|МБОУ Аннинская средняя общеобразовательная школа №1

Исследовательская работа

Преобразование двойных радикалов

**Выполнил:**

ученик 9 А класса

Зеленев Илья

**Руководитель:**

учитель математики

Чебышова Г.Н.

Анна

2023

Содержание

Введение.………………………………………………………………………3-4

1.История квадратного корня……………………………………………….. 4-5

2.Применение формул сокращенного умножения для преобразования двойных радикалов……………………………………..…………………….5-8

3.Применение метода неопределенных коэффициентов при преобразовании

сложных радикалов……………………………………..................................8-12

4.Использование формулы сложных радикалов............. ……………......12-14

5.Задачи повышенной сложности …………………………………………14-19

Заключение………………………………………………………………….19-20 Литература…………………………………………………………...................20

**Введение**

В учебнике «Алгебра» Ю.Н. Макарычева по которому я обучаюсь, есть информация под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Этот материал не входит в рамки урока, а изучается по желанию самостоятельно. Я всегда это делаю с удовольствием, так как это полезно и актуально для меня, потому что я увлекаюсь математикой и люблю решать сложные задачи. И сегодня я расскажу вам о результатах своей работы над одной из таких тем: «Преобразование двойных радикалов».

Двойные или сложные радикалы – это выражения вида , ; ; в которых один корень находится под другим. Поэтому их ещё иногда называют вложенными радикалами. Преобразовать двойной радикал – это значит избавиться от внешнего радикала. В школьном курсе математики основной школы сложные радикалы подробно не изучаются.

При выполнении исследовательской работы мною подробно изучены и проанализированы материалы по данной теме школьного учебника, а также других источников, рассмотрены основные приемы преобразования двойных радикалов и решены упражнения повышенной сложности. В работе рассматриваются три основных метода для преобразования (упрощения) двойных радикалов:

1. Применение формул сокращенного умножения для преобразования двойных радикалов;

2. Применение метода неопределенных коэффициентов при преобразовании сложных радикалов;

3. Использование формул сложных радикалов;

***Цель работы****:* рассмотреть способы преобразования двойных радикалов.

***Объект исследования:*** задачи математики, в которых необходимо избавится от внешнего радикала или, попросту говоря, корня.

***Предмет исследования:*** процесс преобразования сложных радикалов. ***Гипотеза*:** можно предположить, что в математике существуют несколько

способов преобразования двойных радикалов.

***Актуальность работы:*** умения преобразовывать сложные радикалы помогут в обучении предметов физико- математического цикла, при решении исследовательских задач, при подготовке к итоговой аттестации, а также способствуют развитию математических, интеллектуальных способностей и личному самосовершенствованию.

***Задачи работы:***

1. Изучить литературу по данной теме.

2. Рассмотреть способы преобразования сложных радикалов.

3.Подобрать решить задачи повышенной сложности по данной теме.

***Методы исследования:*** изучение литературы, анализ объекта и предмета исследования, подбор математических задач по теме работы.

**1.История квадратного корня**

Квадратным корнем из числа a называют такое число, квадрат которого равен a. [1]

Например, числа -5 и 5 являются квадратными корнями из числа 25. То есть, корни уравнения x2 =25, являются квадратными корнями из числа 25.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен а. В нашем примере, это буде т число 5. Процесс нахождения арифметического квадратного корня называют извлечением квадратного корня.

Арифметический квадратный корень имеет свое обозначение. Его обозначают так: . Знак называют знаком арифметического квадратного корня. Выражение, которое записано под знаком корня, называют подкоренным выражением. Интересная история современного обозначения корня, а также самого названия «корень».

Индийцы называли его «мула» – корень (дерева), основание, начало; арабы – «джузр» – корень, основание квадрата, а европейцы, сохранив смысл, перевели его на латынь. Так появилось название radix (по-латыни «корень»), отсюда – радикал. Сначала обозначение корня сократили до Rx, затем до строчной буквы r. Впервые такое обозначение использовал немецкий математик Томас Рудольф в 1525 году. В дальнейшем буква r трансформировалась в знак.Рене Декарт в 1637 году объединил его с горизонтальной чертой, которую ставили над подкоренным выражением, в результате появился современный знак.

