Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Самарской области средняя общеобразовательная школа №8 п.г.т. Алексеевка г.о.Кинель Самарской области имени воина-интернационалиста С.А.Кафидова

**Тема: Финансовая математика в задачах ЕГЭ**

Ф. И. О. Канаева Елизавета Алексеевна

Класс: 10

Руководитель:

Ф. И. О. Мещерякова Ольга Юрьевна,

учитель математики,

высшая квалификационная категория

Кинель, 2022 год

**Оглавление**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 3 |
| Глава 1. Значение экономической грамотности | 4 |
| * 1. Понятие финансовой и экономической грамотности | 4 |
| * 1. История возникновения процентов | 7 |
| Глава 2. Финансовая математика | 7 |
| 2.1. Проценты в математике | 7 |
| 2.2. Задачи на вклады | 11 |
| 2.3. Задачи на кредиты | 11 |
| 2.3.1. Дифференцированный платеж | 11 |
| 2.3.2. Аннуитетный платеж | 13 |
| 2.3.3. Равные платежи, кроме последнего | 14 |
| 2.3.4. Задачи на таблицы | 15 |
| 2.3.5. Разные платежи | 16 |
| Заключение | 17 |
| Список литературы | 18 |
| Приложения | 20-34 |

**Введение**

Современная жизнь делает задачи на проценты актуальными, так как сфера практического применения процентных расчетов расширяется. Вопросы инфляции, повышения цен, снижение покупательской способности, платежи, налоги, прибыли, кредиты, вклады, начисление заработной платы, депозитные счета в банках касаются каждого человека в обществе. Семейный бюджет также не может обойтись без умения производить несложные операции с процентами.

Новым типом задач повышенного уровня сложности, впервые введённым в структуру Единого государственного экзамена в 2015 году, является текстовая задача социально-экономической тематики. Задание №15 (с 2022 года, ранее было задание №17) содержит тематику задач на вклады, кредиты, оптимальный выбор. За решение этой задачи согласно спецификациям ЕГЭ предлагается два первичных балла (с 2022 года, ранее начислялось три первичных балла). В данном проекте представлены алгоритмы решения данных задач, выведены универсальные формулы. Но сначала, конечно, мы попробуем разобраться в банковских терминах и схемах, необходимых для решения задач. А именно, в схемах начисления процентов по банковским вкладам.

**Актуальность**исследовательской работы определяется необходимостью уметь решать экономические задачи при сдаче ЕГЭ, так как жизнь современного человека тесно связана с финансовыми операциями.

**Проблема** заключается в отсутствии навыков применения математических и экономических знаний на практике в расчетах платежей банковских кредитов и прочих операций, а также неумение и боязнь решать экономические задачи на ЕГЭ.

**Предмет** исследования: различные подходы к решению задач о кредитах и вкладах в зависимости от условия задачи.

**Объект** исследования: простые и сложные проценты, задачи на проценты.

**Гипотеза:** в современном мире необходимы знания об экономике и в этом может помочь математика.

**Цель исследования** – исследование методов решения задач с экономическим содержанием.

**Задачи исследования:**

* изучить теоретический материал по выбранной теме;
* научиться решать задачи с процентами разных видов сложности;
* разобрать основные типы задач с примерами решений;
* создать таблицы для различных видов платежей;
* показать на примерах поиск решения реальной практической задачи (кредит с разными видами платежей – аннуитетные, фиксированные и дифференцированные);

**Методы** исследования: поиск информации по теме исследования, анализ литературы, сравнение, систематизация, обобщение.

На различных сайтах и в математической литературе я нашла множество решений таких задач, но, либо они содержат много лишней информации, либо они решены непонятным для меня способом. Поэтому я решила сама разобраться и найти оптимальные способы решений задач на банковские проценты.

**Глава 1. ЗНАЧЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ**

* 1. **Понятие экономической грамотности**

Становление рыночной экономики в нашей стране, снижение потребности в неквалифицированных рабочих, возрастающие требования работодателей к профессиональным качествам специалистов, требования общества к наличию у индивидуума экономических знаний и навыков их применения на практике актуализируют вопрос о повышении экономической и финансовой грамотности населения.

Экономическая грамотность становится одним из основных критериев развития конкурентоспособной личности и успешной адаптации человека в современной социально-экономической ситуации.

Авторы книги «Ипотека и уравнения. Математика в экономике» Л.Арталь и Ж. Салес отмечают, что «При изучении экономического роста и развития используются уравнения и системы уравнений, функции, алгоритмы, графики, матричное исследование и т.д….Развитие экономики как науки сопровождается использованием все более сложных математических методов. Именно поэтому хорошая математическая подготовка стала одним из обязательных условий обучения».

В официальных документах и в литературе можно встретить как понятие «финансовая грамотность», так и «экономическая грамотность».

Существуют различные подходы к определению финансовой грамотности. В России одно из первых определений финансовой грамотности «как знания о финансовых институтах и предлагаемых ими продуктах, а также умения их использовать при возникновении потребности понимание последствий своих действий» было сформулировано специалистами национального агентства финансовых исследований (НАФИ) в 2008 году. Это определение в последствии использовалось в большинстве исследований финансовой грамотности в нашей стране.

Для сравнения понятий экономической и финансовой грамотности, финансовую грамотность можно определить, как способность человека решать возникающие финансовые вопросы в реальной жизни и умение распоряжаться имеющимися денежными средствами. Обратимся теперь к определениям экономической грамотности.

В толковом словаре обществоведческих терминов Н.Е.Яценко экономическая грамотность трактуется как «уровень экономических знаний, умений и навыков, а также личностных качеств человека, позволяющих ему сознательно участвовать в хозяйственной деятельности общества».

В словаре Вишняковой С.М. «Ключевые понятия, термины, актуальная лексика» содержится следующее определение: «Экономическая грамотность – это готовность к участию в экономической деятельности, состоящая в знаниях теоретических основ хозяйственной деятельности, понимания природы экономических связей и отношений, в умении анализировать конкретные экономические ситуации».

Доктор педагогических наук, профессор МГПУ Иоффе А. под экономической грамотностью понимает «успешность приобретения, углубления, расширения экономических знаний и умений на базовом образовательном уровне и их воздействие на формирование качеств, помогающих ориентироваться в экономической жизни общества, реализуя свои интересы и согласуя их с интересами окружающих людей».

Обобщая приведённые определения, под термином «экономическая грамотность» в нашем исследовании понимается спектр понятий, информации и знаний из экономической области, а также обладание навыками решения практических задач, главным образом в потребительской сфере.

Таким образом, несмотря на разницу понятий «экономика» и «финансы», (экономика – это хозяйственная деятельность общества, а также совокупность отношений, складывающихся в системе производства, распределения, обмена и потребления; финансы – это как совокупность экономических отношений, возникающих в процессе формирования, распределения и использования централизованных и децентрализованных фондов денежных средств) в изученной научной литературе термины **«экономическая грамотность» и «финансовая грамотность»** подразумевают знания и навыки, позволяющие человеку решать различные жизненные задачи, связанные с деньгами, их распределением и использованием.

Экономическая грамотность становится особенно необходимой в настоящее время, когда в России активно развивается рынок финансовых услуг, рынок страхования, интернет-банкинг, виртуальные валюты.

Необходимым в повседневной жизни навыкам можно отнести умение делать экономически обоснованный выбор товаров (услуг), умение планировать и составлять бюджет. Для работодателей важно наличие у потенциального работника профессиональных экономических компетенций.

Итак, под экономической грамотностью в данном исследовании понимается спектр понятий, информации и знаний из экономической области, а также обладание навыками решения практических задач, главным образом в потребительской сфере.

**1.2. История возникновения процентов**

Слово «процент» происходит от латинского pro centum – начисление на сотню. В дальнейшем для сокращения писали Р/С, а затем эта запись перешла в знакомое нам начертание %. Таким образом, один процент – это сотая часть числа. Например, p% от числа a составляют

Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях. Это даёт возможность упрощать расчеты и легко сравнивать части между собой и с целыми. Проценты появились ещё в древности у вавилонян, которые пользовались шестидесятеричными дробями. Уже в клинописных табличках вавилонян содержались задачи на расчёт процентов.

Были известны проценты и в Индии. Индийские математики вычисляли проценты, применяя так называемое тройное правило, т.е. пользуясь пропорцией. Они умели производить и более сложные вычисления с применением процентов.

Наибольшую популярность проценты приобрели в банковской сфере. Слово «банк» ведёт своё происхождение от латинского banco – скамья, лавка менялы. Первые менялы появились ещё до нашей эры, когда у многих народов широко распространился обычай одолжения денег под рост, то есть с обязательством возврата не только долга, но и вознаграждения за труды. Прообразом современных банковских учреждений стали банки, основанные в Венеции в 1171 году. В России аналогичные банки появились в 1774 году. Они давали деньги в долг королям, купцам, ремесленникам, финансировали дальние путешествия, строительство крупных сооружений и т.п. Как и менялы в древности, банки брали плату за пользование предоставленными деньгами. Эта плата традиционно выражается в виде процентов к величине, выданной в долг суммы денег.

**Глава 2. Финансовая математика**

**2.1. Проценты в математике**

**Определение процента**

Процент – это одна сотая часть. Таким образом,1% = = 0.01.

Чтобы перевести проценты в дробь, нужно убрать знак % и разделить число на 100:

2% = = 0,02, 50% = = 0,5.

Чтобы перевести дробь в проценты, нужно дробь умножить на 100 и добавить знак %:

0,14 = 0.14 \* 100% = 14%, 0,07 = 0.07 \* 100% = 7%, = 100% = 40%.

**Нахождение процента от числа**

Чтобы найти указанный процент от числа, нужно данное число умножить на число процентов и результат разделить на 100. То есть если дано число x, то a% от данного числа равны:

При нахождении процента от числа следует помнить, что:

* если процент меньше 100%, то число, полученное в результате вычислений, меньше заданного числа;
* если процент больше 100%, то число, полученное в результате вычислений, больше заданного числа.

Пример. Найдите 20% от числа 84.

Решение. Имеем

**Процентное изменение величины**

Процентное увеличение вычисляется так:

Процентное увеличение =

Процентное уменьшение вычисляется так:

Процентное уменьшение =

Пример. Население села увеличилось с 250 до 275 человек в течение одного года. Найти процент увеличения.

