Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова»
(ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»)

Н. В. ПОПОВА

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА»

Утверждено издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Москва
ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»
2016

УДК
ББК
П58

Рецензенты: д-р экон. наук Ю. Н. Ч е р е м н ы х,
д-р физ-мат. наук А. В. М е л ь н и к о в

Попова Н. В.
П58 «Математические методы финансового анализа» : учебное пособие. – М. : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2016. – 80 с.
ISBN

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Математические методы финансового анализа». Приводятся основные определения, теоремы, формулы и задачи по всем разделам дисциплины. Пособие содержит контрольные вопросы для проверки знаний и индивидуальные контрольные задания.

Для студентов, обучающихся по направлениям бакалавриата «Прикладная математика и информатика» и «Экономика».

УДК
ББК

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1.1. Математические методы, используемые для анализа инвестиций в условиях определенности

Вычисление пределов функций и последовательностей. В анализе инвестиций в условиях определенности чаще всего приходится вычислять пределы от показательных и логарифмических функций. При этом рекомендуется использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций. Так как $a^u - 1 \sim u \cdot \ln a$ и $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$, то по свойству эквивалентных бесконечно малых функций

$$\lim_{u\to 0} \varphi(u)\left(a^u - 1\right) = \lim_{u\to 0} \varphi(u) u \ln a$$

и

$$\lim_{u\to 0} \varphi(u) \ln(1+u) = \lim_{u\to 0} \varphi(u) u,$$

где $\varphi(u)$ – некоторая функция.

Теорема (о сходимости монотонной последовательности). Неубывающая (невозрастающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу) сходится, причем $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\} = \sup\{x_k\}$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\} = \inf\{x_k\}\right)$.

Некоторые элементарные функции и их графики. Для иллюстрации процессов наращения и дисконтирования денежных сумм используются графики линейной, показательной, дробно-линейной функций. Правила построения графиков и вычисления пределов функций можно посмотреть в работе В. Е. Барбаумова и Н. В. Поповой «Индивидуальные контрольные задания по дисциплине «Математический анализ». Построение графиков. Предел и непрерывность функции» [2].

Применение производных к исследованию функций. Пусть дана дифференцируемая функция $f(u)$, где $u = u(x)$. По определению $f'_x = f'_u \cdot u'_x$. В частности,

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\cdot u', \quad \left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u',$$

$$\left(\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\right)' = \left(e^{\varphi(x)\ln f(x)}\right)' = e^{\varphi(x)\ln f(x)}\left(\varphi(x)\ln f(x)\right)' =$$

$$= e^{\varphi(x)\ln f(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Если производная $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ является возрастающей (убывающей) на этом интервале.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда вторая производная неотрицательна (неположительна) на этом интервале, т.е. $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$.

Разложение функций в степенные ряды

Чаще всего в анализе инвестиций используются следующие разложения:

$$e^u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n!}, \; u \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}, \; u \in (-1, 1],$$

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n, \; u \in (-1, 1).$$

Теоремы о непрерывных функциях, об исследовании функций с помощью производных, о разложении функций по формуле Тейлора можно посмотреть в учебнике [3].

Метод математической индукции

Предположим, требуется доказать истинность утверждения $A(n)$ для всех натуральных n. Применение метода математической индукции для доказательства этого утверждения требует выполнения трех шагов: 1) проверить истинность утверждения для $n = 1$; 2) предположить истинность утверждения $A(n)$ для $n = k$, где $k -$ любое натуральное число; 3) доказать истинность утверждения $A(n)$ для $n = k+1$.

Методы оптимизации решения задач линейного программирования. Пусть дана каноническая задача линейного программирования

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$$f = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n \left(\min\right)$$

Оптимальное решение канонической задачи линейного программирования находят на основе следующих теорем.

Теорема. Каноническая задача минимизации линейного программирования разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений задачи не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений.

Теорема. Если задача линейного программирования разрешима, то по крайней мере одно из ее решений достигается в угловой точке множества допустимых решений задачи.

Для отыскания оптимального решения канонической задачи линейного программирования применяется симплекс-метод или используется программное обеспечение решения задач линейного и выпуклого программирования (средство «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Office Excel).

Для отыскания оптимального решения любой задачи линейного программирования ее достаточно привести к каноническому виду и применить соответствующие теоремы.

1.2. Основные понятия и методы финансовых вычислений

Для приведения денежных сумм к заданному моменту времени применяется одна из двух операций – наращения или дисконтирования. Для выполнения этих операций необходима процентная ставка.

Операция ***наращения*** применяется тогда, когда заданы сумма первоначального долга P_0, процентная ставка и срок долга T. Требуется найти сумму погашаемого долга S_T. Найденную наращением сумму погашаемого долга S_T называют ***наращенной суммой долга***.

Определение. Число $F(T) = S_T / P_0$ называется ***множителем наращения*** на временном отрезке [0, T]. Множитель наращения показывает во сколько раз наращенная сумма долга больше первоначальной. Очевидно, что $F(T) \geq 1$.

Определение. Кривая наращения – это график зависимости наращенной суммы долга S_T от срока долга T. Кривая наращения – это графическое изображение процесса наращения суммы P_0.

Операция ***дисконтирования*** применяется тогда, когда заданы сумма погашаемого долга S_T в момент T в будущем, срок долга T и процентная ставка. Требуется найти сумму первоначального долга P_0. Найденную дисконтированием сумму первоначального долга P_0 называют современной величиной или ***современной стоимостью*** суммы погашаемого долга S_T.

Определение. ***Современная стоимость*** суммы S_T, подлежащей выплате через время T, это сумма денег P_0, которая, будучи вложенной в момент $t = 0$ под заданную процентную ставку, через время T даст сумму S_T.

Определение. Число $\nu(T) = P_0 / S_T$ называется ***дисконтным множителем*** на временном отрезке [0, T]. Дисконтный множитель показывает, какую долю от суммы погашаемого долга составляет современная его величина. Очевидно, что $\nu(T) \leq 1$.

Определение. Дисконтная кривая – это график зависимости современной стоимости долга P_0 от срока долга T. Дисконтная кривая – это графическое изображение процесса дисконтирования суммы погашаемого долга S_T.

Определение. ***Проценты***, или процентные деньги, – это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг на срок T

$$I(T) = S_T - P_0 .$$

Если доход получен в результате операции дисконтирования, то абсолютную величину дохода называют ***дисконтом*** и обозначают $D(T)$.

В финансовой математике различают ***два вида процентных ставок***. Пусть t^* – фиксированный отрезок времени.

Определение. Процентная ставка за период t^* – это отношение дохода за время t^* к сумме вложенных средств в начале этого периода. Если период [0, t^*], то

$$i(t^*) = \frac{S_{t^*} - P_0}{P_0}.$$

Процентная ставка $i(t^*)$ показывает, на сколько процентов наращенная сумма долга S_{t^*} больше суммы первоначального долга P_0.

Определение. Учетная ставка за период t^* – это отношение дохода за время t^* к сумме погашаемого долга в конце этого периода. Если период $[0, t^*]$, то

$$d(t^*) = \frac{S_{t^*} - P_0}{S_{t^*}}.$$

Учетная ставка $d(t^*)$ показывает, на сколько процентов сумма первоначального долга P_0 меньше суммы погашаемого долга S_{t^*}.

В зависимости от выбранного отрезка t^*, процентную ставку называют полугодовой, годовой и т. д. Чаще всего применяется годовая процентная ставка.

Обе ставки выражаются ***в процентах*** или ***десятичных дробях.***

Отрезок времени t^*, к которому приурочена процентная ставка, называется ***периодом начисления процентов.***

Определение. Процентная ставка называется ***простой***, если на каждом периоде база для начисления процентов остается постоянной.

Определение. Процентная ставка называется ***сложной***, если на каждом периоде базой для начисления процентов является сумма, полученная на предыдущем периоде начисления процентов.

