ЧАСТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«ЛИЦЕЙ ПРИ ТГПУ ИМ. Л. Н. ТОЛСТОГО»

**Исследовательская проектная работа по математике по теме:**

**«Метод математической индукции как эффективный метод доказательства гипотез»**

Автор:

Новикова Анастасия Руслановна,

ученица 11У класса

Научный руководитель:

Вронская Гульнара Александровна,

учитель математики

Тула

2021— 2023

Содержание

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc130250037)

[ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ 3](#_Toc130250038)

[ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ 4](#_Toc130250039)

[ИСТОРИЯ 4](#_Toc130250040)

[ИНДУКЦИЯ И ДЕДУКЦИЯ 4](#_Toc130250041)

[АЛГОРИТМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА 6](#_Toc130250042)

[ЗАДАЧИ 7](#_Toc130250043)

[Задача 1 7](#_Toc130250044)

[Задача 2 8](#_Toc130250045)

[Задача 3 9](#_Toc130250046)

[Задача 4 10](#_Toc130250047)

[Задача 5 11](#_Toc130250048)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 12](#_Toc130250049)

[ВЫВОД 13](#_Toc130250050)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 14](#_Toc130250051)

## ВВЕДЕНИЕ

Основой математического исследования являются дедуктивный и индуктивный методы. Дедукция и индукция противоположные друг другу умозаключения.

Умозаключение – способ получения нового знания на основе
имеющегося. Состоит из посылок и заключения.

Посылки – высказывания, содержащие исходное знание.

Заключение – высказывание, содержащее новое знание.

Вывод – логический переход от посылок к заключению.

Дедукция нацелена на получение заключения, которое не может быть более общим, чем посылки, за счёт существующей идеи.

Индукция нацелена на возникающую теорию из вывода, который зависит от новых или уже существующих посылок. С другой стороны – нацелена на заключение из вновь возникающих теорий, наблюдений, фактов и т. д. Такое умозаключение часто позволяет предположить формулировку теорем, а в некоторых случаях – пути доказательств.

Математическая индукция – один из методов, который используют для доказательства истинности некоторого утверждения для всех натуральных чисел при определённых условиях.

### ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

* познакомиться с методом математической индукции
* систематизировать знания по данной теме
* применить их при решении задач

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### ИСТОРИЯ

Методы доказательств изменялись, изменяются и развиваются с течением времени. Своё начало они берут с трёх законов логистики: «Закон тождества», «Закон противоречий», «Закон исключённого третьего» – которые сформулировал Аристотель. Один из методов – математическая индукция – зарождается ещё в античные времена и отдельные случаи его применения встречаются у Прокла и Евклида. Спустя века Блез Паскаль в 1665 году публикует «Трактат об арифметическом треугольнике» (1654). В нём французский математик использует метод полной математической индукции для доказательства вычисления числа сочетаний. Современное название метод получил от Огастеса (Августа) де Моргана в 1838 году.

Математическая индукция – один из методов доказательства в математике.

Доказательство – логическое рассуждение, в процессе которого обосновывается истинность или ложность какой-либо мысли с помощью других положений, проверенных наукой и конкретной практикой.

### ИНДУКЦИЯ И ДЕДУКЦИЯ

Основными методами рассуждения являются индукция и дедукция.

***Индукция*** – способ рассуждения от частных фактов, положений к общим. Она связывает частные предпосылки с заключением не строго через законы логики, а скорее через некоторые психологические, фактические или математические представления (понимаются как элементарные знания о пространстве, форме, величине, времени, количестве… Им свойственны наглядность, фрагментарность, неустойчивость и обобщенность). Способ является основным для получения общих закономерностей в естественных и в гуманитарных науках, однако вывод может быть сделан неверно, потому что гипотезы при частных наблюдениях не всегда являются правильными. Индукцию подразделяют на полную и неполную, учитывая характер исследования:

***Полная индукция*** – метод, при котором утверждение доказывается для конечного числа частных случаев, исчерпывающих все возможности. Однако из-за этого область её применения весьма ограничена.

**Условия:**

* Точное знание числа предметов или явлений, подлежащих изучению
* Убеждение, что признак принадлежит каждому элементу класса
* Небольшое число элементов изучаемого класса
* Целесообразность и рациональность

***Неполная индукция –*** метод, при котором вывод делается на основе изучения свойств отдельных объектов определённой совокупности и распространяется на все её объекты; доказательство осуществляется другим путем, например, дедукцией. Неполная индукция позволяет догадаться об идее доказательства перед тем, как проводить его в деталях.Вывод, основанный на неполной индукции, может быть ошибочным, поэтому его лучше делать на рассмотрении не одного, а нескольких частных случаев.

***Дедукция*** – способ рассуждения, при котором новое положение выводится чисто логическим путём от общих положений к частным выводам. Её истинность зависит от посылок, которыми являются аксиомы, постулаты и гипотезы, имеющие характер общих утверждений.

## АЛГОРИТМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

БАЗИС ИНДУКЦИИ

ИНДУКЦИОННОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ

ИНДУКЦИОННЫЙ ПЕРЕХОД

ВЫВОД

Проверка при минимальном

Пусть при утверждение верно

1. ***Базис индукции***

На данном этапе проводим проверку справедливости утверждения для наименьшего из натуральных чисел, при котором утверждение имеет смысл.