Решение. Население села увеличилось на 275-250=25 человек. Таким образом

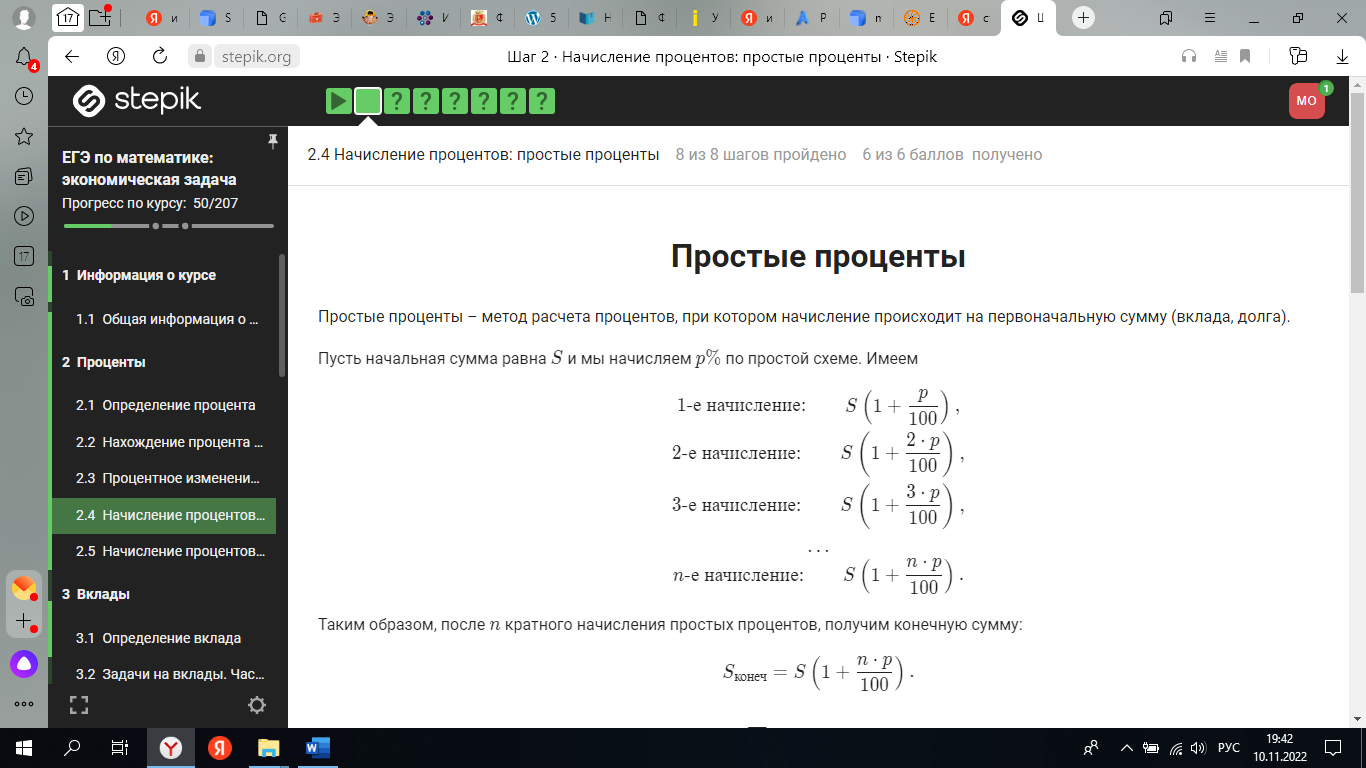
Процент увеличения =

Ответ: 10%.

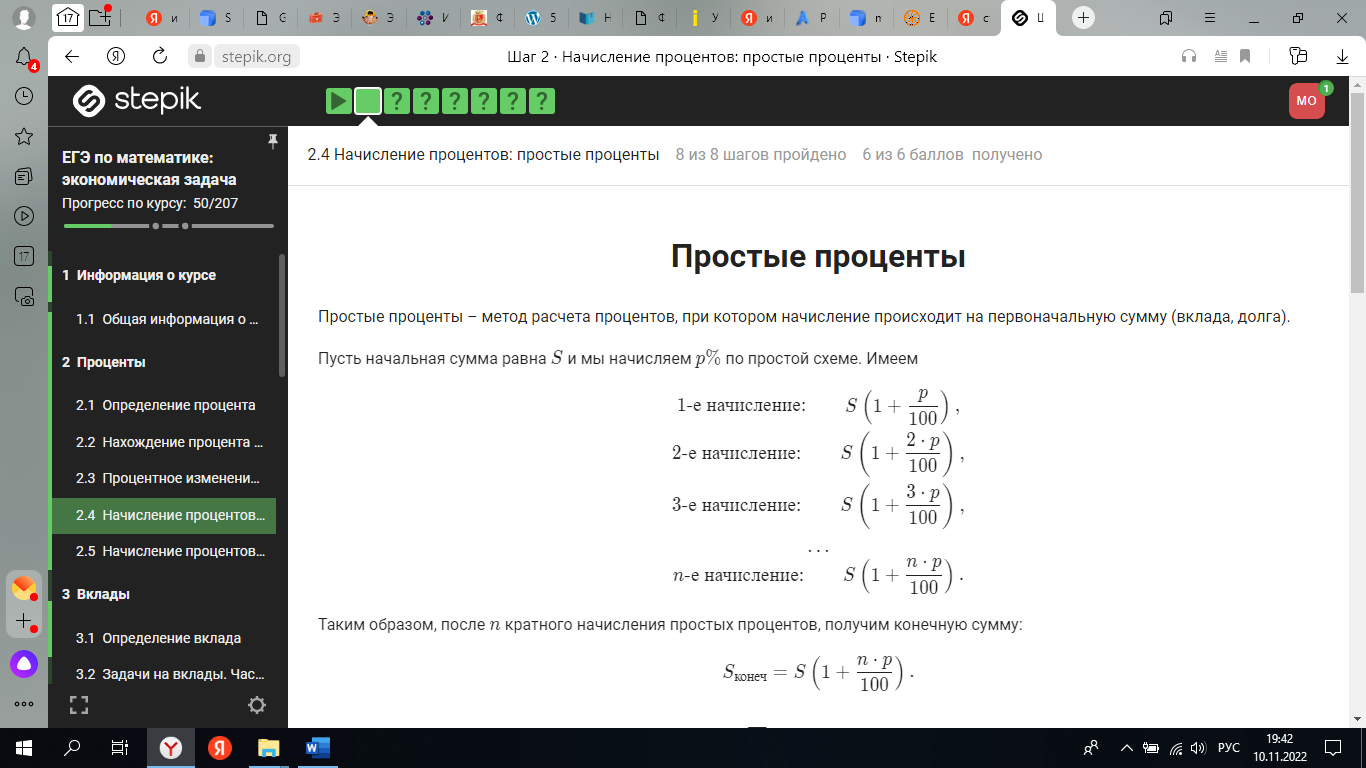
**Простые проценты**

Простые проценты – метод расчета процентов, при котором начисление происходит на первоначальную сумму (вклада, долга).

Пусть начальная сумма равна S и мы начисляем p% по простой схеме. Имеем

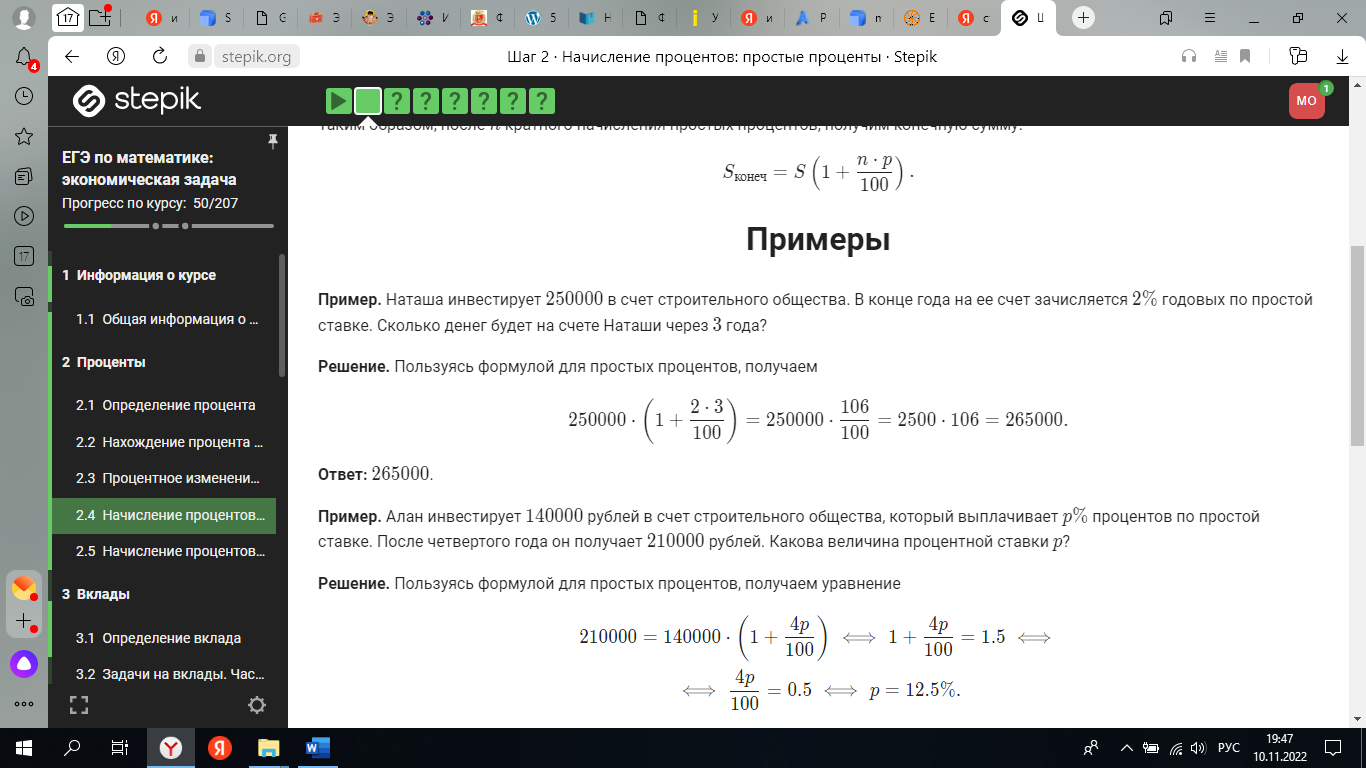


Таким образом, после n кратного начисления простых процентов, получим конечную сумму:



Пример. Наташа инвестирует 250000 в счет строительного общества. В конце года на ее счет зачисляется 2% годовых по простой ставке. Сколько денег будет на счете Наташи через 3 года?

Решение. Пользуясь формулой для простых процентов, получаем

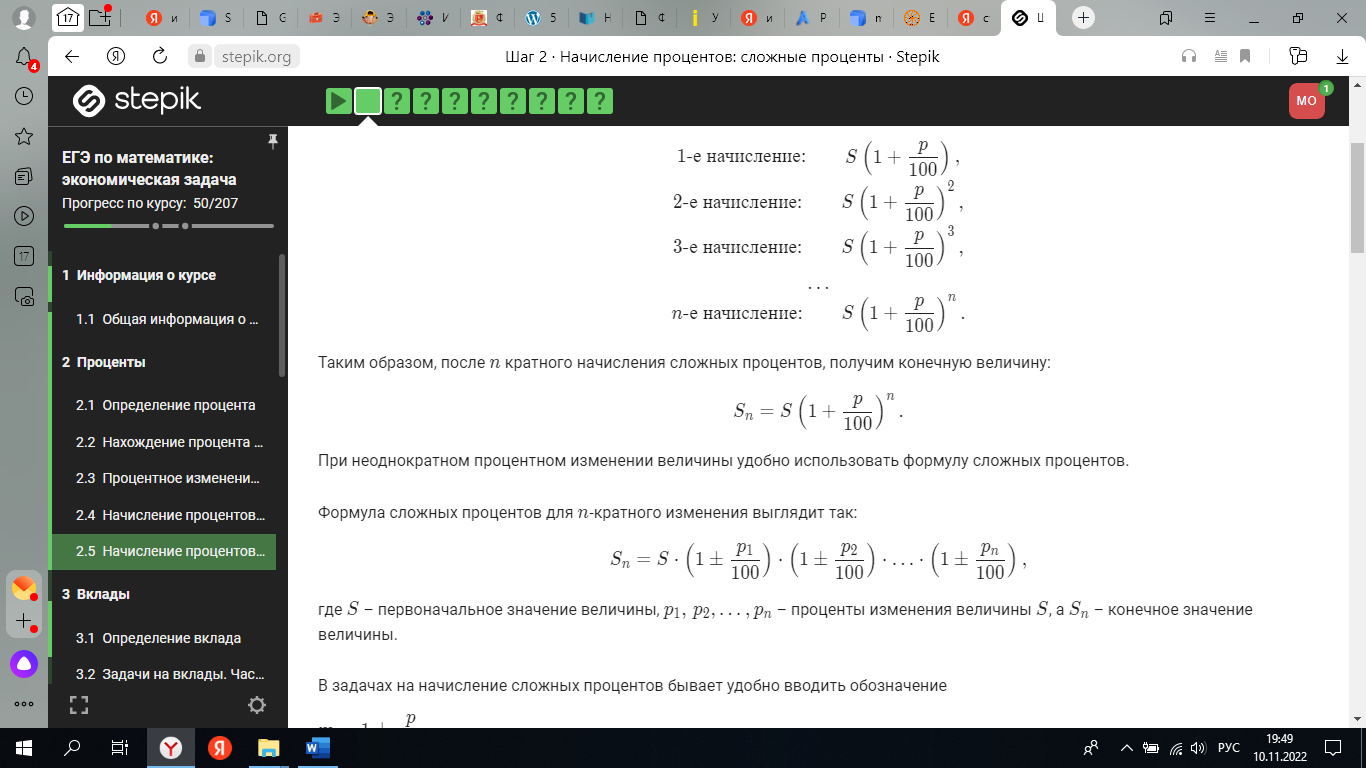


Ответ: 265000.