Существует неофициальный праздник, посвященный квадратному корню. День квадратного корня - праздник, отмечаемый девять раз в столетие: в день, когда и число, и порядковый номер месяца являются квадратными корнями из двух последних цифр года (например, 2 февраля 2004 года: 02-02-04). Впервые этот праздник отмечался 9 сентября 1981 года (09-09-81). Основателем праздника является школьный учитель Рон Гордон из Калифорнийского города Редвуд Сити в США. Главным блюдом в этот день на «праздничном столе» обычно являются вареные кубики из овощей и выпечка в форме математического знака квадратного корня. По объективным математическим причинам этот праздник может отмечаться строго девять раз в столетие (семь раз в первой половине века и дважды — во второй), всегда в одни и те же дни:

1 января \*\*01 года; 2 февраля \*\*04 года; 3 марта \*\*09 года; 4 апреля \*\*16 года;

5 мая \*\*25 года; 6 июня \*\*36 года; 7 июля \*\*49 года; 8 августа \*\*64 года; 9 сентября \*\*81 года. При этом интересно заметить, что промежуток (в годах) между праздниками

составляет непрерывную последовательность нечётных чисел: 3, 5, 7 и т. д.

**2.Применение формул сокращенного умножения для преобразования двойных радикалов**

В преобразованиях выражений, содержащих двойные радикалы, стремятся освободиться от внешнего радикала. Это нетрудно сделать, когда выражение, стоящее под знаком радикала, можно представить в виде квадрата суммы или квадрата разности.

|  |
| --- |
| **Пример 1**.**[ 6]** Упростить сложный радикал: |

Решение:

Как нам избавиться от внешнего корня? Понятно, что для этого нужно преобразовать подкоренное выражение, представив его в виде полного квадрата. Для этого воспользуемся известной формулой «Квадрат разности»: = – 2аb +

Здесь, как видите, справа у отрицательного члена есть множитель 2. Поэтому и под корнем давайте получим этот множитель. Для этого 4 представим в виде произведения 2 на 2: =

Тогда а = 2 и b = . Осталось только обратить внимание на то, что 9 = + . Теперь видно, что под корнем у нас получился квадрат разности:

    = =

Теперь вспоминаем, что = | а | . Именно модулю. Здесь это очень важно, потому что квадратный корень – положительное число. Тогда получаем:

= |2 - |

Ну а поскольку , модуль раскрывается со знаком минус. В результате в ответе получаем:

= | 2 - = - 2

Ответ:- 2

**Пример 2. [1]** Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

Решение:

Для решения воспользуемся известной формулой «Квадрат суммы»: (а + b)² = а² + 2аb + b², получим:  = = = |1+ | = 1+

Ответ: 1+

**Пример 3. [5]**

= = = = = = = = 0,5

Ответ: 0,5

**Пример 4. [4 ]**

Вычислить : - 3

 Решение:

В подкоренном выражении выделяем полный квадрат:  88 - 30 = - 2 ∙ 5 ∙ 3 + = (5 - 3)²,    5 - 3 =  - < 0

Тогда - 3 = - 3 = | 5 -3 | -3 = 3 -5 -3 = -5

Ответ: -5

**Пример 5. [4]** Вычислить: ∙ (5 +  ).

 Решение:

В подкоренном выражении выделим полный квадрат. Так как (а ± b)² = а² ± 2аb + b²,  то слагаемому 10 может соответствовать только выражение 2аb. Разложим второе слагаемое подкоренного выражения на множители, выделив в качестве первого множителя число 2, в соответствии с указанной выше формулой. Получаем:

28 – 10 = 28 – 2 · 5·  = 25 + 3 – 2 · 5·  = 5² – 2 · 5·  +()² = (5 - )²,

Тогда ·(5 + ) =   ·(5 + = │5 - │ · (5 + ) = 25 – 3 = 22,

Так как 5 -    =   - > 0.

Ответ: 22.

**3.Применение метода неопределенных коэффициентов**

XV и XVI столетия вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения». Для нее характерен расцвет науки и культуры, связанный с глубокими социальными преобразованиями.

Итальянские математики **(**Ферро, Тарталья и Феррари**)** в XVI в. сделали крупнейшее математическое открытие. Они вывели формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней ***методом неопределенных коэффициентов***.

Метод неопределенных коэффициентов – метод, используемый в математике

для нахождения функции в виде точной или приближенной линейной комбинации конечного или бесконечного набора базовых функций. Указанная линейная комбинация берётся с неизвестными коэффициентами, которые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраических уравнений. [2]

«Методом неопределенных коэффициентов называют метод, применяемый для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее известен». [3]

В курсе математики основной школы метод неопределенных коэффициентов применяется при доказательстве теоремы Виета и при решении задачи о составлении уравнения прямой, проходящей через две точки (причем название метода учащимся не сообщается). Метод неопределенных коэффициентов также используется при решении уравнений высших степеней, интегрировании рациональных дробей, преобразовании иррациональных выражений. Классическим примером применение метода неопределенных коэффициентов является упрощение сложных радикалов.