Методы наращения и дисконтирования по ставке *i*

Пусть i – процентная ставка за единицу времени. Существуют следующие ***методы наращения*** по ставке i:

– по ***простой*** процентной ставке

$$S_n = P_0(1 + in),\ n \ge 0.$$

– по ***сложной*** процентной ставке

$$S_n = P_0(1 + i)^n,\ n \ge 0.$$

– по годовой ***номинальной*** ставке $i^{(m)}$ (начисление сложных процентов производится m раз в году каждый раз по ставке $i^{(m)}/m$)

$$S_n = P_0\left(1 + i^{(m)}/m\right)^{mn},\ n \ge 0,\ m \ge 1.$$

– по годовой ***непрерывной*** процентной ставке δ

$$S_n = P_0 e^{\delta n},\ n \ge 0 .$$

Непрерывное начисление процентов – это начисление сложных процентов за бесконечно малые отрезки времени. По определению $\delta = \lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)}$.

Методы дисконтирования по ставке i получают путем решения задачи, обратной задаче о наращении суммы долга. Из формул наращения по ставке i для сроков $n \ge 0$ получаем

$$P_0 = \frac{S_n}{1+in}, \qquad P_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n},$$

$$P_0 = \frac{S_n}{\left(1+i^{(m)}/m\right)^{mn}},\quad m \ge 1, \qquad P_0 = S_n e^{-n\delta}.$$

Это формулы дисконтирования суммы S_n соответственно по простой, сложной, номинальной и непрерывной процентной ставке.

Методы дисконтирования и наращения по учетной ставке *d*

Пусть d – учетная ставка за единицу времени. ***Дисконтирование*** по ставке d называют ***коммерческим,*** или ***банковским***. Существуют следующие методы банковского дисконтирования:

– по ***простой*** учетной ставке

$$P_0 = S_n\left(1-nd\right),\ n \ge 0 .$$

– по ***сложной*** учетной ставке

$$P_0 = S_n\left(1-d\right)^n,\quad n \ge 0 .$$

– по ***годовой номинальной*** учетной ставке $d^{(m)}$

$$P_0 = S_n\left(1-d^{(m)}/m\right)^{mn},\ n \ge 0,\ m \ge 1.$$

– по годовой ***непрерывной*** процентной ставке δ

$$P_0 = S_n e^{-n\delta},\ n \ge 0 .$$

Из формул дисконтирования по учетной ставке для сроков $n \ge 0$ получаем следующие ***методы наращения*** по учетной ставке d:

$$S_n = \frac{P_0}{1-nd}, \qquad S_n = \frac{P_0}{(1-d)^n},$$

$$S_n = \frac{P_0}{\left(1-d^{(m)}/m\right)^{mn}},\quad m \ge 1, \qquad S_n = P_0 e^{\delta n}.$$

При непрерывном начислении процентов формулы наращения и дисконтирования по ставкам i и d совпадают (при $m \to \infty$ номинальные процентные ставки $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ перестают различаться).

Замечание. В анализе инвестиций применяется процентная ставка наращения i.

Определение. Процентные ставки различного вида, приводящие к одному и тому же финансовому результату за один и тот же срок, называются ***эквивалентными***.

Определение. Годовая ***эффективная*** процентная ставка $i_{эф}$ – это ставка сложных процентов, начисляемых один раз в год, эквивалентная годовой номинальной процентной ставке $i^{(m)}$.

Приравнивая множители наращения по сложной i и номинальной процентной ставке $i^{(m)}$, получаем

$$i_{эф} = \left(1 + i^{(m)}/m\right)^m - 1.$$

Эффективная ставка $i_{эф}$ измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов.

Определение. Годовая ***эффективная учетная*** ставка $d_{эф}$ – сложная учетная ставка, дисконтирование по которой производится один раз в году, эквивалентная номинальной учетной ставке $d^{(m)}$.

Из равенства дисконтных множителей по сложной d и номинальной учетной ставке $d^{(m)}$ получаем

$$d_{эф} = 1 - \left(1 - d^{(m)}/m\right)^m.$$

Ставка $d_{эф}$ показывает, на сколько процентов снижается сумма погашаемого долга за год.

Определение. Процентная ставка называется ***переменной***, если она изменяет свое значение в течение срока долга.

Пусть срок долга $n = n_1 + \ldots + n_k$, где n_p – период в сроке долга, когда применяется процентная ставка i_p, $p = 1, \ldots, k$. Тогда, например, формула наращения по простой переменной процентной ставке имеет вид

$$S_n = P_0\left(1 + i_1 n_1 + \ldots + i_k n_k\right),$$

а формула дисконтирования по сложной переменной процентной ставке имеет вид

$$P_0 = \frac{S_n}{(1+i_k)^{n_k}(1+i_{k-1})^{n_{k-1}}....(1+i_1)^{n_1}}.$$

Формулы наращения и дисконтирования по непрерывной переменной процентной ставке имеют следующий вид:

$$S_n = P_0 e^{\int_0^n \delta(t)dt} \quad \text{и} \quad P_0 = S_n e^{-\int_0^n \delta(t)dt}.$$

Как правило, рассматриваются два вида функции $\delta(t)$ − линейная $\delta(t) = \delta_0 + \alpha t$ и экспоненциальная $\delta(t) = \delta_0 \cdot \alpha^t$.

Средняя процентная ставка при использовании переменной простой или сложной процентной ставки определяется из равенств

$$\left(1+i_{\text{ср}}n\right) = 1 + i_1 n_1 + ... + i_k n_k$$

и

$$\left(1+i_{\text{ср}}\right)^n = (1+i_1)^{n_1}...(1+i_{k-1})^{n_{k-1}}(1+i_k)^{n_k}.$$

Как видим, средняя ставка эквивалентна переменной.

Доходность финансовой операции

Определение. Доходность финансовой операции ***за единицу времени*** – это число $\bar{r}$, удовлетворяющее равенству

$$P(0)(1+\bar{r}T) = P(T) \text{ или } P(0)(1+\bar{r})^T = P(T)\cdot$$

Определение. Доходность финансовой операции ***за весь период*** [0, T] – это число r, удовлетворяющее равенству

$$P(0)(1+r) = P(T)\cdot$$

Если необходимо учесть инфляцию, то в уравнении доходности $P(T) = S_n / J(T)$, где $J(T)$ − индекс цен за период [0, T]. Если темп инфляции за единицу времени h, то $J(T) = (1+h)^T$.

Эквивалентное изменение условий контракта

Расчет параметров эквивалентного изменения условий контракта производится на основе определения эквивалентности финансовых потоков (раздел 1.3), а также на основе следующего определения.

Определение. Денежные суммы C_{t_1} в момент t_1 и C_{t_2} в момент t_2 называются ***эквивалентными по принятой процентной ставке***, если, будучи приведенными к одному моменту времени по данной процентной ставке, они совпадают.

ЗАДАЧИ

1. Предприниматель получил кредит на полтора года в размере 40 тыс. д. е. с условием возврата 50 тыс. д. е. Определить проценты и процентную ставку за полтора года. Чему равен множитель наращения суммы кредита?

2. Предприятие получило кредит на один год в размере 100 тыс. д. е. с условием возврата 160 тыс. д. е. Рассчитать процентную и учетную ставку. Что они показывают?

3. Известно, что капитал, помещенный в банк, вырос за первый год в 1,4 раза, а за второй год вся сумма увеличилась в 1,2 раза. Определить множитель наращения вклада и процентную ставку за два года. На сколько процентов увеличился капитал за все время?

4. В результате инвестирования первоначальный капитал за первый год вырос в 1,4 раза, за второй год общий капитал вырос в 1,6 раза, за третий год вся сумма увеличилась в 1,3 раза. Рассчитать множитель наращения первоначальной суммы и определить, на сколько процентов увеличилась первоначальная сумма за 3 года.