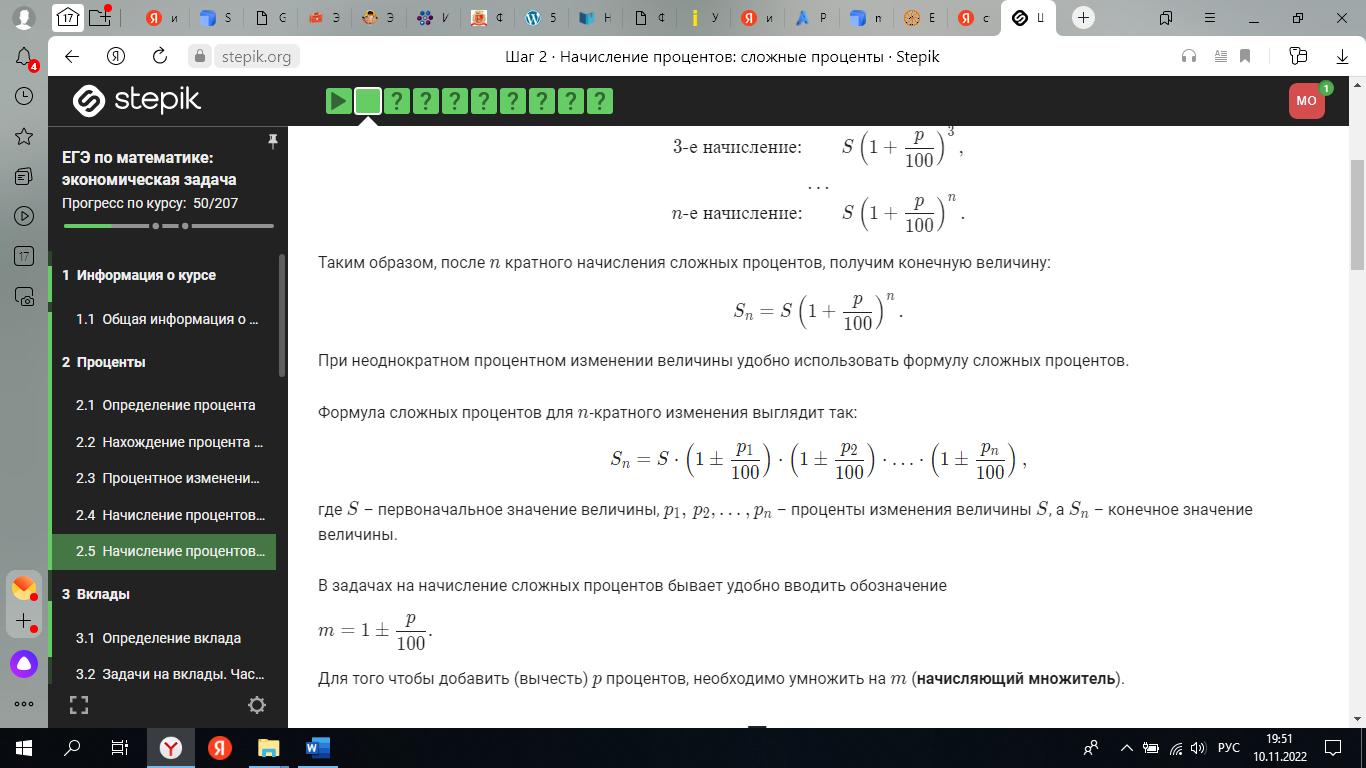
**Сложные проценты**

Сложные проценты – метод расчета процентов, при котором начисление происходит на первоначальную сумму (вклада, долга) и на прирост (вклада, долга), то есть сумму процентов, начисленных после первого периода. Другими словами, сложные проценты – это проценты на проценты.

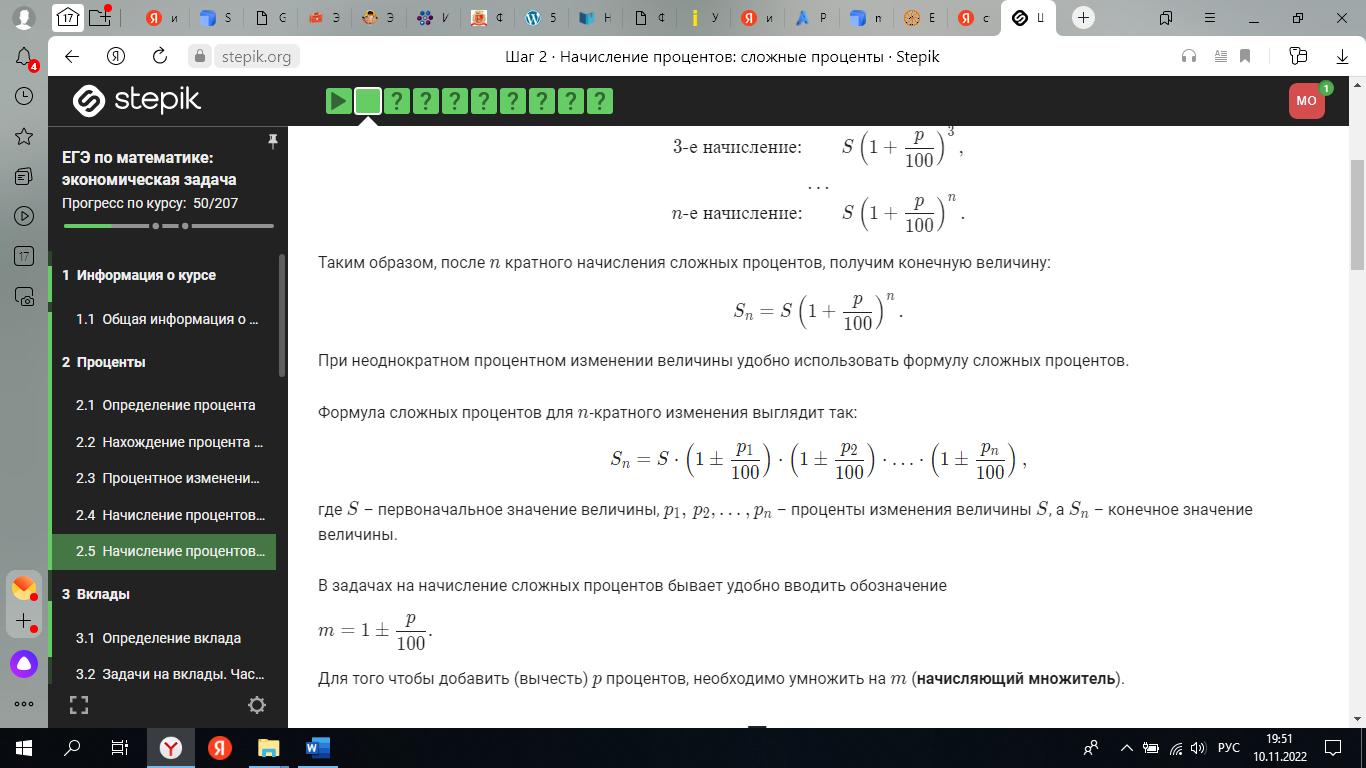
Пусть начальная сумма равна S и мы начисляем p% по сложной схеме. Имеем



Таким образом, после n кратного начисления сложных процентов, получим конечную величину:



При неоднократном процентном изменении величины удобно использовать формулу сложных процентов. Формула сложных процентов для *n*-кратного изменения выглядит так:



где *S* – первоначальное значение величины, p1, p2, …, *pn*​ – проценты изменения величины *S*, а *Sn*​ – конечное значение величины.

В задачах на начисление сложных процентов бывает удобно вводить обозначение

m=1±

Для того чтобы добавить (вычесть) *p* процентов, необходимо умножить на *m* (**начисляющий множитель**).

**Пример.** В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

**Решение.** После подорожания в ноябре 1 кг винограда будет стоить

60\*(1 +)\*(1 +) = 90.

**Ответ:** 90.

**2.2. Задачи на вклады**

**Вкладом**называется денежная сумма, которую человек отдает в банк на определенных условиях, подразумевающих начисление процентов за определенный период на вложенную сумму.

Если в банк была положена сумма *S* под *p*% на некоторый срок, то по истечении этого срока, сумма увеличится на *p*% от числа *S*, то есть станет равной  
S\*(1+).

Для удобного начисления процентов, стоит помнить о замене m=1±,тогда начисление *p*% равнозначно увеличению в *m* раз, то есть умножению на *m*.

Если в задаче не сказано о типе начисляемых процентов (простые/сложные), то используются **сложные проценты**.

Примеры решения всех типов задач приведены в приложении.

**2.3. Задачи на кредиты**

**2.3.1. Дифференцированный платеж**

***Кредит*** – это финансовая сделка, в результате которой кредитор (как правило банк) предоставляет на определенный срок деньги заёмщику. За пользование деньгами заёмщик, кроме погашения основного долга (тело кредита), выплачивает также кредитору проценты. Разделение погашающих платежей на две части, отвечающих за погашение долга (тело кредита) и погашение процентных денег, принципиально важно, поскольку от этого зависят уплачиваемые налоги.

# **Дифференцированный платеж**

**Дифференцированный платеж**— способ выплаты по кредиту, при котором сумма долга клиента делится на равные части (столько, сколько планируется платежей для его выплаты), к каждой из которых прибавляются проценты, начисленные на оставшуюся сумму долга. При этом с каждым разом сумма выплаты уменьшается, а в последний раз клиент платит наименьшую сумму.

Разделение повышающих платежей на две части - погашение долга (тела кредита) и погашение процентных денег - принципиально важно, поскольку от этого зависят выплачиваемые налоги. При дифференцированной схеме каждой платёж состоит из двух частей. Первая часть - основной платёж, его размер не изменяется на всём сроке кредитования.

Первый платёж самый большой, последний - самый маленький. На практике платежи обычно ежемесячные, а банки учитывают каждый день кредитования: важно, сколько дней в месяце, високосный год или нет. А в экзаменационных задачах обычно упрощённая схема: за каждый платежный период проценты начисляются один раз.