При преобразовании двойных радикалов есть и более сложные случаи, когда не сразу удаётся догадаться, как представить подкоренное выражение в виде полного квадрата. Например, в следующем примере.

**Пример 1**. **[ 1]** Освободимся от внешнего радикала в выражении  .

Решение:

Покажем, как можно решить эту задачу, используя метод неопределённых коэффициентов.

Пусть  = а + b, где а и b — некоторые числа. Тогда (а + b)**2** = 61 + 28 и а + b ≥ 0. Значит, + 2аb + 3 = 61 + 28

Отсюда

т.е.

Выпишем все пары целых чисел (а; b), для которых а∙b = 14:

(-14; -1), (-7; -2), (-2; -7), (-1; -14), (1; 14), (2; 7), (7; 2), (14; 1).

Из этих пар выберем те, которые удовлетворяют условиям

≥ 0

Нетрудно убедиться, что такая пара единственная — это пара (7; 2). Значит,

= 7+

Ответ: 7 + 2

**Пример 2. [4]** Освободиться от внешнего радикала в выражении  .

Решение:

Покажем, как можно решить эту задачу, используя метод неопределённых коэффициентов.

Пусть  = а + b, где а и b — некоторые числа. Тогда (а + b)**2** = 91 - 40 и а + b ≥ 0. Значит, + 2аb + 3 = 91 - 40

Отсюда

т.е.

Выпишем все пары целых чисел (а; b), для которых а∙b = 20:

(20; -1), (-10; -2), (-5,-4), (-4;-5), (-2; -10), (-1; -20), (20; 1), (10; 2), (5; 4), (4; 5), (2; 10), (1; 20).

Из этих пар выберем те, которые удовлетворяют условиям

≥ 0

Нетрудно убедиться, что такая пара единственная — это пара (4; 5). Значит,

= 4-5

Ответ: 4 - 5

|  |
| --- |
| **Пример 3.** **[6]**. Упростите сложный радикал:  Решение: |

Представить подкоренное выражение в виде полного квадрата не так просто. Поэтому воспользуемся для преобразования радикала методом неопределенных коэффициентов.

Пусть  = а + b, где а и b — некоторые числа. Тогда (а + b)**2** = 75 + 12 и а + b ≥ 0. Значит, + 2аb + 21 = 75 +12

Отсюда

т.е.

Выпишем все пары целых чисел (а; b), для которых а∙b = 6:

(-6; -1), (-3; -2), (-2,-3), (-1;-6), (6; 1), (3; 2), (2; 3), (1; 6).

Не одна из данных пар не удовлетворяют условиям. Тогда решим систему способом подстановки.

Понятно, что а≠0 и b ≠0. Иначе не выполняется второе уравнение системы. Тогда выражаем коэффициент b из второго уравнения:

b=

Далее подставляем получившееся выражение в первое уравнение. В результате приходим к следующему уравнению:

+ 21∙ = 75; + 21∙ = 75|∙;

Получим биквадратное уравнение:- 75 +756 = 0

Решим это уравнение: ,тогда получим; D = - 4∙1∙756 =5625 – 3024 = 2601; х = ; х = 63; х = 12

В результате получим: = 63; = 12, а = ; а =, соответственно b = ∙= 2 и b = ∙ = 3

Итак, окончательно получаем: а , тогда b = 3 или а = 3, тогда b = 2, следовательно = = |2 + 3 = 2 + 3 Ответ: 2 + 3

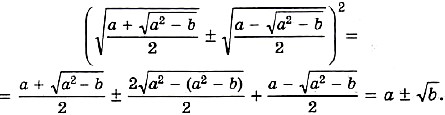
**4.Формулы сложных радикалов**

Для освобождения от внешнего радикала также используются так называемые формулы двойного радикала.

В тех случаях, когда a ≥ 0, b ≥ 0 и разность а**2** - b равна квадрату рационального числа, освободиться от внешнего радикала в выражении  можно с помощью формулы двойного радикала:

= ±

В правой части этой формулы записано неотрицательное число. Покажем, что его квадрат равен а ±



**Пример 1.[1]** Освободимся от внешнего радикала в выражении  .

Решение***:***

По формуле двойного радикала имеем

= - = - = - = -

Ответ: -

**Пример 2.[4]** Избавиться от двойного радикала в выражении .

Решение:

72 - 40 = 49 - 40 =9 =32 . Можно применить формулу двойного радикала.

