Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

Лицей №2 Купинского района

Индивидуальный итоговый проект

**Тема: «Теория чисел в школьной математике»**

 **Работу выполнил:** Гладких Егор Романович

ученик 9 «А» инженерно-технологического класса

МБОУ Лицея №2

**Руководитель:** Иванова Елена Петровна

учитель математики

МБОУ Лицей №2

г. Купино

2023

**Оглавление**

**Введение**………………………………………………………………………2-3

**Основная часть**

**1. Обзор информационных источников**……………………........................3-6

**2. Применение теории к решению задач**…………………………………6-13

**3. Вывод**…………………………………………………………………………14

**4. Литература**…………………………………………………………………15

**Введение**

В школьном курсе математики изучается тема «Делимость чисел», в которой рассказывается о признаках, при которых число делится нацело на некоторые числа. Так же при изучении этой темы, ученики знакомятся с понятиями НОК (наименьшее общее кратное) и НОД (наибольший общий делитель). Ученики в основном слабо интересуются данной темой после прохождения её в школе, слабо интересуются задачами, которые можно решить при помощи этой знаний и понимания, как это можно использовать. Мне эта тема интересна из-за того, что я являюсь учащимся специализированного класса, и мы всегда участвуем на олимпиадах по математике. Тем самым я хочу показать, что зная признаки делимости чисел, НОК, НОД и умениями грамотно ими пользоваться можно решать не только школьные задачи, но и задачи, которые предлагаются на различных олимпиадах по математике и на ЕГЭ (Едином Государственном Экзамене) в 11 – ом классе.

**Цель**: показать, что обладая необходимыми знаниями о признаках делимости чисел, можно решать задачи олимпиадного и экзаменационного уровня.

**Объект исследования:** теория чисел

**Предмет исследования:** признаки делимости, НОК, НОД.

**Задачи:**

1. Собрать информацию из литературных и интернет источников.
2. Обработать информацию, составить задачи.
3. Обобщить решения и сами задания в сборник.

**Методы:**

1. Описание.
2. Анализ.

**Гипотеза:** может ли теория чисел помочь в решении задач?

**Основная часть**

**1. Обзор информационных источников.**

**Теория чисел.**

Простые числа, их свойства и связь со всеми натуральными числами изучались Евклидом (3 век до нашей эры). Он считал, что любое число натурального ряда может быть единственным образом представлено как произведение простых чисел: это числа, которые делятся на единицу, и на самих себя, пример: 23 делится на 1 и на 23. В «Началах» Евклид указал способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел, следствием из которого является теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители. С понятием наименьшего общего делителя двух чисел связано понятие их наименьшего общего кратного (НОК). Именно эта часть теории чисел понадобится нам в дальнейшем, для того, чтобы описать признаки делимости и наибольший общий делитель, и наименьшее общее кратное.

**Признаки делимости чисел.**

**На 2**: число четное, то есть оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8.

Пример: 1826:2=913

**На 3**: сумма цифр числа делится на 3.

Пример: 16596=1+6+5+9+6=27, следовательно, число делится на 3.

**На 4**: две последние цифры, которые или нули или образуют число, делящиеся на 4.

Пример: 159728 делится на 4, так как 28:4=24, то 1496:4=39932.

46 не делится на 4, так как ближайшее число, которое делится на 4 – 48.

**На 5**: число должно оканчиваться на 5 или 0.

Пример: 10500 делится на 5, так как число оканчивается на 0.

**На 6**: если число делится и на 2, и на 3, так как 6=2×3.

Пример: 172026 делится на 6, так как 172026 делится и на 2, и на 3.

**На 7**: разница между этим числом без последней цифры и удвоенной последней цифрой делится на 7.

Пример: 31815 делится на 7, так как 3181-10=3171, 317-2=315, 31-10=21, 21 делится на 7.

**На 8**: три последних цифры — 0 или если они образуют число, которое делится на 8. Трёхзначное число делится на 8, если: сумма цифры в разряде единиц, удвоенной цифры в разряде десятков и учетверенной в разряде сотен делится на восемь.

Пример: 53247128 делится на 8, так как 128:8=16

**На 9**: сумма цифр делится на 9.

Пример: 97434 делится на 9, так как 9+7+4+3+4=27, 27:9=3

**На 10**: число оканчивается на 0.

Пример: 80450 делится на 10, так как на конце цифра 0.

**На 11**: сумма цифр стоящих на нечётных местах либо равна сумме цифр, стоящих на чётных местах, либо сумма отличается на число, которое делится на 11.