5. Имеются два варианта вложения капитала на 2 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 50%, за второй год вся сумма увеличится на 10%. Согласно второму варианту рост капитала составит каждый год 30% от суммы предыдущего года. Какой вариант лучше?

6. Имеются два варианта вложения капитала на 3 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 15%, за второй год вся сумма увеличится на 35%, а за третий год – еще на 10%. Согласно второму варианту рост капитала составит каждый год 20% от суммы предыдущего года. Какой вариант лучше?

7. Клиент банка получил 900 д. е. дохода от размещения денег на депозит на 3 года. Какая сумма была размещена на депозит, если множитель наращения ее за это время составил 1,4? На сколько процентов за это время увеличился вклад?

8. Множители наращения вклада за четыре квартала, следующие друг за другом, соответственно равны 1,15; 1,1; 1,12 и 1,05. Определите процентную ставку: а) за первое полугодие; б) за второе полугодие; в) за год. Что показывают процентные ставки?

9. Предприятие за взятый кредит через год должно вернуть 400 тыс. д. е. Определить величину кредита и размер дисконта, если учетная ставка равна 25%.

10. Вклад в размере 5 тыс. д. е. размещен на банковский счет на срок 3 месяца с условием, что доход от финансовой сделки составит 800 д. е. Определить квартальную процентную ставку. Чему равен множитель наращения вклада за квартал?

11. За время пользования долгом величина процентных денег составила 1 500 д. е. Определить срок долга для различных методов наращения первоначальной суммы долга 950 д. е. по процентной ставке 10% годовых. Объяснить результаты вычислений.

12. За время пользования долгом величина дисконта составила 500 д. е. Определить срок долга для различных методов дисконтирования суммы погашаемого долга 3 000 д. е. по процентной ставке 10% годовых. Объяснить результаты вычислений.

13. По условиям контракта должник уплачивает 36 000 д. е. через 100 дней. Кредит предоставлен под годовую процентную (учетную) ставку 0,08. Определить величину кредита и сумму дисконта при временной базе 365 дней. Результаты вычислений показать на рисунке.

14. Определите современную величину суммы 50 000 д. е., погашаемой через 5 лет. Дисконтирование производится по сложной процентной (учетной) ставке 0,05 годовых: а) один раз в год; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Результаты вычислений показать на рисунке.

15. Срок погашения долга 10 лет. При выдаче кредита была использована сложная учетная ставка 4% годовых. Величина дисконта за 6-й год срока долга составила 339,738624 д. е. Какова величина дисконта за 3-й и 8-й годы в сроке долга? Какова сумма кредита? Ответ получить двумя способами.

16. На вклад начисляются сложные проценты – 8% годовых. Проценты за 6-й год вклада составили 117,546 246 д. е. Какова величина процентов за 3-й и 8-й годы вклада? Какова сумма вклада к концу 8-го года? Ответ получить двумя способами.

17. Сравнить результаты вычисления суммы погашаемого долга по сложной процентной и учетной ставке в следующей кредитной операции: ссуда в 10 тыс. д. е. выдана под ставку 12% годовых на 3 года. Начисление процентов производится: а) один раз в год; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Результаты вычислений показать на рисунке.

18. Сравнить результаты учета векселя на сумму 300 тыс. д. е. методами математического и банковского дисконтирования простыми процентами – 6% годовых за три месяца до погашения. Каков ежемесячный доход кредитора и доход за весь срок долга в каждом случае?

19. Сумма в размере 1 000 д. е. предоставлена в долг под номинальную процентную (учетную) ставку 8% годовых на 3 года. Начисление процентов производится: а) ежегодно; б) каждые полгода; в) ежемесячно. Определить сумму погашаемого долга. Каков ежегодный доход кредитора и доход за весь срок?

20. Величина первоначального вклада, сделанного в начале года, равна 20 000 д. е. Ежемесячно на сумму вклада начисляются простые проценты по годовой процентной ставке 0,12. Определить величину наращенного вклада в конце второго квартала, если каждые два месяца производится реинвестирование вклада

21. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – показательная функция времени. Начальное значение интенсивности процентов 0,1, а годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 1,1; 1; 0,9. Определить срок удвоения суммы долга. Сделать рисунок.

22. Годовая интенсивность процентов – показательная функция времени $\delta(t)=\delta_0 a^t$. Получить зависимость от времени множителей наращения и дисконтных множителей для возможных значений параметра *а*. Показать на рисунке кривые наращения и дисконтные кривые, соответствующие различным значениям *а*.

23. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – показательная функция времени $\delta(t)=0{,}12a^t$. Найти современную стоимость 500 д. е., подлежащих выплате через 2 года, если годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 0,8; 1,1; 1. Объяснить соотношение между полученными суммами

24. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – линейная функция времени. Определить срок удвоения суммы долга, если начальное значение интенсивности процентов 0,1, а годовой прирост интенсивности процентов составляет 0,05; –0,05 и 0. Результат показать на рисунке.

25. Годовая интенсивность процентов – линейная функция времени $\delta(t)=\delta_0+at$. Получить зависимость от времени множителей наращения и дисконтных множителей для возможных значений параметра *а*. Показать на рисунке кривые наращения и дисконтные кривые, соответствующие различным значениям *а*.

26. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – линейная функция времени $\delta(t) = 0{,}13 + at$. Найти современную стоимость 2 000 д. е., подлежащих выплате через 3 года, для следующих значений годового прироста интенсивности процентов: 0,04; –0,04; 0. Объяснить соотношение между полученными суммами.

27. Предполагается, что годовая интенсивность процентов является кусочно-непрерывной функцией времени, изменяющейся по следующей схеме: первые три года она равна 0,09, следующие четыре года – 0,08 и далее – 0,05. Найти дисконтный множитель $v(t)$ для всех $t \geq 0$. Определить современную величину 500 д. е., подлежащих выплате через: а) 3 года; б) 10 лет.

28. Определить, какой сложной процентной ставкой можно заменить в контракте простую годовую процентную ставку 0,18, не изменяя финансовых отношений сторон, если срок операции – 500 дней, а временная база – 365 дней. Объяснить соотношение между процентными ставками.

29. Определить непрерывную процентную ставку, эквивалентную номинальной процентной ставке 14% годовых с ежемесячным начислением процентов. Объяснить соотношение между процентными ставками.

30. Доказать, что последовательность эффективных процентных ставок $\left\{i_{\text{эф}}(m)\right\}$, соответствующая фиксированной номинальной процентной ставке $i^{(m)}$, является возрастающей и сходящейся. Найти ее предел. Объяснить поведение членов последовательности.

31. Доказать, что последовательность номинальных процентных ставок $\left\{i^{(m)}\right\}$, соответствующая фиксированной эффективной процентной ставке $i_{\text{эф}}$, является убывающей и сходящейся. Найти ее предел. Объяснить поведение членов последовательности.

32. Доказать, что последовательность эффективных учетных ставок $\left\{d_{\text{эф}}(m)\right\}$, соответствующая фиксированной номинальной процентной ставке $d^{(m)}$, является убывающей и сходящейся. Найти ее предел. Объяснить поведение членов последовательности.

33. Доказать, что последовательность номинальных учетных ставок $\left\{d^{(m)}\right\}$, соответствующая фиксированной эффективной учетной ставке $d_{\text{эф}}$, является возрастающей и сходящейся. Найти ее предел. Объяснить поведение членов последовательности.

34. Найти эффективную процентную ставку, соответствующую начислению сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,1: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно; г) непрерывно. Объяснить поведение эффективных процентных ставок. Доказать соотношения: 1) $i^{(m)} \leq i_{эф}$; 2) $i_{эф}(m_1) < i_{эф}(m_2)$, где $m_1 < m_2$.

35. Известно, что эффективная процентная ставка составляет 15% годовых. Найти соответствующие номинальные процентные ставки $i^{(4)}$, $i^{(12)}$, $i^{(52)}$, $i^{(365)}$. Объяснить поведение процентных ставок.