= + = + = +

Ответ: +

**Пример 3.[4]** Избавиться от двойного радикала в выражении .

Решение.

Преобразуем 6=.

92 - 72 = 81 - 72 = 9 =32 . Можно применить формулу двойного радикала.

.

Ответ:

**Пример 4.[ 4]** Избавиться от двойного радикала в выражении

Решение

Преобразуем 4= .

252 - 96 = 625 - 96 =529 =232 . Можно применить формулу двойного радикала.

= = + = + = + 1

Ответ: + 1

**5.Задачи повышенной сложности**

**Пример 1. [1]** Упростим выражение

+ , где а > 2

Решение:

Представим в двойном радикале подкоренное выражение в виде

(а +2) - 2 + (а – 2)

Получим

https://tepka.ru/algebra-8/108-6.jpg

Ответ :

**Пример 2. [4]**

2 = 2 = 2 = 2 = = = | + | = +

Ответ: +

**Пример 3. [4]**

Упростить выражение

  - = - = - = - = = = = 4 -6

Ответ: 4 -6

**Пример 4.[4]**

2

Решаем по шагам,используя формулу сложных радикалов

= + = + = + 1

= + = - 1

= + = + =

2∙( + = +

Ответ: +

**Пример 5.[1]**

Найдите значение выражения +

Решение:

+ = + = + = + = |5 - | + = 5

Ответ: 5

**Пример 6. [1]**

Освободитест от внешнего радикала, пользуясь формулой двойного радикала

Решение:

= - = - = -

Ответ: -

**Пример 7. [1]**

Упростите выражение,вычислив предварительно значение, если:

а = -

Решение:

= = (11+ )- 2+ (11- ) = = 22 - 2= 22 -2 = 22 -2=22-12 = 10

Следовательно а = Ответ: а =

**Пример 8. [1]**

Является ли рациональным или иррациональным значение выражения

+

Решение:

Для преобразования данного выражения воспользуемся формулой сложных радикалов

+ = + = + = +

Значение выражения + есть иррациональное число,значит значение выражения

+

Ответ: значение выражения + иррационально

**Пример 9. [1]**

Найдите значение выражения ∙ ∙

Решение:

∙ ∙ = ∙ = = ∙ = = = == 4 -3 =1

Ответ:1

**Пример 10. [1]**

Докажите, что верно равенство

= + +

Решение:

По оределению арифметического квадратного корня имеем:

=

= + +)∙ + + = 2 + + + +

+ + +5 = =

Ответ: равенство доказано

**Пример 11. [1]**

Освободитесь от внешнего радикала в выражении

- , если а+в ≥ 1

Решение:

- = - = | = = 2

Ответ :2

**Пример 12. [1]**

Упростите выражение + ,где в ≥ 1

Решение :

- =- = - = - = = - = -

Ответ: -

**Пример 13. [1]**

Докажите тождество : = +

Решение:

= = = = = | + | = +

Ответ: +

**Заключение**

В ходе выполнения проекта я получил удовлетворение от проделанной работы, для меня это оказалась интересно и увлекательно. Во- первых я получил много новой теоретической информации по математике, которая мне была неизвестна; во-вторых, я научился применять метод неопределенных коэффициентов при преобразовании двойных радикалов, в -третьих я изучил формулы двойных радикалов и применил их на практике, и главное, я понял, что математика очень обширная и интересная наука, и то, что мы изучаем в школе - это маленькая часть всей науки математики. Я убежден, что знания, которые я приобрел, помогут мне в дальнейшем обучении математике. Надеюсь, что в своей работе мне удалось показать основные приемы для преобразования сложных радикалов.

Подбирая и решая задания повышенной сложности по данной теме, я приобрел бесценный опыт решения таких задач.

Моя работа может быть рекомендована учащимся, которые интересуются математикой, а также педагогам, которые готовят своих учеников к математическим олимпиадам.

**Литература**

1. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского.–18-е изд., дораб.–М.: Просвещение, 2010.–271–с.: ил.стр.47–50.

2. Математика: Энциклопедия / Под ред.Ю.В. Прохорова.– М.: Большая Российская

энциклопедия, 2003.–845 с.: ил. стр. 404–405.

3. Виленкин Н. Я., «Алгебра и математический анализ для 10 класса». М.: Просвещение, 2016

4. <https://nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2017/03/30/proekt-preobrazovanie-dvoynyh-radikalov>

5. <https://sdamgia.ru/>

6. https://yourtutor.info/как-упростить-сложный-радикал