Пример: 1919896 делится на 11, так как 1+1+8+6=16, 9+9+9=27, 27-16=11, 11:11=1.

**Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.**

Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел – называют наибольшее натуральное число, которое делит нацело (без остатка) данные числа.

Чтобы найти НОД, нужно данные числа разложить на простые множители, и перемножить между собой общие множители для всех чисел.

Пример: найдём НОД (7565,3459)

7565|5 3459|3

1513|17 1153|1153

 89|89 1

 1

Так как общих множителей нет, следовательно, НОД этих чисел – 1.

Другой способ найти НОД называется алгоритм Евклида. Евклид – древнегреческий математик. Алгоритм заключается в следующем: большое данное число делится на меньшее данное число, если деление происходит с остатком, меньшее число делится на остаток, если и это деление происходит с остатком, первый остаток (то на что делили меньшее число) делим на второй остаток (то, что мы получили при делении меньшего числа). Продолжать этот алгоритм до того момента, пока число не разделится на цело, и то число, что разделило нацело и является общим делителем.

Пример: найдём НОД (84624,25624)

|  |  |
| --- | --- |
|  84624 | 25624 |
|  -76872 | 3 |
|  7752 |
|  25624 | 7752 |
| -23256 | 3 |
|  2368 |

|  |  |
| --- | --- |
| 7752 | 2368 |
| -7104 | 3 |
|  648 |

|  |  |
| --- | --- |
| 648 | 424 |
| -424 | 1 |
|  224 |

|  |  |
| --- | --- |
| 424 | 224 |
| -224 | 1 |
|  200 |

|  |  |
| --- | --- |
| 2368 | 648 |
| -1944 | 3 |
| 424 |

|  |  |
| --- | --- |
| 224 | 200 |
| -200 | 1 |
|  24 |

|  |  |
| --- | --- |
| 200 | 24 |
| -200 | 8 |
|  0 |

 Число 8 разделило нацело, то есть без остатка, следовательно, НОД(84624,25624)=8.

Наименьшее общее кратное (НОК) – это наименьшее число, которое делится и на первое, и на второе число.

Алгоритм нахождения НОК:

1. Разложить данные числа на простые множители.
2. Выбрать одну группу множителей.
3. Добавить к ним множители из второй группы, которые отсутствуют в первой.
4. Найти их произведение

Пример: найдём НОК (24945,3604)

1. 24945|5 3604|2

 4989|3 1802|2

 1663|1663 901|17

1. 53|53

 1

1. Получаем 5×3×1663×2×2×17×53=89901780

Ответ: НОК (249,360)=89901780.

Существуют и другие способы найти НОК:

Даны числа a, b, НОК(a,b)=$ \frac{a×b}{НОД (a, b)}$, это выражается из формулы a×b=НОК(a,b)×НОД(a,b).

**2. Применение теории к решению задач**

Начну с задач на признаки делимости, рассмотрим несколько уровней сложности.

**Задача 1**: определи цифру, которую можно подставить вместо \*, чтобы число 52\*73 делилось на 9.

 **Решение**: сначала вспомним признак делимости на 9, число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9. Найдём сумму имеющихся цифр: 5+2+7+3=17, ближайшее число, которое делится на 9 – 18, следовательно, чтобы наше число делилось на 9 нужно вместо \* подставить 1. Формируем ответ.

**Ответ:** 1

**Задача 2**: укажите трёхзначное число, первая цифра которого – 3, и оно делится на 2, на 5, на 9.

 **Решение**: если число делится и на 2, и на 5, то число делится и на 10, так как 10=2×5, по признаку делимости на 10 число оканчивается на 0. Теперь у нас есть число, в котором нам известны теперь два числа: 3\*0. По признаку делимости на 9, сумма цифр в числе должна делится на 9, сумма двух имеющихся чисел равна: 3+0=3, ближайшее число, которое делится на 9 – 9. Найдём нужную цифру: 9-3=6. Мы получили ответ: 360.

**Ответ:** 360

**Задача 3**: найдите наименьшее число, кратное 15, произведение цифр которого больше 40, но меньше 50.

 **Решение**: пусть число имеет вид abcd. Так как число делится на 15, следовательно, число делится на 3 и на 5, так как 15=3×5. По признаку делимости на 5 последнее число – 0 или 5. 0 не берём, ведь тогда произведение цифр будет равно 0. Мы нашли d, запишем данные нам условия и само число в виде двойного неравенства: 40<a×b×c×5<50. Число, которое подходит под эти условия – 45, ведь оно оканчивается на 5 и удовлетворяет данные условия. Мы можем найти a×b×c, a×b×c= 45:5=9, разложим 9 на три простых множителя: 9=3×3×1. Теперь расставим числа в порядке возрастания, чтобы получить наименьшее число:1335. Это и есть наш ответ.