Иначе говоря, если проценты начисляются ежегодно, то и выплаты по кредиту раз в год. Если проценты начисляются ежемесячно, то и выплаты ежемесячные.

Рассмотрим задачу, которая приводит к дифференцированным платежам (разные платежи, убывающие в арифметической прогрессии).

**Задача.** Клиент в банке взял кредит на срок *n* месяцев (лет, иной срок). В конце каждого месяца (года, иного срока) общая сумма оставшегося долга увеличивается на *p*%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную клиентом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца (года, иного срока), подбираются так, чтобы в результате **сумма долга каждый месяц (год, иной срок) уменьшалась равномерно**, т. е. на одну и ту же величину.

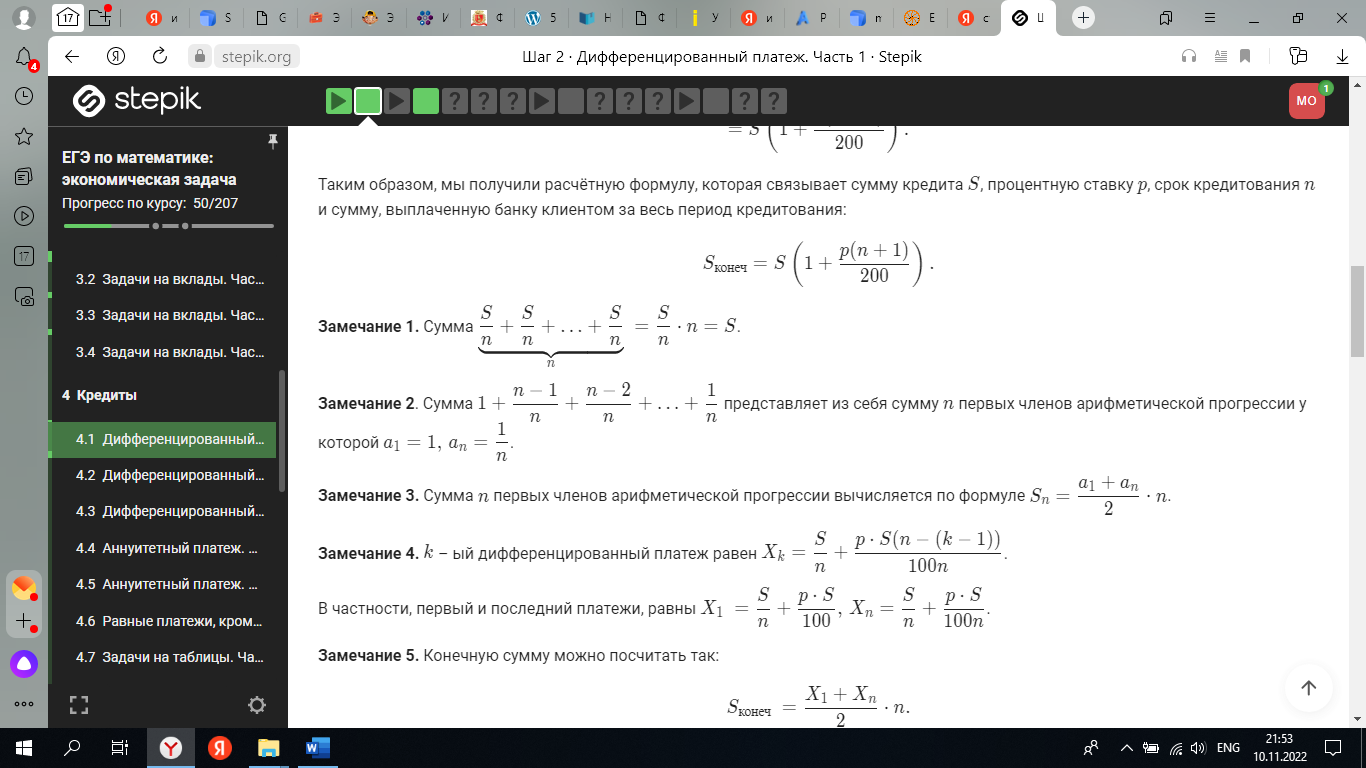
При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух частей:

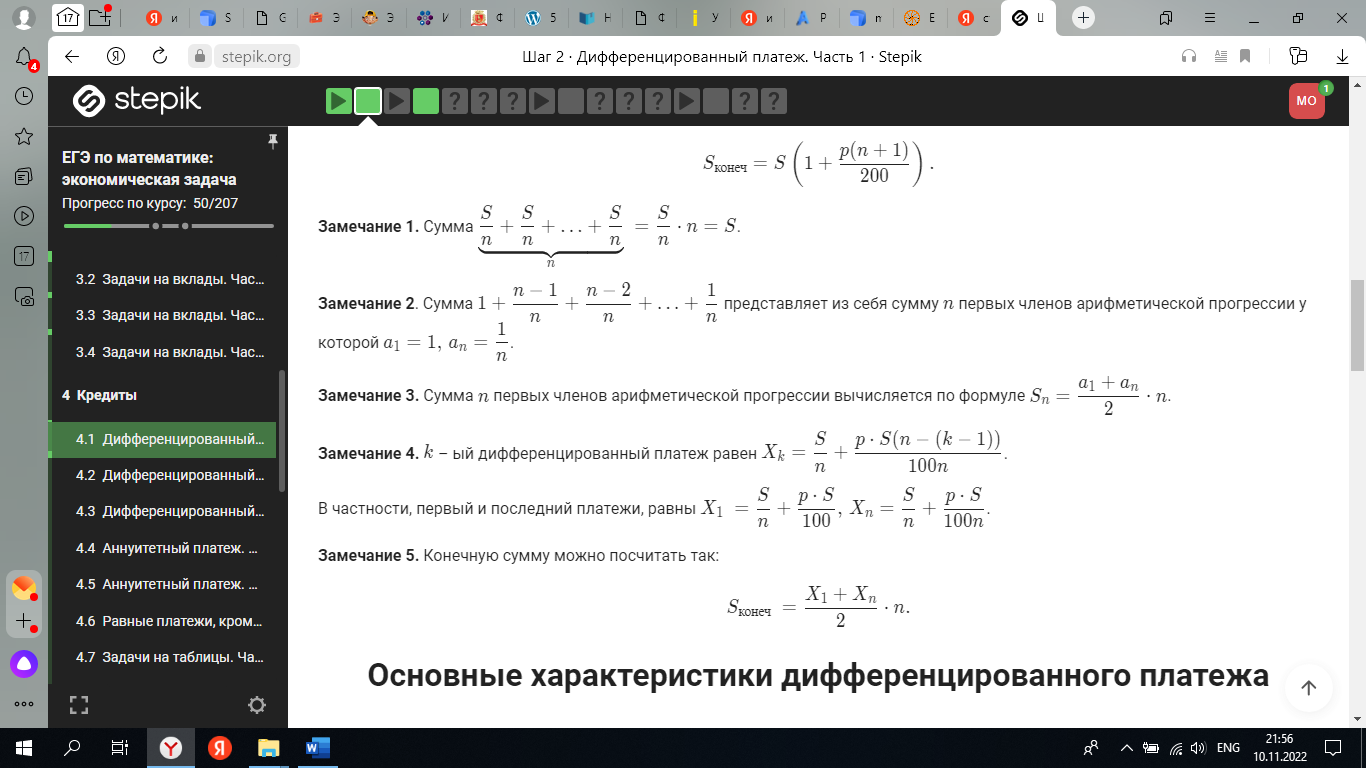
Платеж = + p% от долга, где *S* – сумма кредита, *n* – количество выплат, *p* – процентная ставка.

Пусть *X1, X2*, …, *Xn*​ – *n* платежей. Тогда

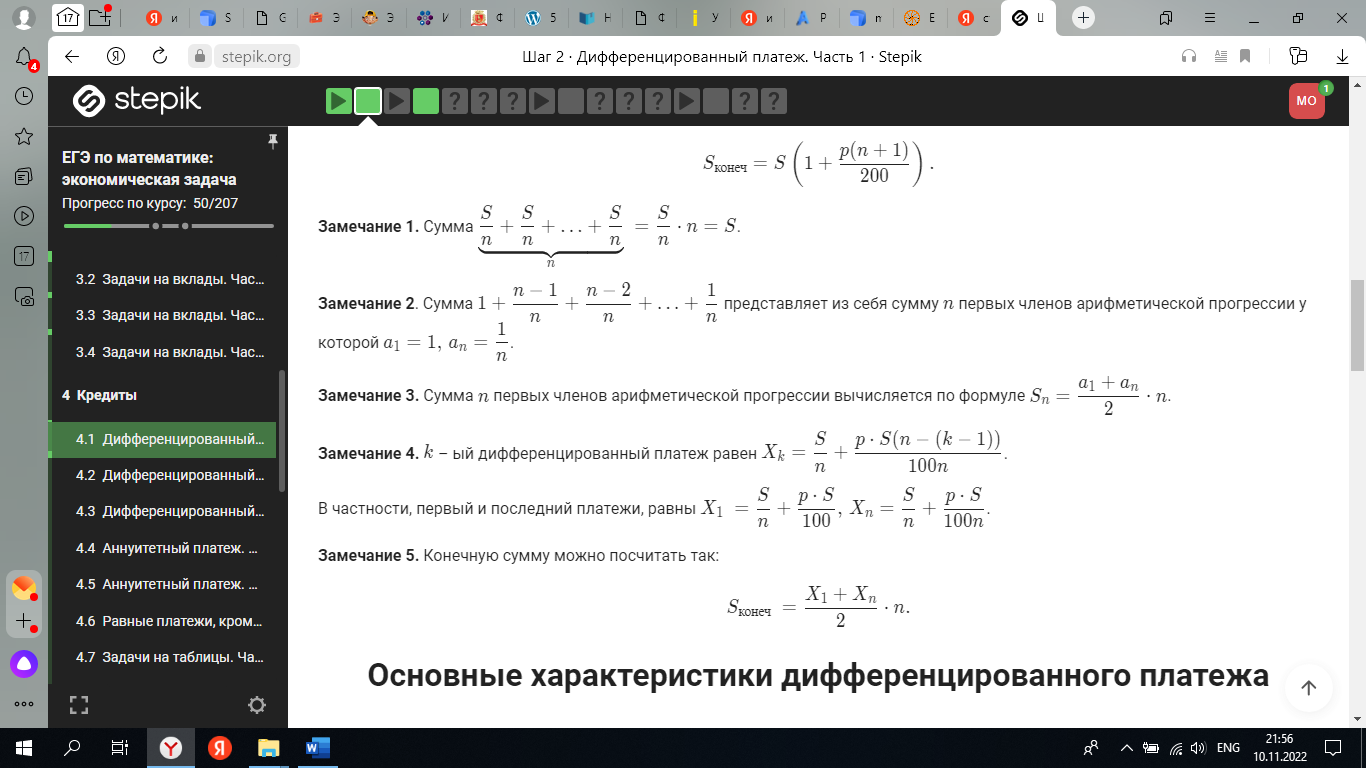
|  |  |
| --- | --- |
|  | Суммарные выплаты по кредиту составляют |