36. При условии, что $\delta = 0{,}1$, найти значения эквивалентных процентных ставок: а) i, $i^{(4)}$, $i^{(12)}$, $i^{(52)}$, $i^{(365)}$; б) d, $d^{(4)}$, $d^{(12)}$, $d^{(52)}$, $d^{(365)}$. Объяснить поведение эквивалентных процентных ставок. Рассмотреть последовательность $\{i^{(m)}\}$ $(\{d^{(m)}\})$ номинальных процентных ставок, эквивалентных заданной ставке δ. Обосновать сходимость и получить значение предела этой последовательности.

37. Найти эффективную учетную ставку, соответствующую дисконтированию по годовой номинальной учетной ставке 0,1: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно; г) непрерывно. Объяснить поведение эффективных учетных ставок. Доказать соотношения: 1) $d^{(m)} \geq d_{эф}$; 2) $d_{эф}(m_1) > d_{эф}(m_2)$, где $m_1 < m_2$.

38. Известно, что эффективная учетная ставка составляет 12% годовых. Найти соответствующие номинальные учетные ставки $d^{(4)}$, $d^{(12)}$, $d^{(52)}$, $d^{(365)}$. Объяснить поведение процентных ставок.

39. Доказать, что эффективная процентная ставка $i_{эф}$ измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов.

40. Доказать, что эффективная учетная ставка $d_{эф}$ показывает, на сколько процентов снижается сумма погашаемого долга за год.

41. Предприниматель может получить ссуду либо на условиях ежемесячного начисления процентов из расчета 26% годовых, либо на условиях полугодового начисления процентов из расчета 27% годовых. Какой вариант более предпочтителен?

42. Для первых двух лет ссуды применяется сложная ставка 8%, для следующих трех лет – 10% годовых. Какова средняя ставка за весь срок ссуды?

43. Долг в размере 1 000 д. е. должен быть погашен через 1,5 года. При выдаче кредита использовалась простая переменная процентная ставка: в первые три месяца срока долга – 8% годовых, в следующие три месяца – 8,5%, затем полгода – 9% и последние полгода

– 10%. Какова сумма кредита? Определить среднюю ставку по кредиту.

44. Имеются два обязательства. По первому обязательству сумма в размере 5 000 д. е. погашается через 1 год. По второму обязательству сумма в размере 7 000 д. е. погашается через 3 года. Можно ли считать обязательства эквивалентными, если для учета долга применяется сложная годовая процентная ставка 0,06? Какое из обязательств является более выгодным? Какова должна быть ставка для равноценных финансовых обязательств?

45. Платеж в размере 10 тыс. д. е. и сроком выплаты через 4 года требуется заменить платежом со сроком выплаты через: а) 2 года; б) 9 лет. Определить величину нового платежа, если применяется сложная процентная ставка 30% годовых.

46. Два платежа в размере 10 000 д. е. и 20 000 д. е. со сроками 120 и 150 дней заменяются одним платежом со сроком 200 дней с начислением сложных процентов по годовой ставке 0,08. В финансовом году 365 дней. Определить величину нового платежа.

47. Платежи в размере 1 000 д. е., 2 000 д. е. и 3 000 д. е. со сроками через 60, 90 и 120 дней после некоторой даты решено заменить на один платеж, равный 6 500 д. е. Определить срок выплаты консолидированного платежа при использовании сложной годовой процентной ставки 0,1.

48. Обязательство об уплате 8 000 д. е. 1 марта и 12 000 д. е. 30 сентября пересмотрено так, что первая выплата в сумме 6 000 д. е. будет произведена 1 февраля, а остальная часть долга гасится 15 ноября. Для замены обязательства применялась сложная процентная ставка 6% годовых. В финансовом году 365 дней. Определить сумму погашаемого остатка. Уравнение эквивалентности составить относительно 1 марта и относительно 1 февраля. Какой суммой, выплачиваемой сегодня, можно было бы заменить старое обязательство?

49. Определить величину нового срока, если платеж в размере 12 тыс. д. е. через 4 года заменяется платежом 6 тыс. д. е. При расчетах учитывается возможность помещения денег под сложную процентную ставку 32% годовых.

50. При выдаче кредита на 180 дней под 8% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Какова доходность операции для кредитора?

51. При выдаче кредита на 2 года под 8% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита.

Какова доходность операции для кредитора?

52. В условиях двух предыдущих задач ставка налога на проценты 10%.

53. Выдается ссуда по сложной ставке 22% годовых, при этом взимаются комиссионные в размере 1% от величины ссуды. На какой срок должна быть выдана ссуда, чтобы доходность такой сделки для кредитора составила 28%?

54. Определить доходность операции предоставления потребительского кредита на следующих условиях: 45% стоимости покупок оплачивается сразу, через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 10% от стоимости покупок в качестве платы за кредит.

55. Определить доходность операции предоставления потребительского кредита на следующих условиях: 35% стоимости покупок оплачивается сразу, через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 20% от стоимости покупок в качестве платы за кредит.

56. Партия товара была куплена предпринимателем за 200 тыс. д. е., а продана за 325 тыс. д. е. Сколько процентов прибыли получил предприниматель?

57. Предоставлена ссуда на 5 лет под непрерывную процентную ставку. Определите величину этой ставки, если доходность сделки для кредитора составила 38% годовых.

58. При выдаче кредита на 3 года по годовой непрерывной ставке 24% были удержаны комиссионные. Каков размер комиссионных, если доходность такой финансовой операции для кредитора составила 30% годовых?

59. Предприниматель, купив первую и вторую партии товара соответственно за 36 тыс. д. е. и 42 тыс. д. е., продал их соответственно за 48 тыс. д. е. и 58 тыс. д. е. При продаже какой партии был получен больший процент прибыли?

60. Предприятие реализовало партию товара за 230 тыс. д. е., получив при этом 30% прибыли. Определить величину прибыли и себестоимость товара.

61. Предприятие реализовало партию товара за 45 тыс. д. е., получив при этом 8% убытка. Определите величину убытка и себестоимость товара.

62. Банк выдает кредит по простой процентной ставке 10% годовых, удерживая комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Определить доходность вложений в этот банк сроком на 4 месяца, если ежемесячный темп инфляции составляет 0,8%.

63. Стоимость потребительской корзины в начале периода составила в среднем 98 д. е., а к концу периода – 123 д. е. Определить индекс цен и темп инфляции за указанный период.

64. Ежемесячный темп инфляции за прошедший год составил в среднем 1%. Во сколько раз возрастут в среднем цены за этот год?

65. Темп инфляции за прошедший год составил 12%. Определить ежемесячный темп прироста инфляции за этот год.

66. Темп инфляции за прошедший год составил 12,3%, а за текущий год – 11,2%. Во сколько раз выросли в среднем цены за два года?

67. Банк начисляет простые проценты по ставке 5% в месяц. Определить доходность вложений в этот банк сроком на полгода, если ежемесячный темп инфляции составляет 2%.

68. Ежемесячный темп инфляции равен 1%. Какую минимальную годовую процентную ставку начисления сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не менее 8%?

69. Кредит предоставлен на год под 20%. Определить, кто: кредитор или заемщик оказался в выигрыше от этой операции в конце года, если ежемесячный темп инфляции за этот год составил 1,5%, а годовая процентная ставка по вкладам в течение года была равной 0,12?

70. Вексель куплен за 180 дней до погашения. Его учет произведен простыми дисконтами по ставке 7% годовых. Через 50 дней вексель продали, проведя его учет простыми дисконтами по ставке 6,5% годовых. Определить эффективность сделки.

71. Сертификат куплен за 1 020 д. е. за 170 дней до его выкупа, а через 90 дней он был продан за 1 060 д. е. Определить доходность операции.