**Ответ:** 1335.

**Задача 4**: назовём натуральное число хорошим, если в нём можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечётных цифр.

**Решение:**

а) По признаку делимости на 11, найдём сумму цифр на чётных и нечётных местах. Нечётные места: 1+3=4. Чётные места: 2+4=6. Найдём разницу: 6-4=2, 2 не делится на 11, следовательно, число 1234 не является хорошим.

б) По признаку делимости на 11 найдём сумму цифр на чётных и нечётных местах. Нечётные места: 1+3+5=8. Чётные места: 2+4=6. Найдём разницу:8-6=2, 2 не делится на 11, следовательно число 12345 не является хорошим.

в)   Всего есть 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Докажем, что число, составленное из всех этих пяти цифр, не может делиться на 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на нечетных местах искомого числа через *a*, а сумму цифр, стоящих на четных местах  — через *b*. Тогда a+b=1+3+5+7+9  а, значит, их разность также нечётна, то есть не равна 0. Заметим  также, что , так как 4 ≤a,b≤ 21. Пусть  тогда одно из чисел *a* и *b*, равно 7, а второе ― 18, (поскольку их сумма равна 25). Но 7 нельзя представить, ни в виде суммы двух, ни в виде суммы трёх нечетных чисел, значит, данный случай невозможен. Значит, разность этих чисел не делится на 11, то есть число 13579 не является хорошим. Таким образом, в искомом числе не более 4 цифр. В этом случае наибольшее возможное число ― 9753. Оно является хорошим, так как 9735 делится на 11. Я ответил на все пункты, формирую ответ.

**Ответ:** а)нет, б) нет, в)9753

**Задача 5**: три брата родились в один и тот же день, но в разные года. Когда старшему из них исполнилось 13 лет, то сумма возрастов всех трёх братьев разделилась на 13. Докажите, что когда среднему из братьев исполнится 13 лет, то сумма возрастов всех братьев не будет кратна 13.

**Решение**: Когда старшему брату исполнилось 13 лет, двум другим братьям было меньше 13 лет. Поэтому сумма их возрастов была меньше 39. Единственное делящееся на 13 число – большее 13, но меньшее 39 – это 26. Значит, когда старшему брату исполнилось 13 лет, трем братьям вместе было 26 лет, а двум младшим вместе – 13 лет. Поэтому среднему брату в этот день было не меньше 7 лет: иначе младший был бы старше среднего. Заметим теперь, что каждый год сумма возрастов братьев увеличивается на 3. Поэтому им никогда вместе не будет 28 лет или 42 года: 28 – 26 или 42 - 26 не делятся на 3. Следующее же делящееся на 14 число 56 слишком велико: 56 лет братьям вместе будет через 10 лет, а 13 лет среднему брату исполнится, самое большее, через 6 лет.

Теперь я хочу показать задачи, для решения которых буду использовать НОК и НОД.

**Задача 1**: в портовом городе начинаются 3 теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй – 20, третий – 12. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трём маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание? Какое количество рейсов сделает каждый теплоход за это время?

**Решение**: для того, что бы узнать наименьшее количество дней, через которые теплоходы снова встретятся, найдем НОК(15,20,12). 15=3\*5, 20=4\*5, 12=4\*3, подчёркиваем общие множители и получаем: 3\*5\*4=60, следовательно, через 60 суток пароходы вместе уйдут в плавание. Найдя общее количество дней, за которые пароходы пройдут неизвестное количество рейсов, и зная количество дней, которые занимает один рейс у каждого из теплоходов, найдем количество рейсов:

1. 60:15=4(рейса) – 1 теплоход.
2. 60:20=3(рейса) – 2 теплоход.
3. 60:12=5(рейсов) – 3 теплоход.

Формируем **ответ**: 60 суток, 4 рейса, 3 рейса, 5 рейсов.

**Задача 2**: из 210 бордовых, 126 белых и 294 красных роз собрали букеты, причём в каждом букете количество роз одного цвета поровну. Какое *наибольшее* количество букетов сделали из этих роз и сколько роз каждого цвета в букете?