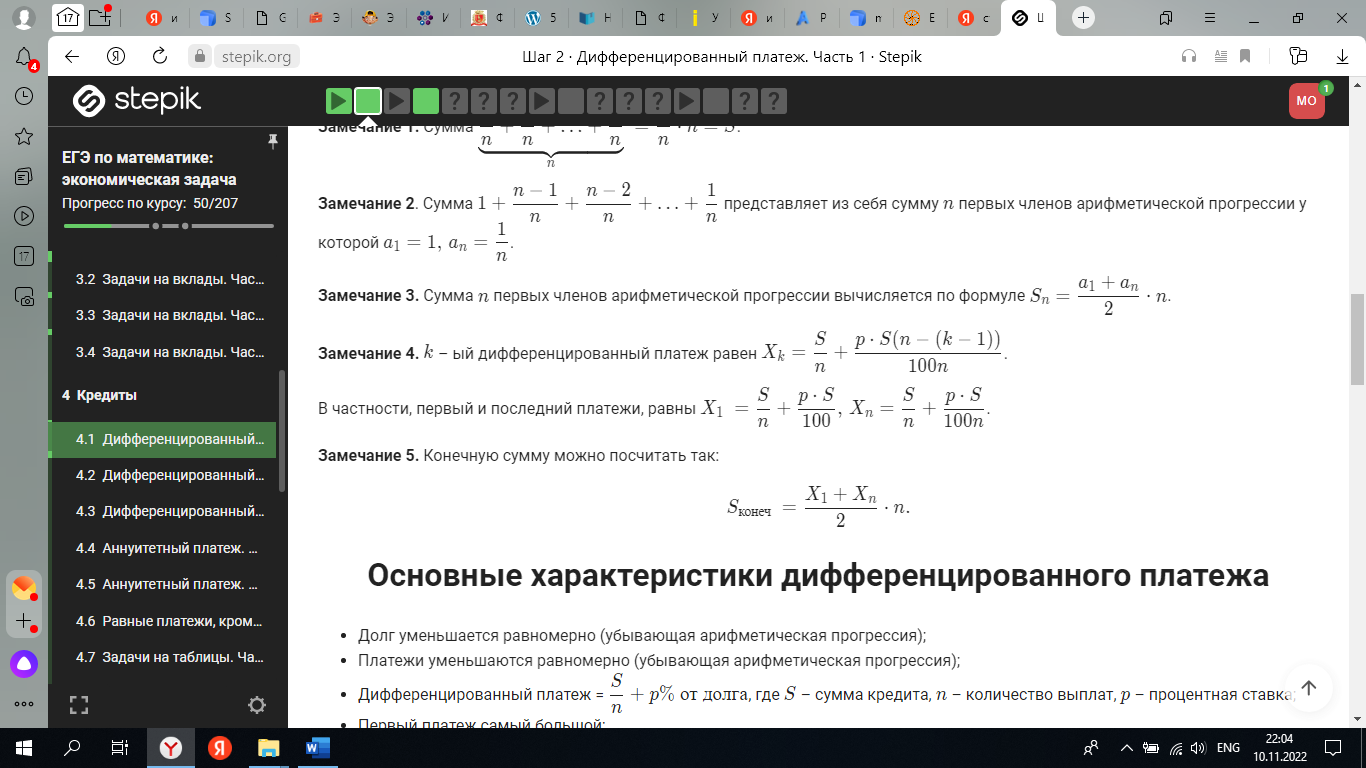
Таким образом, мы получили расчётную формулу, которая связывает сумму кредита *S*, процентную ставку *p*, срок кредитования *n* и сумму, выплаченную банку клиентом за весь период кредитования:

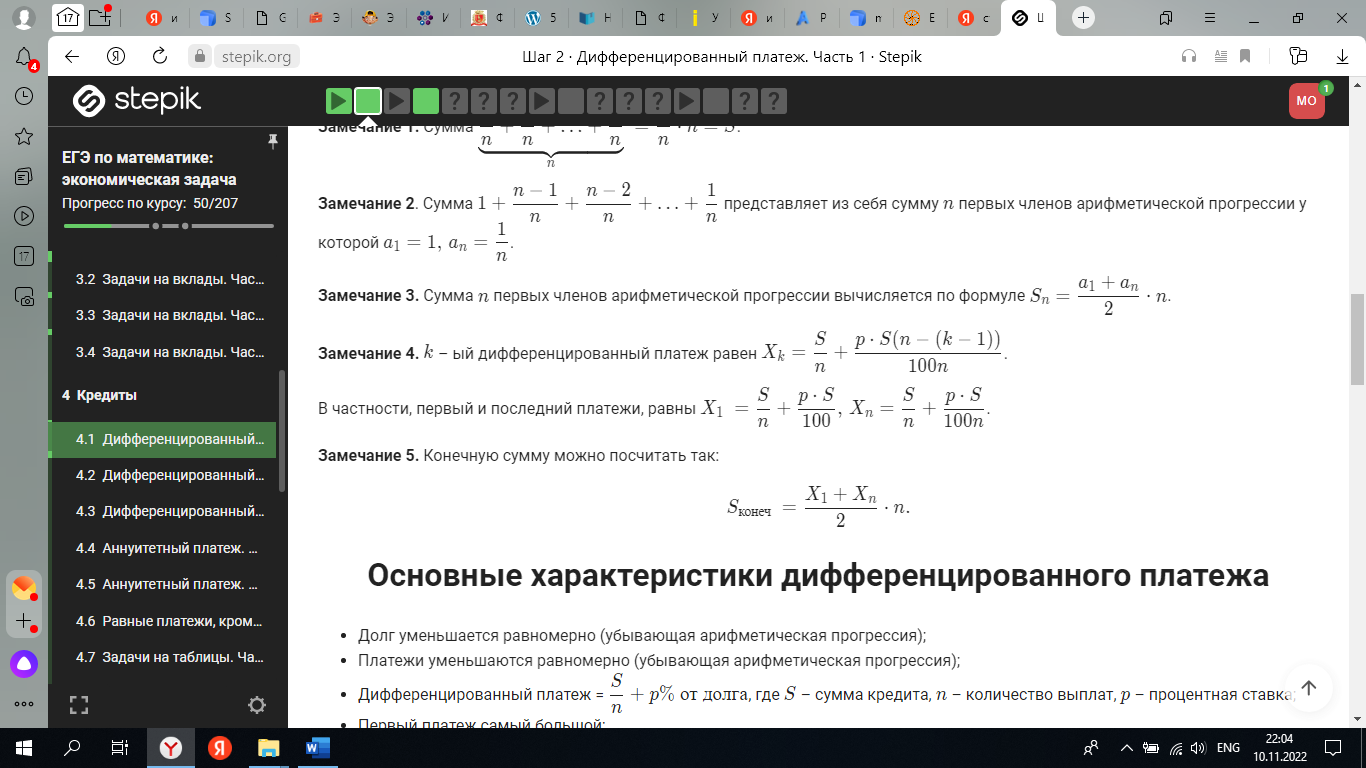


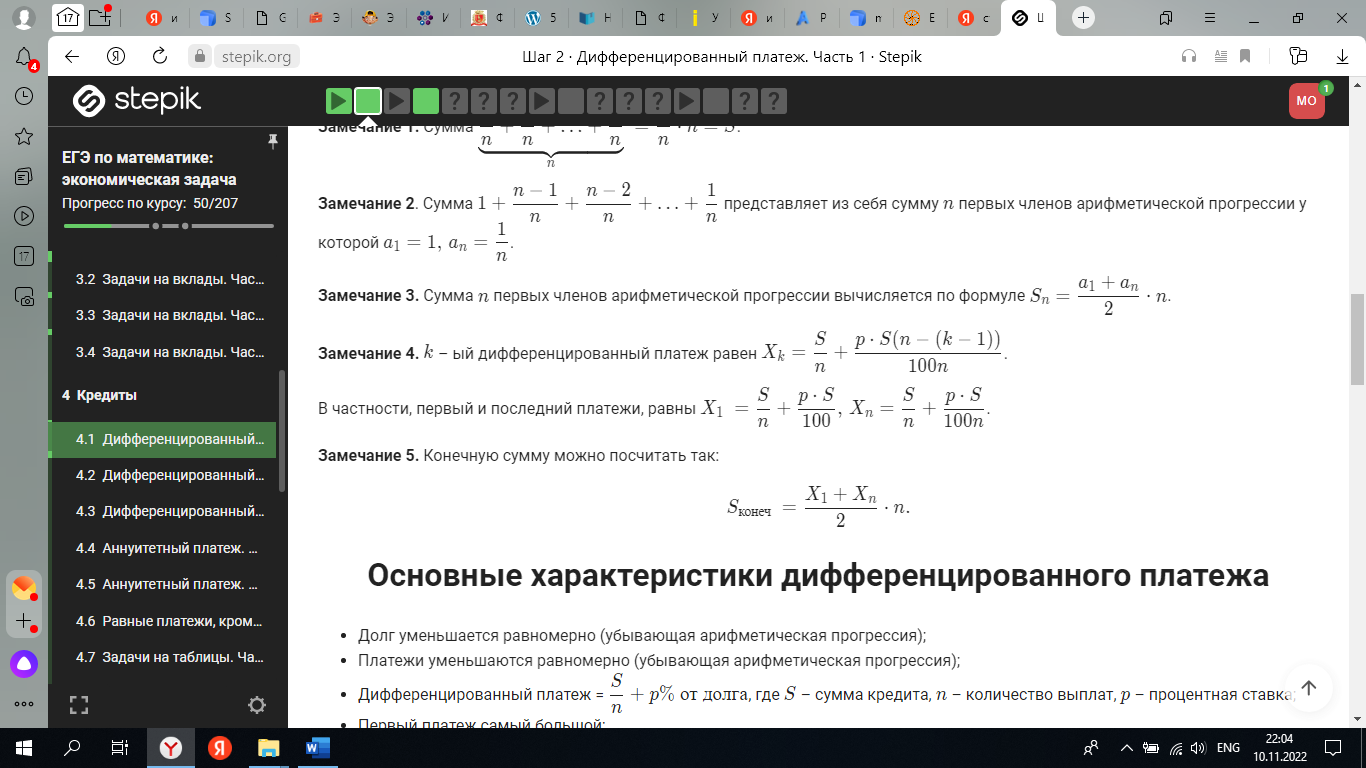


**Замечание 1.** Сумма

**Замечание 2**. Сумма представляет из себя сумму *n* первых членов арифметической прогрессии у которой a1 = 1, an = ​.

**Замечание 3.** Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле Sn = n

**Замечание 4.** *k* – ый дифференцированный платеж равен

В частности, первый и последний платежи, равны

**Замечание 5.** Конечную сумму можно посчитать так:

# **Основные характеристики дифференцированного платежа**

* Долг уменьшается равномерно (убывающая арифметическая прогрессия);
* Платежи уменьшаются равномерно (убывающая арифметическая прогрессия);
* Дифференцированный платеж =  + p% от долга, где *S* – сумма кредита, *n* – количество выплат, *p* – процентная ставка;
* Первый платеж самый большой;
* Последний платеж самый маленький.

# **2.3.2. Аннуитетный платеж**

**Аннуитетный платеж —**способ выплаты по кредиту, при котором сумма выплат делится на равные части (столько, сколько планируется платежей), а сумма одной выплаты состоит из остатка по кредиту и процентов, начисленных на остаток долга. При таком способе погашения основной долг, являющийся телом кредита, при первых платежах практически не погашается, а выплачиваются только проценты.

При аннуитетных платежах сумма кредита и сумма процентов за всё время пользования кредитом суммируются и делятся на число платежей, все платежи получаются равными.

Рассмотрим задачу, которая приводит к аннуитетным платежам.

**Задача.** Клиент взял кредит в банке на *n* лет (месяцев) под *p*% годовых. Схема выплаты кредита: по истечении 1 года (периода) банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает долг на *p*%, затем клиент переводит в банк *X* рублей. Какой должна быть сумма *X*, чтобы клиент выплатил долг *n* равными платежами?