72. Сертификат номиналом 100 000 д. е. с объявленной доходностью 12% годовых, начисляемых простыми процентами, и сроком на 720 дней, куплен по цене 110 000 д. е. за 250 дней до погашения. Определить доходность инвестиции.

73. Сертификат сроком на 720 дней с объявленной доходностью 10% годовых, начисляемых простыми процентами, был куплен в момент его эмиссии по номинальной цене 100 000 д. е. За 200 дней до погашения сертификат был продан. Годовая рыночная процентная ставка в момент продажи составляла 8%. Определить эффективность данной операции.

74. Финансовый инструмент, приносящий постоянный доход, купленный за 200 дней до погашения, через 100 дней продали. В момент покупки рыночная процентная ставка составляла 10% годовых, а в момент продажи – 8% годовых. Определить доходность операции купли-продажи финансового инструмента.

1.3. Потоки платежей

Определение. Поток платежей – это распределенная во времени последовательность платежей.

Член потока – сумма отдельного платежа. Платеж со знаком «+» означает поступление денег, платеж со знаком «–» – расход денег.

Процентная ставка потока платежей – сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов потока.

Поток платежей называется ***конечным,*** если число платежей в нем конечно, и ***бесконечным,*** если *срок* действия потока неограничен. Конечный финансовый поток задается в виде

$$(R_1, R_2, \ldots, R_n;\ t = t_1, t_2, \ldots, t_n \le T),$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – члены потока, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – моменты их поступления, T – срок действия потока.

Начало потока $t = 0$. Это момент, от которого отсчитаны сроки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и срок T.

Основные характеристики положительного финансового потока

Характеристики финансового потока определяются при условии, что процентная ставка потока задана и соответствует единице измерения сроков платежей.

Определение. Стоимость потока платежей $P(t)$ в момент $t \in [0, T]$ – это сумма всех членов потока, приведенных к моменту времени t. По определению,

$$P(t) = \sum_{k: t > t_k} R_k F(t_k, t) + \sum_{k: t < t_k} R_k v(t, t_k) \cdot$$

Определение. Современная стоимость A потока платежей – это сумма всех членов потока, приведенных к моменту $t = 0$. По определению,

$$A = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k).$$

Определение. Наращенная сумма S потока платежей – это сумма всех членов потока, приведенных к моменту $t = T$

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k F(t_k, T).$$

Показатели A, S и $P(t)$, где $t \in [0, T]$, связаны соотношениями

$$P(t) = AF(t) \text{ и } S = AF(T).$$

Последнее соотношение – формула связи наращенной суммы S и современной стоимости A потока платежей.

В приведенных формулах $F(t)$, $v(t)$ – соответственно множители наращения и дисконтные множители по процентной ставке потока на временном отрезке $[0, t]$.

Определение. Финансовые потоки $A(a_{1,\ldots,}a_n;\ t = t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_m;\ \tau_1, \ldots, \tau_m)$ называются ***эквивалентными по принятой процентной ставке***, если стоимости потоков на любой момент времени по данной процентной ставке совпадают, т. е.

$$P_A(t) = P_B(t).$$

Данное равенство называется ***уравнением эквивалентности***.

Определение. Пусть P – стоимость положительного потока (R_1, R_2, …, R_n; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$) в момент $t = 0$. ***Доходность потока*** за единицу времени – это ставка сложных процентов r, по которой современная стоимость потока равна его текущей стоимости P

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Данное уравнение называют уравнением доходности потока.

Теорема (основное свойство доходности потока). Пусть P – стоимость положительного потока ($R_1, \ldots, R_n$; $t = t_1, \ldots, t_n$) в момент $t = 0$. Тогда доходность этого потока r равна доходности за единицу времени $\bar{r}$ следующей финансовой операции. В начальный момент $t = 0$ инвестор вкладывает сумму P в проект с потоком доходов ($R_1, \ldots, R_n$; $t = t_1, \ldots, t_n$) и владеет этим проектом до его окончания. При этом все доходы от проекта реинвестируются под ставку r на срок до окончания проекта.

Теорема (***о существовании и единственности*** решения уравнения доходности финансового потока). Если выполняется условие

$P < \sum_{k=1}^{n} R_k$, то уравнение доходности потока платежей имеет единственное положительное решение.

Приближенное решение уравнения доходности находят методом линейной интерполяции. На первом шаге применяется формула

$$r_{л1} = r_0 + \frac{-F(r_0)}{F(\overline{r}_0) - F(r_0)} (\overline{r}_0 - r_0),$$

где $r_{л1} \in \left[r_0, \overline{r}_0\right]$, $F(r_0) < 0$, $F(\overline{r}_0) > 0$, $F\left(r\right) = P - \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}$. Процедуру повторяют до достижения требуемой точности.

Финансовая рента

Финансовая рента – регулярный финансовый поток, все члены которого положительны.

Основные параметры ренты: ***R*** – сумма, выплачиваемая в целом за год; ***p*** – число платежей в году; ***член ренты*** R/p – сумма отдельного платежа; ***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами; ***начало ренты*** – начало первого периода ренты; ***срок ренты*** – время от начала первого периода ренты до конца последнего.

Предположим, ежегодно сумма R вносится равными долями p раз в году через одинаковые промежутки времени на банковский счет в течение n лет. На поступающие платежи начисляются сложные проценты m раз в год по годовой номинальной ставке $i^{(m)}$. В этом случае рента называется обычной p-срочной (платежи вносятся в конце каждого периода), а современная стоимость A и наращенная сумма S такой ренты рассчитываются по формулам

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad \text{и} \quad S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Число

$$\frac{A}{R}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=a^{(p)}_{mn,\frac{i^{(m)}}{m}}$$

называется ***коэффициентом приведения*** ренты. Этот коэффициент показывает, во сколько раз современная стоимость ренты больше суммы ее годового платежа *R*. Число

$$\frac{S}{R}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=s^{(p)}_{mn,\frac{i^{(m)}}{m}}$$

называется ***коэффициентом наращения*** ренты. Этот коэффициент показывает, во сколько раз наращенная сумма ренты больше ее годового платежа *R*.

Из данных формул для A и S можно получить формулы современной стоимости и наращенной суммы любой обычной ренты. Например:

1) $p = 1$, $m = 1$ – обычная годовая рента с начислением сложных процентов один раз в год

$$A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},\qquad S=R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}.$$

2) $p > 1$, $m = 1$ – p-срочная рента с начислением сложных процентов один раз в год

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}}-1},\qquad S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}}-1}.$$

3) $p > 1$, $m \to \infty$ – p-срочная рента с непрерывным начислением процентов

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-n\delta}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1},\qquad S=\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{n\delta}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}.$$

4) $p \to \infty$, $m > 1$ – непрерывная рента с начислением процентов

m раз в год

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{m\ln\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}, \quad S = R\frac{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}-1}{m\ln\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}.$$

5) $p \to \infty$, $m \to \infty$ – постоянная непрерывная рента с непрерывным начислением процентов

$$A = R\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}, \quad S = R\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}.$$

Вечная рента

Если полагают, что срок ренты $n = \infty$, то ренту называют ***вечной,*** или ***бессрочной***. Наращенная сумма вечной ренты бесконечна. Однако современную величину такой ренты можно найти. Для обычной годовой вечной ренты с начислением сложных процентов один раз в год при $n \to \infty$ получим

$$A = R/i.$$

Отложенная рента

Рента называется ***отложенной***, если ее начало переносится в будущее на t единиц времени относительно момента $t = 0$. Современная стоимость такой ренты равна

$$A_t = \nu(t)A,$$

где A – современная стоимость неотложенной ренты, $\nu(t)$ – дисконтный множитель по процентной ставке ренты на временном отрезке $[0,t]$.

Задачи о нахождении параметров ренты

Параметры ренты R, n, i рассматриваются как основные, p и m – как вспомогательные. При разработке контрактов, как правило, задается современная стоимость A или наращенная сумма ренты S и два основных параметра. Требуется найти третий.

