7 (49) n=147

….

6332: p_3=5101 p_2=7 (49) n=249949

6333: p_3=27773 p_2=3 (9) n=249957

Количество значений n равно ***6333***.

Если $k_3 = 0$, то $k_1 = 3, k_2 = 2$ число n $= 2^3{p_2}^2$.

n<1000000, ${p_2}^2 < 125000$ и возможно ***70*** значений n для чисел такого вида (квадрат простого числа менее 125000)

Так же возможно $k_1 = 4, k_2 = 1$, число n $= 2^4 p_2$.

Тогда n<1000000, $p_2 < 62500$. Количество простых чисел меньших 62500 равно ***6274***. Значит, в этом случае будет 6274 значений n.

Если $k_3 = 0$, то $k_1 = 2, k_2 = 5$ число n $= 2^2{p_2}^5$, p = 3,5,7,11 – четыре решения

Если 6=6·1·1, то $k_2 = k_3 = 0, k_1 = 7$. n $= 2^7$ – ***одно*** значение.

4) Если $n = 2^{k_1}{p_2}^{k_2}{p_3}^{k_3}$, *где* p_2 , p_3 $-$ простые нечетные числа и числа k_1, k_2, k_3 четные, то количество делителей числа n будет равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)$, число пар делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)-1}{2}$, число пар четных делителей равно $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)-1}{2} - (k_2 + 1)(k_3 + 1)$, что равно количеству решений уравнения.

Тогда имеем уравнение $\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)-1}{2} - (k_2 + 1)(k_3 + 1) = 3$.

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) - 2(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 7$$
$$(k_1 - 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 7$$

Число 7 можно представить в виде произведения трех множителей, только если два из них равны единицам.

Тогда k_2 или k_3 равно нулю, и $k_1 = 8$. Имеем ***одно*** решение в этом случае = n $= 2^8$.

Или $k_1 = 2$ и $k_2 = 6$. Тогда $n = 2^2{p_2}^6$. Имеем ${p_2}^6 < 250000$, значит, ${p_2}^3 < 500$. $p_2 = 3; 5; 7$. Имеем еще ***три*** решения.

Вывод: три решения уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет в следующих случаях:

$n = 2^2{p_2}^6$
n $= 2^8$
n $= 2^7$
n $= 2^4 p_2$
n $= 2^3{p_2}^2$
n $= 2^2{p_2}^2 p_3$
$n = {p_1}^6$
$n = {p_1}^5$
$n = p_1{p_2}^2$
n $= 2^2{p_2}^5$

Количество значений n равно

3+1+1+6274+70+6333+3+5+21696+4= 34390

Ответ: 34390.

7. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОЛИЧЕСТВО РЕШЕНИЙ

Пусть $F(m)$ — количество решений уравнения $x^2 - y^2 = m$ в натуральных числах. Предложите оценку или дайте точное значение для а) $F(2^k)$, б) $F(3^k)$, в) $F(2^{k_1}3^{k_2})$, г) $F(N)$, где k, k_1, k_2, N — натуральные числа.

Решение. Используя подходы подсчета, описанные в предыдущих пунктах, имеем формулы для количества решений:

а) $F(2^k) = \frac{\mathrm{k}+1}{2} - 1$, если k – нечетное; $F(2^k) = \frac{\mathrm{k}}{2} - 1$, если k – четное.

Б) $F(3^k) = \frac{\mathrm{k}+1}{2}$, если k – нечетное; $F(3^k) = \frac{\mathrm{k}}{2}$, если k – четное

В) $F(2^{k_1}3^{k_2}) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{2} - (k_2+1)$, если среди чисел k_1, k_2, хотя бы одно нечетное;

$F(2^{k_1}3^{k_2}) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)-1}{2} - (k_2+1)$, если числа $k_1, k_2 -$ четные.

Г) $F(N) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)}{2}$,

если $N = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ $-$ простые нечетные числа и среди чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ хотя бы одно нечетное;

$F(N) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)-1}{2}$,

если $N = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ $-$ простые нечетные числа и числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ $-$ четные;

$$F(N) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)}{2} - (k_2+1)\dots(k_m+1),$$

если $N = 2^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}$, где $p_2, \dots, p_m$ $-$ простые нечетные числа и среди чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ хотя бы одно нечетное;

$$F(N) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)-1}{2} - (k_2+1)\dots(k_m+1),$$

если $N = 2^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_{m3}}$, где $p_2, \dots, p_m$ $-$ простые нечетные числа и числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ – четные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования гипотеза подтвердилась: можно определить количество решений уравнения $x^2 - y^2 = N$, не решая его. Количество решений зависит от четности N и от четности степеней простых множителей в его разложении.

Применить результаты нашего исследования можно, например, при изучении прямоугольных треугольников. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 10000$ можно переписать, как $x^2 = y^2 + 100^2$, что является записью теоремы Пифагора для некоторого прямоугольного треугольника. Используя полученные в работе результаты, можно определить количество прямоугольных треугольников с целыми значениями второго катета и гипотенузы.

Исследование диофантовых уравнений актуально до сих пор. Их решение находит применение в криптографии, инженерии, биологии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра 7, И.Г.Арефьева, О.Н.Пирютко, 2017.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BE%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
3. https://lib.brsu.by/sites/default/files/books/%D0%A3%D0%9C%D0%9F%20%D0%93%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%93%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%87%20%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%20%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%B4%D0%B8%D0%BE%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D1%8B%D1%85%20%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D1%80%D0%B8%20%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B5%20%D1%88%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20%D0%BA%20%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D0%B8%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BC.pdf