Рассчитаем аннуитетный платеж для суммы *S* тремя равными платежами с процентной ставкой *p*%.

Обозначим m=1+​. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: Sm - X,

Долг после 2-й выплаты: (Sm - X)m - X = Sm2-Xm-X.

Долг после 3-й выплаты: (Sm2-Xm-X)m - X = Sm3-Xm2-Xm-X.

Так как всего было 3 платежа, то долг после 3-й выплаты равен нулю.

Имеем

Sm3-Xm2-Xm-X = 0 =>

Легко обобщить данную формулу для *n* платежей:

X = = .

Конечная (итоговая) сумма выплат равна *S*конеч​=*n*⋅*X*.

**Замечание.** Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии  
1+m+m2+ … + mn-1 = ​.

# **2.3.3. Равные платежи, кроме последнего**

В отличии от аннуитетных платежей существует вид платежей, которые равные между собой за исключением последнего платежа. Рассмотрим пример.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

**Решение.** Количество лет будет минимальным, если платежи будут максимальными, то есть равны 350000. Обозначим m = 1+=​. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: 1300000m - 350000 = 1080000,

Долг после 2-й выплаты: 1080000m  - 350000 = 838000,

Долг после 3-й выплаты: 838000m - 350000 = 571800,

Долг после 4-й выплаты: 571800m - 350000 = 278980,

Долг после 5-й выплаты: 278980m - 306878 = 0.

Таким образом, если первые 4 платежа равны 350000, а последний -- 306878, то кредит будет погашен за 5 лет.

**Ответ:** 5.

**2.3.4. Задачи на таблицы**

 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере *S* тыс. рублей, где *S* – натуральное число, на три года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 17.5% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год и месяц | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 |
| Долг (в тыс рублей) | *S* | 0.9*S* | 0.4*S* | 0 |

Найдите наименьшее значение *S*, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

**Решение.** Обозначим платежи как X1, X2, X3​. В январе каждого года размер долга увеличивается на 17,5%, то есть в m = 1+=1,175 раз. Согласно условию задачи имеем:

Июль 2017: S\*1,175 - X1 = 0,9S => X1 = 0,275S = S,

Июль 2018: 0,9S\*1,175 - X2 = 0,4S => X2 = 0.6575S = S,

Июль 2019: 0,4S\*1.175 - X3 = 0 => X3 = 0,47S = S.

Наименьшее натуральное значение *S*, при котором каждый платеж будет составлять целое число тысяч рублей, равен *S*=400.

**Ответ:** 400 тысяч рублей.

**2.3.5. Разные платежи**

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число *r*, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 130000 рублей, а во второй год – 150000 рублей.

**Решение.** Пусть S = 200000, m=1+, X1=130000, X2=150000*.* Тогда согласно условию задачи имеем:

Долг после 1-ой выплаты: Sm - X1,

Долг после 2-ой выплаты: (Sm - X1) m - X2.

По условию кредит погашен двумя платежами, значит,  
(Sm - X1) m - X2= 0 ⬄ Sm2-X1m-X2 = 0 ⬄ 20m2-13m-15 = 0 => {m > 0} m = ⬄ 1+ = ​⟺ *r*=25.

**Ответ:** 25.

**Заключение**

Понимание процентов и умение производить процентные расчеты в настоящее время необходимы каждому человеку. Проценты затрагивают финансовую, демографическую, экономическую, социологическую и другие стороны нашей жизни. Их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Изучение банковских процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

В случае возникновения кредитных обязательств, я смогу рассчитать все платежи для уплаты банку вне зависимости от того какую процентную ставку предлагает банк (простые или сложные проценты), смогу рассчитать штрафные санкции в случае просрочки платежа. Работа по данной теме для меня оказалась полезной, а также она принесла мне необходимые знания финансовой математики в сфере банковских процентов.

В данной работе рассмотрены основные методы решения задач на кредиты и вклады. Тема работы очень актуальна, так как все рассматриваемые задачи взяты из материалов по подготовке к ЕГЭ по математике «Профиль». Надеюсь, что данная работа будет полезна учащимся 10-11 класса, а также преподавателям математики.

Я считаю, цели, поставленные в работе, были достигнуты. Изучив специальную литературу, посвящённую простым и сложным процентам, я расширила свои математические навыки и научилась самостоятельно решать задачи по теме исследования. Тем самым я подготовилась к решению заданий №15, которые содержатся в материалах ЕГЭ.

Исследование и рассмотрение различных типов заданий №15 ЕГЭ показало, что отличное знание теоретического аспекта темы, умение оперировать этими знаниями, позволяют ученикам старшей школы решать задачи повышенной сложности из Единого Государственного Экзамена по теме «Финансовая математика».

Также, для успешного решения таких задач, необходимо отработать аппарат стандартных вычислений, так как все экономические задачи направлены на серьёзные вычисления. Экономические задачи – это не просто задачи из математики, это часть нашей жизни в современном мире. Умение их решать будет полезно в будущем, как для проверки банковских операций при оформлении кредитов или вкладов, так и в простых жизненных ситуациях, что поможет не совершать мелких и фатальных ошибок.

## **Список литературы.**

1. Арталь Л., Салес, Ж. Мир математики: в 40 т. Т. 19 Ипотека и уравнения. Математика в экономике[Текст]/Л. Арталь, Ж. Салес ‒ Пер.с исп. – М.: Де-Агостини, 2014 ‒ 160 с.
2. Белоусов Р.С. и др. Я познаю мир. Экономика. Энциклопедия. Москва ООО издательства АСТ, 2001 – 489с.
3. Вахрушева Н.В. Финансовые вычисления.: Учебное пособие для старших классов, профильное обучение /Н.В.Вахрушева.– Краснодар: Перспективы образования, 2008 – 132 с.
4. Виноградова Н.Ю. Финансовая грамотность населения Российской Федерации как фактор экономического благосостояния государства: статья / Н.Ю. Виноградова. – Актуальные направления научных исследований: перспективы развития: материалы II Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 16 июля 2017 г.)/редкол.: О.Н. Широков [и др.]. – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2017
5. Виленкин Н.Я. Математика. Учебник для 5 класса средней школы. – М.: Просвещение, 2017.
6. Виленкин Н.Я. Математика. Учебник для 6 класса средней школы. – М.: Просвещение, 2018.
7. Гончарова Л.В. Предметные недели в школе. Математика. Волгоград: издательство «Учитель№, 2003г.
8. Дорофеев Г.В., Седова Е.А. Процентные вычисления. – Москва: Дрофа, 2003 г.
9. Иоффе А. Экономическая грамотность современного российского школьника [Электронный ресурс]: статья // А.Иоффе .‒ «Мой профсоюз», №37, 14.09.2017‒ Режим доступа: http://www.ug.ru/archive/71564
10. Михеева С.А. Школьное экономическое образование. Методика обучения и воспитания.: Практикум для студентов педвузов/С.А. Михеева. – Издательство «Вита-Пресс», 2013 г. – 176 с.
11. Ресурсы интернет: [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org/)
12. Яценко Н.Е. Толковый словарь обществоведческих терминов/ Н.Е.Яценко.– СПб.: Лань, 1999 – 524 с.
13. Ященко И.В. Методические указания для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2017 года по математике. / И.В. Ященко, А.В. Семёнов, И.Р. Высоцкий. – М.: ФИПИ, 2017 – 45 с.
14. Ященко И.В. ЕГЭ 2017 Математика. 30 вариантов. Профильный уровень: Метод. указания / под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2017 – 216 с.
15. Ященко И.В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки: учебное пособие / И.В. Ященко, С.А. Шестаков.– М.: Просвещение, 2017 – 384 с.

***Приложение 1***

**Задачи на вклады**

**Задача 1.** Вкладчик открыл счёт в банке, разместив сумму в 120000 рублей под 10% годовых. Какая сумма будет на счёте через 3 года?

**Решение.** В конце каждого года размер вклада увеличивается на 10%, то есть в m = 1+​ = раз. Согласно условию задачи имеем:

Размер вклада после 1-го начисления: 120 000 \* = 132000,

Размер вклада после 2-го начисления: 132 000 \* = 145200,

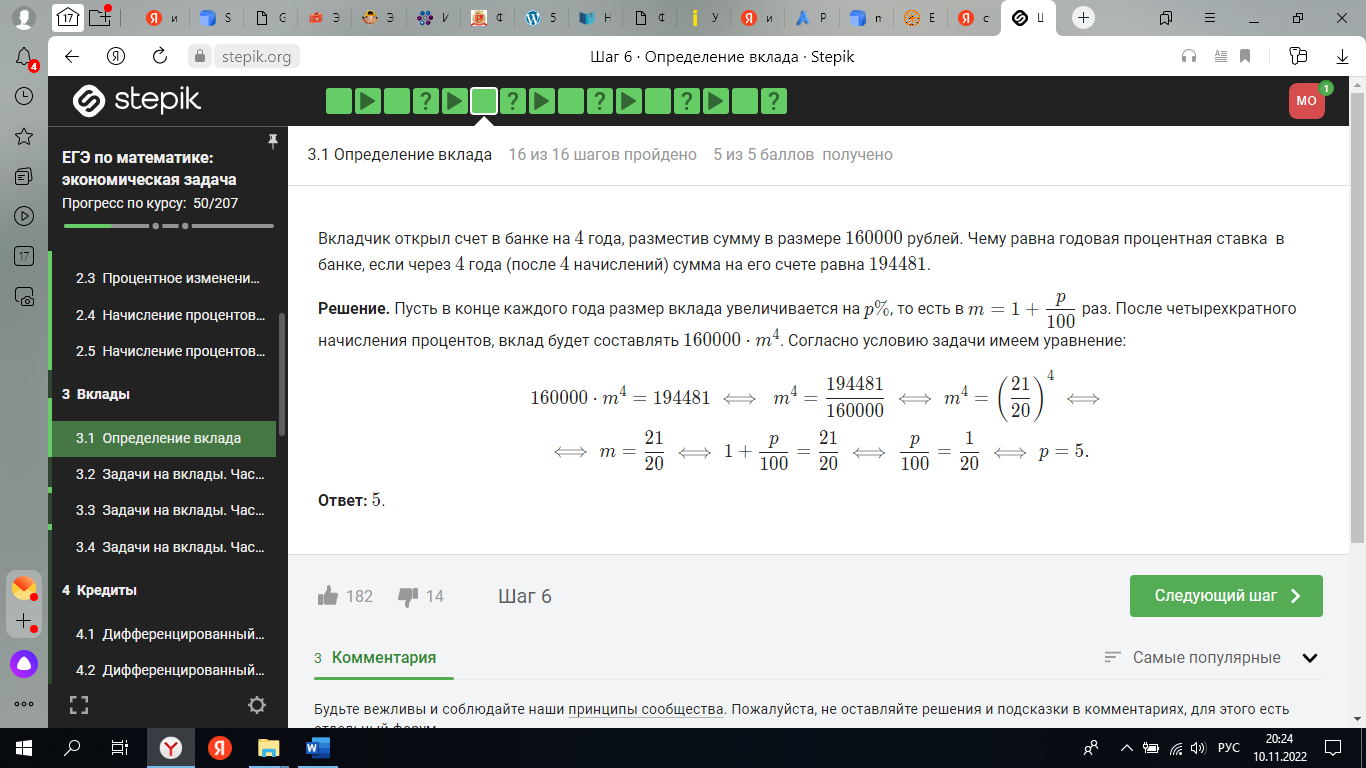
Размер вклада после 3-го начисления: 145 200 \* = 159720.