1. ***Индукционное предположение***

На данном этапе предположим, что утверждение верно для некоторого значения .

1. ***Индукционный переход***

На данном этапе докажем, что утверждение справедливо для
.

1. ***Вывод***

Если удалось выполнить все этапы до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что утверждение верно для любого натурального числа , которое удовлетворяет условию.

## ЗАДАЧИ

### Задача 1

Доказать

1) При :

 – истина

2) Пусть при исходное равенство верно, тогда справедливо:

3) Докажем, что равенство верно для , тогда:

Рассмотрим левую часть равенства:

Получили правую часть равенства. Следовательно, методом математической индукции можно доказать исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального числа .

### Задача 2



Есть три стержня и колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой?

1) Пирамидку, в которой только одно кольцо , переместить можно (очевидно).

2) Предположим, что можно перемещать пирамидки с числом колец
.

3) Попробуем перемещать пирамидку с колец. Пирамидку из колец, лежащих на самом большом -м кольце, можно согласно предположению переместить на любой стержень. Переместим её на второй стержень. Неподвижное -е кольцо не будет мешать провести алгоритм перемещения, так как оно самое большое. После перемещения колец переместим оставшееся -е кольцо на второй стержень. Это возможно, так как второй стержень пустой. Обратим внимание, что второй стержень теперь не пустой, и можно класть на него любые кольца, так как имеющееся на нём кольцо самое большое. И затем алгоритм перемещения колец повторяется, пока пирамидка не соберётся на стержень с лежащим внизу
-ым кольцом. Таким образом, можно перемещать пирамидки и с
 кольцами. Следовательно, утверждение верно для всех случаев, то есть для всех .

### Задача 3

Доказать, что сумма внутренних углов любого выпуклого многоугольника равна , где – число сторон этого многоугольника:

Утверждение имеет смысл не для всех натуральных , а только для
, т.к. минимальное количество углов равно 3 (треугольник).

1) При утверждение принимает вид: . Сумма внутренних углов любого треугольника действительно равна . Поэтому при утверждение верно.

2) Пусть формула верна при , т.е. , где .

3) Докажем, что в таком случае имеет место и формула: .

Пусть – произвольный выпуклый -угольник. Соединив точки и , получаем выпуклый -угольник
. Очевидно, что сумма углов -угольника равна сумме углов -угольника плюс сумма углов треугольника:
. Но сумма углов -угольника по предположению равна , а сумма углов треугольника
. Поэтому

.

Итак, условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула верна при любом натуральном .

### Задача 4

Доказать, что

1) Пусть ,

тогда делится на 133 без остатка, значит при утверждение верно.

2) Предположим, что при утверждение верно, тогда
.

3) Докажем, что при делится на 133 без остатка.

;

в ходе преобразования получается сумма, которая делится на 133 без остатка, т.к.:

* Из первого слагаемого по предположению 2
* Во втором слагаемом одним из множителей является 133, следовательно оно тоже делится на 133 без остатка

Следовательно, – верно для всех .

### Задача 5

Докажем, что при

1) При :

 - истина

2) Пусть при исходное неравенство верно, тогда справедливо:

3) Докажем, что при неравенство будет верным, тогда справедливо:

Рассмотрим неравенство из пункта 2. Умножим его обе части на

Если доказать, что , то получим, что
 . А это то, что требовалось доказать. Следовательно, методом математической индукции можно доказать исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального числа .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Индукция — одна из форм умозаключения, при применении которого переходят от знаний отдельных фактов к общим положениям. В индукции выделяют два вида:

1. Неполная индукция. Метод, который заключается в переходе к универсальной формулировке после проверки истинности частных для отдельных значений .
2. Полная индукция. Метод, который заключается в переходе к универсальной формулировке после проверки истинности частных для каждого значения , удовлетворяющего условию задачи.

Метод математической индукции – метод доказательства, который позволяет в поисках общего закона проверять, исключать ложные и утверждать истинные предположения. Этот метод – один из теоретических основ при решении задач на суммирование, делимость, доказательство тождеств, доказательство и решение неравенств, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач и т. д.

Знакомясь с методом математической индукции, я изучала специальную литературу, консультировалась с педагогом, анализировала данные и решения задач, выполняла необходимые вычисления, пользовалась ресурсами Интернета.

### ВЫВОД

В ходе работы я узнала, что для решения задач таким методом необходимо знать и понимать основной принцип математической индукции.

Достоинство метода математической индукции – универсальность, потому что с помощью него можно решить многие задачи.

Обобщив и систематизировав знания по теме: «Метод математической индукции как эффективный метод доказательства гипотез», я убедилась в их необходимости. Также в ходе работы приобрела навыки решения задач с использованием метода математической индукции. Считаю, что эти навыки будут помогать мне в будущем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Шень. Математическая индукция. – МЦНФО 2016
2. П. В. Зиновьев. Метод математической индукции. – Инженерная школа ДВФУ 2019
3. <https://askanydifference.com/ru/difference-between-deduction-and-inductionwith-table/>
4. <https://poisk-ru.ru/s39544t7.html?ysclid=lfbghmvqoz880821910>
5. <https://vuzlit.com/843068/ponyatie_dokazatelstva_matematike?ysclid=lbtaeh5ah6531419183>
6. Wikipedia – свободная энциклопедия