Определение члена ренты

Рассматриваются задачи следующего вида: заданы S, n, i или A, n, i. Найти R (годовая рента). Значения годового взноса R находят из равенств $S = Rs_{n,i}$ и $A = Ra_{n,i}$, где

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{и} \quad a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

– коэффициенты наращения и приведения годовой ренты. Значения коэффициентов $s_{n,i}$ и $a_{n,i}$ затабулированы (см., например, учебник «Финансовая математика» [8]).

Определение срока ренты

Рассматриваются задачи вида: заданы A, R, i. Найти n.

Для обычной годовой ренты $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Отсюда $Ai/R = 1-(1+i)^{-n} < 1$, если n – конечно и $Ai/R = 1$ при $n \to \infty$ (бессрочная рента). Следовательно, условие разрешимости задачи о сроке ренты имеет вид

$$R > Ai .$$

Заметим, что если современную стоимость ренты рассматривать как сумму, выданную в долг и погашаемую в соответствии с условиями ренты, то полученное неравенство можно рассматривать как условие возврата долга.

Для нахождения n выражения современной стоимости и наращенной суммы разрешают относительно n. Если получено нецелое n, его округляют до ближайшего целого. После чего делается перерасчет годового взноса R.

Определение процентной ставки ренты

Рассматриваются задачи вида: заданы A, R, n. Найти i.

Так как $A = R\left(\dfrac{1}{1+i} + \ldots + \dfrac{1}{(1+i)^n}\right) < R\dfrac{n}{1+i} < Rn$, если $i > 0$, то условие разрешимости задачи имеет вид

$$A < Rn .$$

При выполнении условия разрешимости процентную ставку ренты находят методом линейной интерполяции.

ЗАДАЧИ

75. Контракт предусматривает погашение задолженности в конце каждого года в течение 8 лет потоком возрастающих на 10% платежей с первой выплатой в 18 000 д. е. и ежегодным начислением сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06 на сумму оставшегося долга. Определить наращенную сумму и современную стоимость такого потока платежей.

76. По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 7 лет платежи. Первый платеж равен 4 000 д. е., а каждый следующий увеличивается на 10%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты в размере 28% годовых.

77. Пятилетний контракт предусматривает, что после первого платежа в размере 5 000 д. е., производимого в конце первого года, последующие платежи ежегодно увеличиваются на 1 000 д. е. На платежи начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08. Определить наращенную сумму потока платежей данного контракта, а также его современную стоимость. Сделать проверку.

78. По условиям контракта выплачиваемые в конце каждого полугодия платежи увеличиваются на 1 000 д. е. Первый платеж составляет 1 000 д. е. Срок контракта – 3 года. Банк начисляет сложные проценты дважды в год по номинальной ставке 10%. Определить наращенную сумму потока платежей данного контракта, а также его современную стоимость. Сделать проверку.

79. Проект кредитуется в четыре этапа: сначала предоставляется 30 тыс. д. е., затем через полгода – 70 тыс. д. е., еще через год – 150 тыс. д. е., после чего через 1,5 года – 200 тыс. д. е. Кредит предоставлен под 9% годовых. Определить задолженность по кредиту через 4 года с момента предоставления первой суммы кредита. Какая сумма необходима кредитору для выполнения условий контракта? Показать, как кредитор, располагая данной суммой, может выполнить свои обязательства по кредитованию проекта.

80. Имеется бессрочный аннуитет постнумерандо с ежегодными выплатами по 1 тыс. д. е. Требуется определить стоимость этого аннуитета при годовой процентной ставке 5%.

81. Предприниматель должен выплатить следующие денежные суммы: 1 000 д. е. 1 января 2020 г., 5 000 д. е. 1 июля 2022 г. и 10 тыс. д. е. 1 января 2024 г. Кредит выдан под 20% годовых. Найти стоимость этих платежей на 1 января 2019 г. и на 1 июня 2021 г.

82. Для начала своей деятельности небольшая коммерческая фирма решила взять кредит в банке. Банк начисляет сложные проценты ежемесячно по 1%. Кредит предоставляется при условии, что он будет погашен за 24 месяца. Фирма, оценив свои возможности, решила, что она может выплачивать в месяц 1 500 д. е. Какова сумма кредита?

83. Некто желает приобрести аннуитет с ежегодными выплатами в размере 8 000 д. е. в течение последующих 15 лет. Требуется определить стоимость этого аннуитета при годовой процентной ставке 6%.

84. Владельцы химического завода в г. Бхопале (Индия) предложили в качестве компенсации за ущерб, нанесенный окружающей среде в результате аварии, выплатить 200 млн долларов в течение 35 лет ежемесячными равными платежами. Найти современную величину указанной компенсации при ежемесячном дисконтировании платежей сложными процентами по годовой процентной ставке 0,1.

85. Условия контракта предусматривают ежегодные выплаты в размере 40 тыс. д. е. в течение 5 лет. Определить наращенную к концу срока ренты сумму при непрерывном начислении процентов по процентной ставке $\delta = 0{,}06$, если взносы производятся: а) раз в конце года; б) каждое полугодие; в) поквартально.

86. По контракту необходимо выплачивать ежегодно 10 тыс. д. е. в течение 5 лет. Какая сумма необходима для выполнения условий контракта при начислении на платежи сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,08, если: а) выплаты производятся один раз в конце года, проценты начисляются раз в полгода; б) выплаты и начисление процентов производятся ежеквартально.

87. По контракту долг погашается ежегодными взносами в размере 1 000 д. е. в течение 3 лет при начислении на платежи сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08. Какова сумма долга? Показать, что размер ежегодного взноса достаточен для погашения долга. Рассмотреть механизм погашения долга.

88. Длительность ренты – 4 года. Годовой платеж – 1 000 д. е. Процентная ставка переменная: 5% – в 1-м году, 6% – во 2-м, 8% – в 3-м, 10% – в 4-м. Определить современную стоимость этой ренты. Найти стоимость этой ренты через 2,5 года после ее начала. Сделать проверку.

89. Заем величиной 10 000 д. е. должен быть оплачен в течение 10 лет постоянной обычной рентой, выплачиваемой ежемесячно.

Сумма ежемесячного платежа рассчитывается на основе ежемесячной процентной ставки 1%. Найти:

а) сумму ежемесячного взноса;

б) величину погашенного основного долга и выплаченных процентов к концу первого года;

в) номер платежа, после которого невыплаченный основной долг становится меньше 5 000 д. е.

90. Четырехгодичный контракт предусматривает взносы в два этапа с начислением на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 на первом этапе в течение первых 1,5 лет и по годовой процентной ставке 0,1 на втором этапе в последующие 2,5 года. На первом этапе взносы по 5 000 д. е. производятся в конце каждого полугодия. На втором этапе взносы по 8 000 д. е. производятся в конце каждого квартала. Найти величину вклада к концу четвертого года контракта.

91. Для покупки через 12 лет оборудования за 200 000 д. е. фирма каждый год вкладывает деньги в резервный фонд для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06. Первоначальные взносы были по 11 855,41 д. е. После 8 лет банк увеличил годовую процентную ставку до 0,08. Какой величины были взносы в оставшийся период?

92. Фирма планирует создать резервный фонд, чтобы через 10 лет приобрести оборудование за 120 тыс. д. е. Ежеквартальные взносы размещаются на банковский счет под сложные проценты, начисляемые каждый квартал. Предполагается, что в течение первых 8,5 лет банковская ставка составит 8% годовых, а сумма взноса – 1 986,69 д. е. Определить величину ежеквартальных взносов в оставшийся период, если банковская ставка увеличится до 12% годовых.

93. В задачах 90–92 определить, какая сумма необходима в начальный момент времени, чтобы фирма могла осуществить план?

94. В банке получена ссуда на пять лет в сумме 600 тыс. д. е. под ставку 24% годовых, начисляемых на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа.