**Ответ:** 159720 рублей.

**Замечание.** Заметим, что считать каждое начисление процентов отдельно вовсе не обязательно. Согласно формуле сложных процентов, размер вклада после трёхкратного начисления процентов будет равен 120000\*m3. Подставляя вместо *m* его значение получим величину равную:   
120000\*m3 = 120000\*3  = 120 \* 1331 = 159720.

**Задача 2.** Вкладчик открыл счет в банке на 4 года, разместив сумму в размере 160000 рублей. Чему равна годовая процентная ставка в банке, если через 4 года (после 4 начислений) сумма на его счете равна 194481.

**Решение.** Пусть в конце каждого года размер вклада увеличивается на *p*%, то есть в m = 1+​ раз. После четырехкратного начисления процентов, вклад будет составлять 160000\*m4. Согласно условию задачи имеем уравнение:



**Ответ:** 5%.

**Задача 3.** Вкладчик положил в банк 1000000 рублей под 10% годовых на 3 года (проценты начисляются один раз после истечения каждого года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года до начисления процентов) на счёт фиксированную сумму 133000 рублей. Какая сумма будет на счёте у вкладчика через 3 года?

**Решение.** По условию задачи, в конце каждого года вкладчик увеличивает размер вклада на фиксированную сумму 133000 рублей, а затем размер вклада увеличивается на 10%, то есть в m = 1+ ​= 1,1 раз. Согласно условию задачи имеем:

Размер вклада после 1-го начисления: (1000000 + 133000)\*m = 1246300,

Размер вклада после 2-го начисления: (1246300 +133000)\*m = 1517230,

Размер вклада после 3-го начисления: (1517230+133000)\*m = 1815253.

**Ответ:** 1815253 рублей.

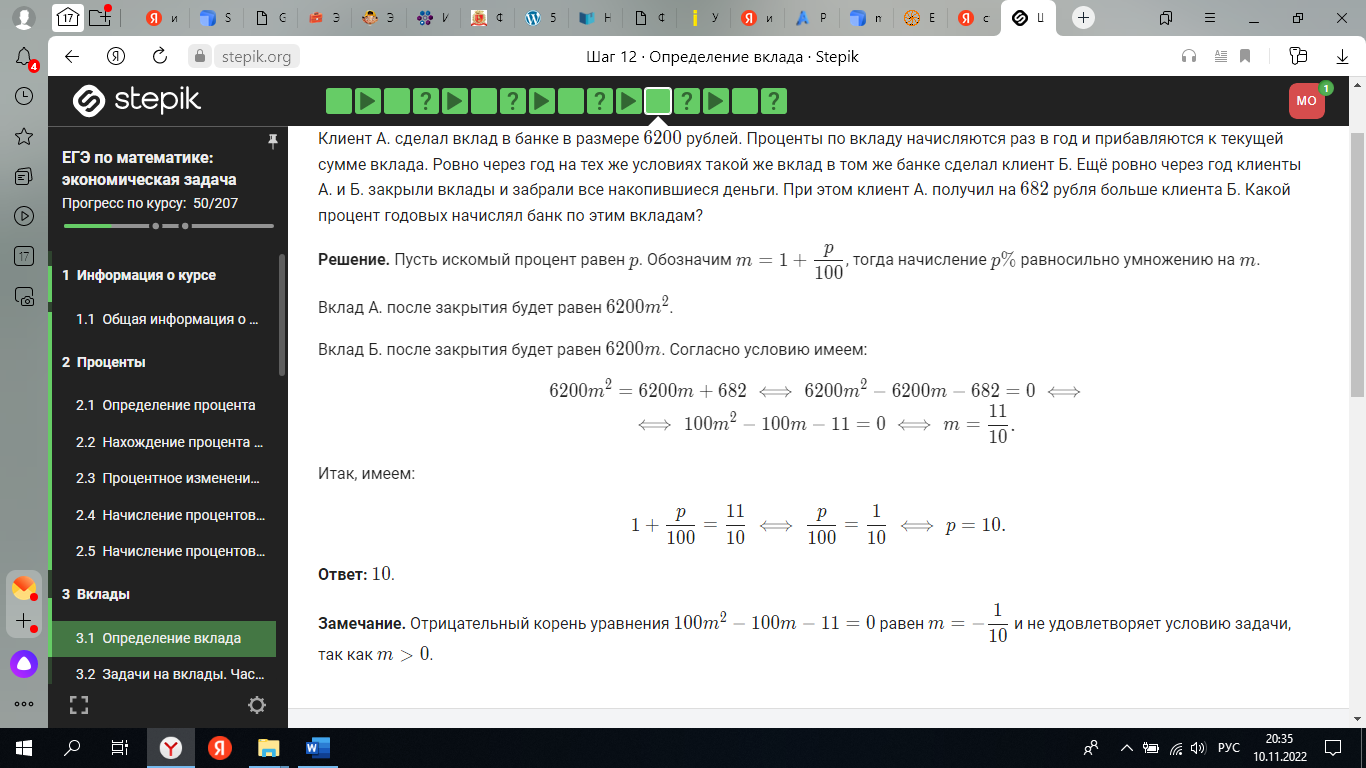
**Задача 4.** Клиент А сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

**Решение.** Пусть искомый процент равен *p*.

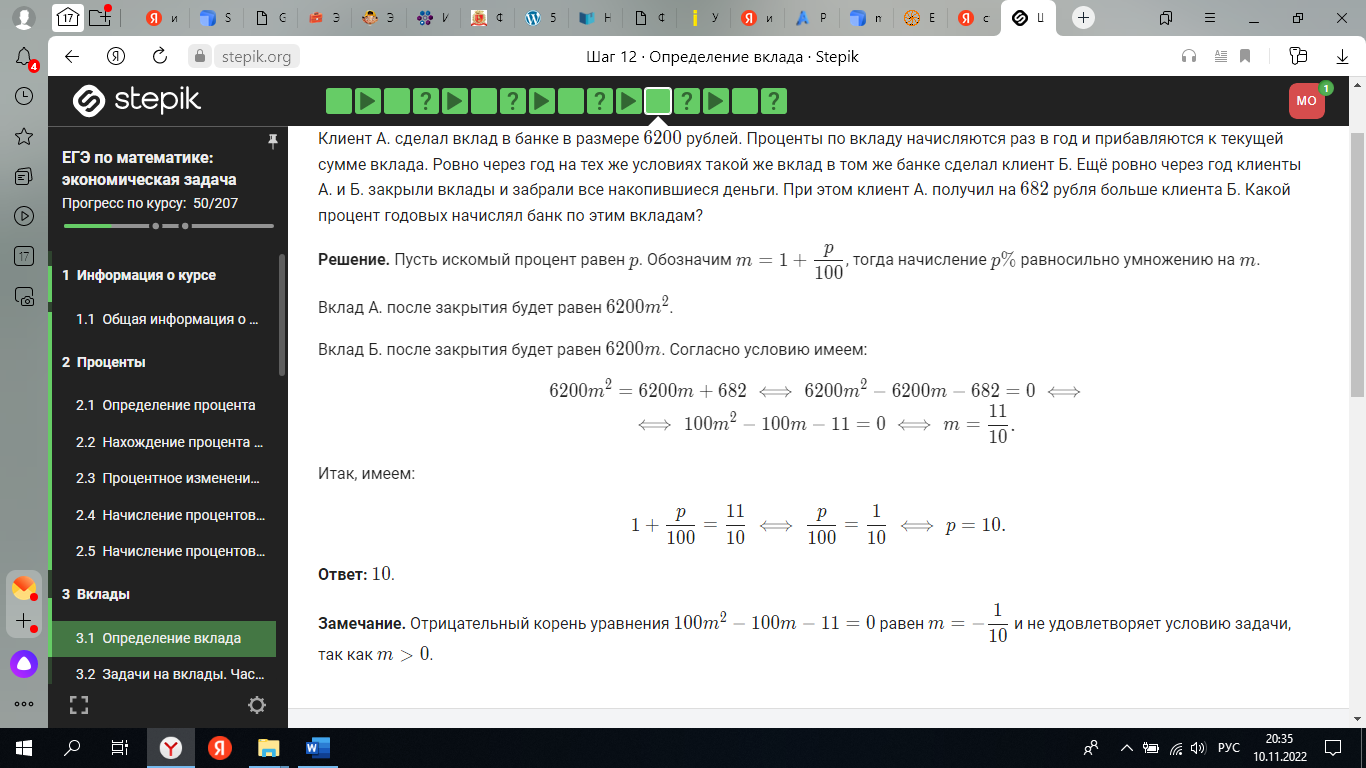
Обозначим m=1+​, тогда начисление *p*% равносильно умножению на *m*.

Вклад А после закрытия будет равен 6200\*m2.

Вклад Б после закрытия будет равен 6200m. Согласно условию имеем:



Делаем обратную замену



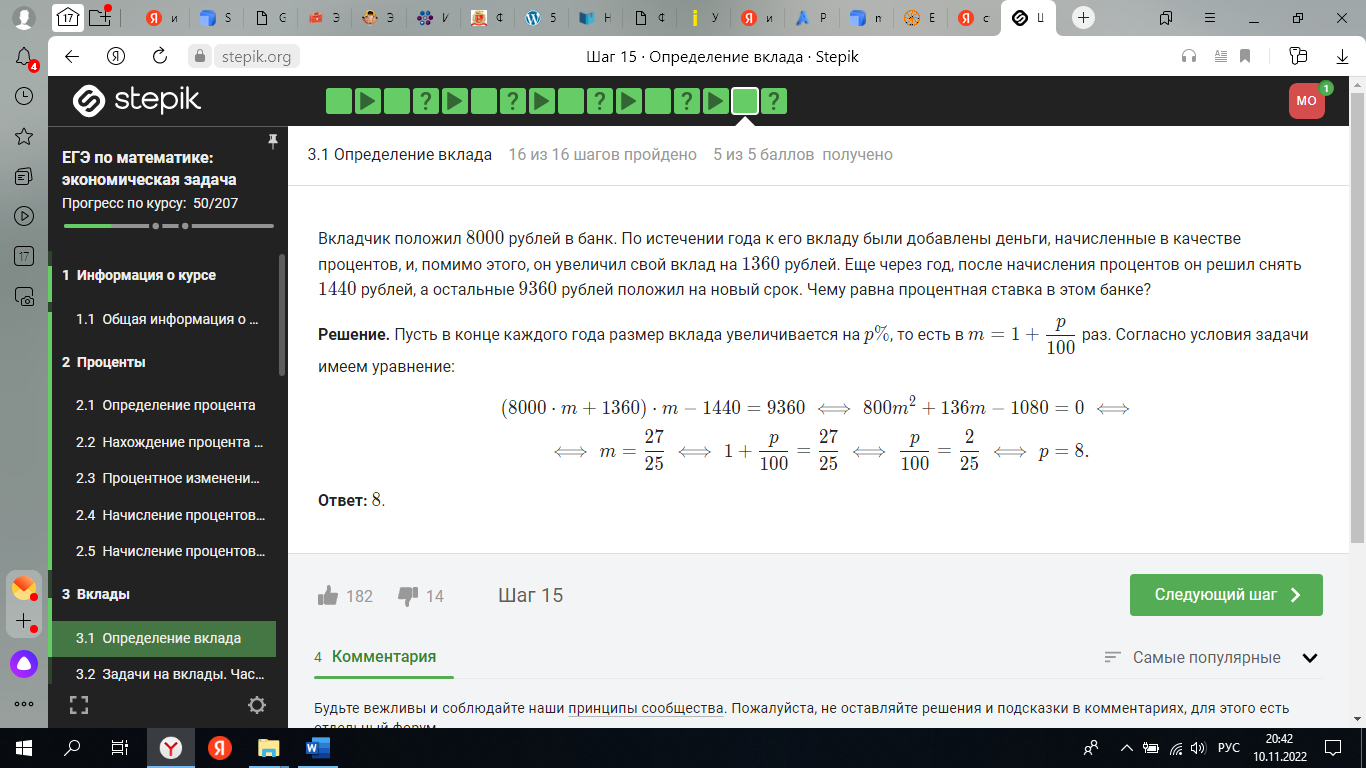
**Ответ:** 10%.