**Решение**: для того, чтобы узнать наибольшее количество букетов мы можем получить, используем НОД (210, 126,294)

210|7 126|3 294|7

 30|5 42|7 42|7

 6|3 6|3 6|3

 2|2 2|2 2|2

 1 1 1

В каждой группе есть общие множители:7,3,2. Перемножим их:7\*3\*2=42. Это наибольшее количество букетов, которое можно получить. Теперь найдём количество роз одного цвета в одном букете.

1. 210:42=5(роз) – бордовых.
2. 126:42=3(розы) – белых.
3. 294:42=7(роз) – красных.

Формируем **ответ**: 42 букета, 5 роз, 3 розы, 7 роз.

 **Задача 3**: по кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар чисел нашли их НОД.

а) Могло ли получиться так, что все НОД=1?

б) Могло ли получиться так, что все НОД попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных НОД могло при этом получиться?

**Решение**:

а) Найду НОД(9,16) разложением на множители:

9|3 16|2

3|3 8|2

1 4|2

 2|2

 1

Общих множителей нет, следовательно, НОД(9,16)=1. Найду НОД(16,15) тем же способом.

16|2 15|3

 8|2 5|5

 4|2 1

 2|2

 1

Общих множителей также нет, поэтому НОД(16,15)=1. Найду НОД (15,14) разложением на множители.

15|3 14|2

 5|5 7|7

 1 1

Общих множителей нет, НОД(15,14)=1. Найду НОД (14,13) разложением на множители.

14|2 13|13 – простое число

 7|7 1

 1

Общих множителей нет, НОД(14,13)=1. Найду НОД(13,12) разложением на множители.

13|13 12|3

1 4|2

 2|2

 1

Общих множителей нет, НОД(13,12)=1. Найду НОД(12,11).

12|3 11|11- простое число

 4|2 1

2|2

1

Общих множителей нет, НОД (12,11)=1.Найду НОД (11,18)

11|11 18|3

 1 6|3

 2|2

 1

Общих множителей нет, НОД(11,18)=1. Найду НОД(18,17).

18|3 17|17 – простое число

 6|3 1

 2|2

 1

Общих множителей нет, НОД(18,17)=1. Найду НОД(17,10).

17|17 10|5

1. 2|2

1

Общих множителей нет, НОД(17,10)=1. Мы показали, что может получиться так, что все НОД=1 при записи: 9,16,15,14,13,12,11,18,17,10.

б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных НОД есть НОД (18,9), найдем его по алгоритму Евклида.

|  |  |
| --- | --- |
|  18 | 9 |
| -18 | 2 |
| 0 |  |

Нацело разделило 9, следовательно, НОД(18,9)=9.

в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, НОД(11,13,17)=1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех НОД=1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причём четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.

Я ответил на все пункты, могу формировать ответ.

**Ответ**: а)да, б)нет, в)7.

**Вывод**

Я ознакомился с Евклидовой теорией чисел, знаю признаки делимости, процесс вычисления НОК и НОД чисел, умею их применять в задачах не только школьного, но и олимпиадного и экзаменационного уровня, которые помогут мне в дальнейшей учёбе. Эти задания развивают логическое мышление, эти задания позволяют выстраивать логические цепочки и давать грамотное объяснение своим действиям. Этот навык полезен не только в технических, но и в гуманитарных специальностях.

**Перспективы развития**: повышение уровня сложности задач, их решение по теории чисел.

**Практическая значимость**: в рамках проведения устной олимпиады для учеников 7 класса я проведу мастер-класс по решению олимпиадных задач с помощью теории чисел. Также этот материал могут использовать ученики для подготовки к экзаменам и преподаватели для дополнительных занятий по математике.

**Литература**

1. Ю.Н. Макарычев Алгебра 7 класс/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов: Просвещение.

2. Ю.Н. Макарычев Алгебра 8 класс/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов: Просвещение.

3. Ю.Н. Макарычев, Алгебра 9 класс/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов: Просвещение.

4. А.И.Сгибнев Делимость и простые числа/ А.И.Сгибнев: МЦМНО, 2013.

5. <https://multiurok.ru/index.php/files/raznourovnevaia-sistema-zadach-po-teme-delimost-ch.html>

6. <https://infourok.ru/zadachi-na-delimost-chisel-v-variantah-ege-4388089.html>

7. <https://infourok.ru/podgotovka-uchaschihsya-k-resheniyu-olimpiadnih-zadach-na-delimost-klassi-1154972.html>

8. <https://www.sites.google.com/site/zastranicamiucebnikamatematiki/zadaci-povysennoj-sloznosti-po-teme-delimost>