95. Сумма долга банку – 6 000 д. е. Банк начисляет на долг сложные проценты по годовой процентной ставке 0,12. Погасительные выплаты в размере 1 000 д. е. производятся в конце каждого года. За какой срок долг будет погашен?

96. Заем величиной 5 000 д. е. погашается одинаковыми ежемесячными взносами. На долг ежемесячно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. За какой срок долг будет погашен, если ежемесячный взнос составляет: а) 50 д. е.; б) 100 д. е.?

97. Определить размер одинаковых взносов в конце каждого года при начислении на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08; а) для создания к концу 5-го года фонда, равного 1 млн д. е.; б) для погашения текущей задолженности, равной 1 млн. д. е. в течение 5 лет.

98. Предприниматель занял на шесть лет 45 000 д. е. под сложную ставку 20%, начисляемых на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите величину процентов, которые будут выплачены предпринимателем в четвертом году.

99. Должник согласен оплатить заем величиной 3 000 д. е. пятнадцатью годовыми выплатами величиной 500 д. е. с первой выплатой через 5 лет. Найти доходность этой финансовой операции.

100. Предоставлен кредит на семь лет величиной 36 000 д. е. под 30%, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определить, какая часть основной суммы кредита будет погашена за первые два года.

101. Отдача от 400 000 д. е., инвестированных в проект, составляет в первый год 30 000 д. е.; через полгода – 70 000 д. е.; через год – 150 000 д. е.; через 1,5 года – 200 000 д. е. Определить доходность проекта в виде ставки сложных процентов, начисляемых один раз в год.

102. 1 млн д. е., вложенных в проект, приносит в течение 15 лет ежегодно доход в 100 000 д. е. Доход выплачивается: а) в конце каждого года; б) в конце каждого квартала. Определить доходность проекта в виде ставки сложных процентов, начисляемых один раз в год.

103. Ежегодная отдача от инвестиции 1 млн д. е. в проект составляет 150 000 д. е. и поступает равномерно и непрерывно в течение 10 лет. Определить доходность проекта в виде непрерывной процентной ставки.

104. Отдача от 1 млн д. е., инвестированных в проект, составляет в первый год 300 000 д. е. В последующие 5 лет отдача ежегодно возрастает на 10 000 д. е. Определить доходность проекта в виде непрерывной процентной ставки.

Глава 2. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Инвестиционный проект, рассматриваемый в условиях определенности, описывается своим ***чистым*** денежным потоком вида

$$(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n;\ t = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Члены потока $R_k = a_k - b_k$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – доходы по проекту в моменты $t = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n$; $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – расходы в те же моменты времени (в большинстве случаев только одна из сумм a_k и b_k будет ненулевой).

Проект классического характера – это проект, в котором чистый денежный поток меняет знак только один раз, т. е. расходы инвестора предшествуют доходам от проекта.

Для оценки эффективности инвестиционного проекта используют следующие показатели, основанные на дисконтировании членов финансового потока проекта к моменту $t = 0$:

– чистая современная стоимость проекта (*net present value, NPV*);
– внутренняя норма доходности (*internal rate of return, IRR*);
– срок окупаемости (*discounted payback period, DPP*);
– индекс доходности (*profitability index, PI*).

Каждый из показателей – это результат сопоставления современных стоимостей инвестиций в проект и отдач от инвестиций. Для дисконтирования членов финансового потока проекта применяется процентная ставка i. Будем считать, что i – годовая процентная ставка, по которой инвестор мог бы дать взаймы или занять деньги.

Определение. Чистая современная стоимость проекта (*NPV*) при процентной ставке i – это современная стоимость чистого денежного потока проекта по процентной ставке i:

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}\ .$$

Пример. Проект $B(-1\ 000, -300, 500, 500, 500, 500)$ при ставке дисконтирования 5% годовых:

$$NPV = -1\ 000 - \frac{300}{1+i} + \frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5} = 402{,}8.$$

Проект $C(-90, 30, 40, 40)$ при ставке дисконтирования 12% годовых:

$$NPV = -90 + \frac{30}{1+i} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3} = -2{,}86\,.$$

Свойства и экономическое содержание показателя *NPV*

1. Если $NPV \geq 0$, то доходы от проекта окупают вложенные инвестиции. При $NPV < 0$ доходы не окупают инвестиций.

2. Чистая современная стоимость проекта *NPV* характеризует возможный прирост (убыток) капитала инвестора в результате реализации проекта по сравнению с альтернативными вложениями под ставку i.

3. Если $NPV > 0$, то значение показателя *NPV* – это максимальная сумма, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным.

4. Показатель *NPV* проекта классического характера – возрастающая функция срока действия проекта, содержащего период отдачи.

5. Показатель *NPV* обладает аддитивным свойством. Если инвестиционный проект охватывает ряд независимых проектов, то чистый приведенный доход проекта в целом равен сумме *NPV* отдельных проектов.

Определение. Внутренняя норма доходности проекта (*IRR*) – это ставка дисконтирования r, при которой чистая современная стоимость проекта равна нулю $NPV(r) = 0$, или

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} = 0.$$

Данное уравнение называют уравнением доходности проекта.

Теорема (о разрешимости уравнения доходности проекта). Если все отрицательные платежи предшествуют всем положительным и выполняется условие $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$, то уравнение доходности проекта имеет единственное положительное решение.

Пример. Найдем значение показателя *IRR* проекта

$B(-1\ 000, -300, 500, 500, 500, 500)$.

Уравнение доходности имеет вид

$$-1\ 000 - \frac{300}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} + \frac{500}{(1+r)^5} = 0,$$

или $F(r) = 0$, где

$$F(r) = -1\ 000 - \frac{300}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} + \frac{500}{(1+r)^5}\ .$$

Так как $\sum_{k=0}^{n} R_k$ = –1 000 – 300 + 500 + 500 + 500 + 500 = 700 > 0, то это уравнение имеет единственное положительное решение. Так как F(0,14) = 14,786 > 0, F(0,15) = – 571,559 < 0, то доходность заключена между 14 и 15% годовых. Методом линейной интерполяции определяем $r \approx$ 0,14425 с точностью до четвертого знака после запятой.

Свойства и экономическое содержание показателя *IRR*

1. При ставке дисконтирования, равной *IRR*, инвестиционные вложения в точности окупаются доходами, но не приносят прибыль.

2. Внутренняя норма доходности проекта r, т. е. значение показателя *IRR,* является среднегодовой доходностью инвестиции в этот проект, если выполняются два условия:

а) ставка дисконтирования равна r;

б) в течение всего срока проекта доходы реинвестируются по ставке r до окончания срока проекта.

3. Для проекта классического характера справедливы следующие утверждения:

$NPV > 0$ тогда и только тогда, когда $i < r$;

$NPV < 0$ тогда и только тогда, когда $i > r$;

$NPV = 0$ тогда и только тогда, когда $i = r$,

где $r = IRR$, i − ставка дисконтирования. Из этого свойства следует, что $i = IRR$ – это максимальная ставка дисконтирования, при которой проект не является убыточным.

Замечание. Как установлено (свойство 2 *IRR*), среднегодовая доходность проекта совпадает с его *IRR*, если ставка дисконтирования равна $r = IRR$ и доходы от проекта реинвестируются под ставку r до окончания проекта. Практически эти доходы можно инвестировать под ставку дисконтирования i (i – ставка, по которой инвестор может ссужать или занимать деньги). Тогда среднегодовая доходность проекта r^* рассчитывается из уравнения

$$P(T) = P(0)\,(1 + r^*)^T,$$

где $P(0)$ – современная стоимость потока инвестиций в проект по ставке i, $P(T)$ – результат реинвестирования доходов от проекта под ставку i к моменту окончания проекта T (будущая стоимость доходов по ставке i). Число r^* называют ***модифицированной внутренней нормой доходности*** проекта (*MIRR*).