**Замечание.** Отрицательный корень уравнения 100m2-100m-11=0 равен

m=-​ и не удовлетворяет условию задачи, так как *m*>0.

**Задача 5.** Вкладчик положил 8000 рублей в банк. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, он увеличил свой вклад на 1360 рублей. Еще через год, после начисления процентов он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

**Решение.** Пусть в конце каждого года размер вклада увеличивается на *p*%, то есть в m = 1+ раз. Согласно условия задачи имеем уравнение:



**Ответ:** р=8%.

***Приложение 2***

**Задачи на дифференцированный платеж**

**Задача 1.** 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

**Решение:** Пусть начальная сумма кредита равна S. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

; ; ; …; . - размеры долгов (остаток по кредиту на конец месяца), тогда ежемесячная выплата процентов выглядит следующим образом:

; ; ; ; ...; - ежемесячный %

Находим размеры выплат:

1-й месяц: + =

2-й месяц: + ∙ =

3-й месяц: + ∙ = и.т.д .

Замечаем, что выходит последовательность, которая уменьшается на 2. Тогда используя формулу n-го члена арифметической прогрессии аn = а1 + d(n - 1) при а1=148, d= -2

находим 12-й месяц: а12 = 148 - 2(11 - 1) = 126, т.е. .

Так как нам известна сумма первых двенадцати месяцев составляем уравнение:

+ = 1370000

Вынесем за скобки общий множитель и воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии Sn =

*S =* = 2000000

Ответ: 2000000

**Задача 2**. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования.

**Решение:** S - сумма кредита, r = 3%

Сперва нужно вычислить сумму кредита. Известно, что восьмая выплата = 99,2 тыс. Находим размеры выплат:

1-й месяц: + =

2-й месяц: + ∙ =

3-й месяц: + ∙ =

....

8-й месяц: → = 99200 → S = 99200∙ = 1200000, то есть планируется взять в кредит 1200000 рублей.

Теперь, чтобы найти сумму, которую нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии Sn = . Для этого сперва найдем пятнадцатую выплату:

а15 = 145 - 3∙14 = 103, т.е.

Общая сумма равна: ++…S

S15 = = 1860, т.е. = = 1488000

Ответ: 1488000

**Задача 3.** Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 25 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 9 млн. рублей.

**Решение:**

Пусть S млн. рублей сумма первоначального кредита. В середине каждого года действия кредита долг возрастает на 25 %, x млн. рублей заёмщик выплачивает в конце 3-го и 4-го годов. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 год | начало | S млн. рублей | 2 год | начало | S млн. рублей |
| середина | S + 0,25 S = 1,25 S | середина | S + 0,25 S = 1,25 S |
| конец | 1,25 S - **0,25 S** = S | конец | 1,25 S - **0,25 S** = S |

В сумме за 2 года он погашает сумму 0,25S + 0,25S = **0,5S**.

В последние два года (3-й и 4-й) сумма долга сначала возрастает в 1,25 раза, а затем, погашается равными долями в x млн. рублей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 год | начало | S млн. рублей | 4 год | начало | (1,25 S – **х**) млн. руб. |
| середина | S + 0,25 S = 1,25 S | середина | (1,25 S – **х**)1,25 |
| конец | 1,25 S - **х** | конец | 1,252 S - 1,25 х **-х** |

На конец 4-го года, сумма долга составляет 0 рублей. Отсюда получаем

1,252 S - 1,25 х –х = 0,

1,252 S - 2,25 х = 0, х = =

За 4 года сумма выплат составила 0,5S + 2х. По условию общая сумма выплат превышает 9 млн. рублей, то есть, 0,5S + 2>9, 4,5S + 12,5S > 81,

17S > 81, S > 4 . При минимальном целом значении S = 5 это неравенство выполняется, следовательно, размер кредита составил 5 млн. рублей.

**Ответ:** 5 000 000

**Задача 4.** 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

**Решение:**Обозначим за S размер кредита, взятого в банке 15 января. 1-го февраля он уже вырастет на 3% и будет составлять 1,03S. После этого происходит выплата так, чтобы долг менялся каждый месяц на одну и ту же величину, то есть выплата в первый месяц составит: . Составим схему выплаты кредита:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дата | Долг до выплаты, тыс. руб. | Выплата, тыс. руб. | Долг после выплаты, тыс. руб. |
| 15.01 | S |  |  |
| 01.02 | 1,03S |  |  |
| 14.02 |  |  |  |
| 15.02 |  |  |  |
| 1.03 |  |  |  |
| 14.03 |  |  |  |
| 15.03 |  |  |  |
| 15.04 |  |  |  |
| 15.05 |  |  |  |
| 15.06 |  | *=*57,5 |  |

Решим уравнение: . Получаем, что S = 450 тыс. руб.

Рассчитаем всю сумму, выплаченную банку за 9 месяцев:

. Подставим S = 450. Получаем:

Ответ: 517,5 тыс. руб.

**Задача 5.** Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

**Решение:**Обозначим за S полную сумму кредита. По условию долг должен уменьшатся до нуля равномерно. Составим геометрическую прогрессию: S; ; …; ; ; 0.

К концу каждого месяца долг увеличивается на r%, то есть умножается на коэффициент k, равный : S; ; …; ; ; 0.

Отсюда следует, что ежемесячные выплаты должны быть представлены в следующем виде: ; ; …; ; ; 0.

Всего следует заплатить: .

Общая сумма выплат оказалась на 13% больше суммы, взятой в кредит. Получаем: ; k = = 1,02; r = 2%.

Ответ: 2%.

***Приложение 3***

**Задачи на аннуитетный платеж**

**Задача 1.** В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какую сумму взяли в кредит, если известно, что кредит был выплачен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма выплат составила 311040 рублей.

**Решение.** Так как в задаче все четыре платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах.

Пусть ежегодный платеж по кредиту равен *X* млн рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 20%, то есть в m = 1+1,2 раз, и уменьшается на *X* млн рублей.

Обозначим начальную сумму *S*. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: Sm - X,

Долг после 2-й выплаты: Sm2-Xm-X,

Долг после 3-й выплаты: Sm3-Xm2-Xm-X,

Долг после 4-й выплаты: Sm4-Xm3-Xm2-Xm-X.

Так как кредит был погашен за четыре года, то

*Sm*4−*Xm*3−*Xm*2−*Xm*−*X*=0 ⟹ *X*= ​.

Общая сумма выплат равна

Sконеч = 4X=​=311040.

Отсюда

S = ​=201300.

**Ответ:** 201300 рублей.

**Задача 2.** В июле 2020 года планируется взять кредит на сумму 177120 рублей. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, чему равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если известно, что кредит был выплачен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года).

**Решение.** Так как в задаче все 4 платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах. Пусть ежегодный платеж по кредиту равен *X* рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 25%, то есть в m = 1+1,25 раз, и уменьшается на *X* млн рублей.

Обозначим *S*=177120. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: Sm - X,

Долг после 2-й выплаты: Sm2-Xm-X,

Долг после 3-й выплаты: Sm3-Xm2-Xm-X,

Долг после 4-й выплаты: Sm4-Xm3-Xm2-Xm-X.

Так как кредит был погашен за четыре года, то

*Sm*4−*Xm*3−*Xm*2−*Xm*−*X*=0 ⟹ *X*= ​.

Общая сумма выплат равна

Sконеч = 4X=4\*75000 = 300000.

**Ответ:** 300000 рублей.

**Задача 3.** В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на r %;

- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга. Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56 595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей. Найдите r.

**Решение:**

Пусть S рублей сумма кредита, ежегодные выплаты x руб., r % годовых,

к = 1 + r/100. Выплаты: b = 81095 руб., х = 56595 руб. По условию долг на июль меняется так:

|  |  |
| --- | --- |
| год | Долг (руб.) |
| 1 | кS - b |
| 2 | (кS – b)к - b |

Если долг выплачен двумя равными платежами b руб., то (кS – b)к – b = 0

к2 S – кb - b = 0; к2 S= (к + 1)b;S = ((к+1) b)/к2

Если долг выплачен тремя равными платежами х руб., то

|  |  |
| --- | --- |
| год | Долг (руб.) |
| 1 | кS - х |
| 2 | (кS – х)к - х |
| 3 | ((кS – х)к – х)к - х |

((кS – х)к – х)к – х = 0

к3 S – к2 х – кх - х = 0

S = ((к2 + к+1) х)/к3

Решим систему уравнений

=

(к+1)к b = х(к2 + к+1)

(к2 + к) b = х(к2 + к) + х

(к2 + к) b - х(к2 + к) – х = 0

(к2 + к)( b – х) –х = 0

(81095 – 56595) (к2 + к) – 56595 = 0

24500к2 + 24500к - 56595 = 0

100к2 + 100к – 231 = 0

D = 102400, к = 1,1 к = -21 не удовлетворяет условию

к = 1 + r/100, r = 10%

Ответ: 10

**Задача 4.** 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%) затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

**Решение:** Пусть S = 9282000 рублей  размер взятого в банке кредита. 31 декабря каждого года размер кредита увеличился на 10%, а затем, Алексей переводит в банк X рублей, т.е. остаток через четыре года будет равен нулю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| год | дата | долг |
| 0 | 31 декабря 2014 | S = 9282000 рублей |
|  | 31 декабря 2015 | 1,1S |
| 1 | 1 января 2016 | 1,1S - х |
|  | 31 декабря 2016 | (1,1S – х)1,1 |
| 2 | 1 января 2017 | 1,12 S – 1,1х -х |
|  | 31 декабря 2017 | (1,12 S – 1,1х –х)1,1 |
| 3 | 1 января 2018 | (1,12 S – 1,1х –х)1,1 - х |
|  | 31 декабря 2018 | ((1,12 S – 1,1х –х)1,1 – х)1,1 |
| 4 | 1 января 2019 | ((1,12 S – 1,1х –х)1,1 – х)1,1 - х |

Решим уравнение: ((1,12 S – 1,1х –х)1,1 – х)1,1 – х = 0

1,14 S – 1,13 х - 1,12 х - 1,1х –х = 0

Х =

Х =

Х = 2928200

**Ответ:** 2928200.

***Приложение 4***

# **Определение величины процента ставки кредита /долг, убывающий согласно таблице в условие задачи**

**Задача 1.** 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере . Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается напо сравнению с концом предыдущего месяца, где – целое число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата |  |  |  |  |  |  |  |
| Долг (млн. руб.) |  |  |  |  |  |  |  |

Найдите наибольшее значение, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн. рублей.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальная сумма, млн. руб. | Сумма долга после начисления процентов, млн. руб. | Выплата, млн. руб. | Конечная сумма, млн. руб. |
|  | 1 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Учитывая, что общая сумма выплат меньше 1,2 млн. руб., составим и решим неравенство:

Ответ: 7%