Из уравнения доходности

$$MIRR = \left(\frac{P(T)}{P(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \cdot$$

Определение. Срок (дисконтированной) окупаемости проекта (*DPP*) – это срок действия проекта $n^* \leq T$, за который современная стоимость потока доходов становится равной современной стоимости потока инвестиций в проект:

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} .$$

Так как не всегда существует целое n^*, при котором выполняется данное равенство, то приближенное целое значение срока окупаемости определяют следующим образом: n^* – наименьшее целое, не превышающее срок проекта $T = n$ лет, такое, что

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} \geq \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} .$$

Свойства и экономическое содержание показателя *DPP*

1. Срок окупаемости n^* – это время, необходимое для полной *компенсации* инвестиций в проект доходами от проекта.

2. Если ставка дисконтирования равна внутренней норме доходности проекта *IRR*, то срок окупаемости совпадает со сроком проекта, т. е. $n^* = T = n$ лет.

3. Срок окупаемости проекта n^* – это срок действия проекта $n^* \leq n$, за который его чистая современная стоимость становится неотрицательной.

Пример. Найдем срок окупаемости проекта

B(–1 000, –300, 500, 500, 500, 500).

Ставка дисконтирования – 5% годовых.

	0	1	2	3	4	5
R_k	–1 000	–300	500	500	500	500
$R_k/(1 + i)^k$	–1 000	–286	454	432	411	392
$\Sigma R_k/(1 + i)^k$	–1 000	–1 286	– 832	– 400	11,1	402,8

Нижняя строка таблицы – чистая современная стоимость проекта для сроков его действия от 0 до 5 лет. Период отдачи начинается с 2-го года. Сроки действия проекта от 2 до 5 лет содержат период отдачи. Чистая современная стоимость проекта возрастает, начиная с 2-летнего срока его действия, т. е. с началом периода отдачи. Из таблицы следует, что срок окупаемости проекта $n^* = 4$ года. Действительно, так как $NPV_3 = -400 < 0$, $NPV_4 = 11{,}1 > 0$, то наименьшее целое n^*, при котором выполняется неравенство $NPV_{n^*} \geq 0$, это $n^* = 4$ (точное значение срока окупаемости меньше 4). Таким образом, проект окупается, если срок проекта $n \geq 4$ года.

4. Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его показатель $NPV \geq 0$. Если $NPV < 0$, то проект не имеет срока окупаемости.

5. Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его ставка дисконтирования $i \leq IRR$. Если ставка дисконтирования проекта $i > IRR$, проект не имеет срока окупаемости.

Определение. Индекс доходности (PI) проекта – это число d, равное отношению современной стоимости потока доходов к современной стоимости потока инвестиций в проект

$$d = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} \ .$$

Пример. Проект $C(-90, 30, 40, 40)$, $i = 12\%$ годовых:

$$d = \left(\frac{30}{(1+i)} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3} \right) \Big/ 90 = 0{,}97.$$

Проект $B(-1\,000, -300, 500, 500, 500, 500)$, $i = 5\%$ годовых:

$$d = \left(\frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5} \right) \Big/ \left(1\,000 + \frac{300}{1+i} \right) = 1{,}31 \cdot$$

Свойства и экономическое содержание показателя *PI*

1. PI – относительный показатель. Показатель PI *характеризует уровень доходов на единицу затрат*, т. е. эффективность вложений. $d > 1$ – доходы окупают вложенные инвестиции; $d < 1$ – инвестиции в проект не окупаются; $d = 1$ – проект ни прибыльный, ни убыточный.

2. Если ставка дисконтирования i равна внутренней норме доходности проекта $IRR = r$, то индекс доходности проекта $d = 1$.

3. Если срок проекта совпадает с его сроком окупаемости, то индекс доходности проекта $d = 1$.

4. Для проекта классического характера:

$d > 1$ тогда и только тогда, когда $NPV > 0$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда $NPV < 0$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда $NPV = 0$.

5. Для проекта классического характера:

$d > 1$ тогда и только тогда, когда $i < r$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда $i > r$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда $i = r$.

ЗАДАЧИ

105. Для проектов $A(-90, 100)$ и $B(-95, 100)$, ставка дисконтирования – 9% годовых. Рассчитать показатели *IRR* и *NPV*. Какой из проектов является выгодным? На какую величину можно увеличить инвестиции в проект *A* при данной ставке дисконтирования, чтобы избежать убытков?

106. Даны проекты: $A(-90, 100)$, ставка дисконтирования $i = 9\%$ годовых; $B(-90, 100)$, ставка дисконтирования $i = 10\%$ годовых; $C(-90, 100)$, ставка дисконтирования $i = 11\%$ годовых; $D(-90, 100)$, ставка дисконтирования $i = 12\%$ годовых. Какие проекты являются выгодными? Рассчитать доходы и убытки по проектам.

107. Вычислить значения показателей эффективности следующих проектов: $A(-1\,000, -2\,000, -3\,000, 1\,500;\ t = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 4;\ f(t) = 1\,000,\ 6 \le t \le 16)$ при ставке дисконтирования 5% годовых; $B(-1\,000, -300, 500, 500, 500, 500)$ при ставке дисконтирования 5% годовых и $C(-90, 30, 40, 40)$ при ставке дисконтирования 12% годовых. Что означают полученные результаты? Рассчитать доходы и убытки по проектам, когда проекты закончатся.

108. Является ли выгодным проект, по которому вложение 1 млн д. е. приносит ежегодно доход 100 тыс. д. е. в течение 15 лет? Банковская ставка по депозитам на этот срок – 5% годовых.

109. Определить показатели эффективности инвестиционного проекта с потоком платежей (–20, –35, 25, 25, 45, 45, 20). Ставка банковского процента равна 20% годовых. Следует ли осуществлять проект?

110. Рассчитать показатели эффективности инвестиционного проекта с начальными инвестициями 10 000 д. е. и постоянными доходами 4 000 д. е. в год. Ставка процента – 8% годовых. Срок проекта – 10 лет.

111. Сравнить проекты $A(-50, -50, -45, 65, 85, 85, 20, 20)$ и $B(-60, -70, -50, -40, 110, 110, 110, 110)$ по критерию максимального *NPV* и по критерию максимального *IRR*. Указать преимущество выбранного проекта в каждом случае. Ставка процента – 15% годовых.

112. Рассчитать сроки окупаемости проектов $A(-100, -10, 20, 60, 60, 60, 20{,}5)$ и $B(-40, -50, -50, -20, 90, 90, 80, 70)$, ставка дисконтирования – 13% годовых. Какой из проектов выгоднее для инвестора?

113. Рассчитать, как изменится оценка проекта $(-100, -20, 20, 20, 80, 50, 10, 20)$, ставка дисконтирования $i = 11\%$ годовых, если увеличить инвестиции в этот проект в конце 1-го года до 25 д. е.

114. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих проектов. Проект *A*, по которому инвестирование в размере 11 000 д. е. обеспечивает годовой доход 600 д. е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 15 лет, и возмещение расходов инвестора в конце этого срока. Проект *B*, по которому инвестирование в размере 20 000 д. е. обеспечивает годовой доход 2 655 д. е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 10 лет. Инвестор может ссужать или занимать деньги под 5% годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

115. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих займов. Заем *A*: за цену покупки 10 000 д. е. инвестор будет получать 1 000 д. е. в год, выплачиваемых ежеквартально на протяжении 15 лет. Заем *B*: за цену покупки 11 000 д. е. инвестор будет получать годовой доход 605 д. е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 18 лет, и возмещение его расходов в конце этого срока. Инвестор может ссужать или занимать деньги под 4% годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

Глава 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИНАНСОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМ ДОХОДОМ

Финансовые инвестиции – это вложение денежных средств в финансовые инструменты.

Облигация – это обязательство выплатить в определенные моменты времени в будущем заранее установленные денежные суммы.

Пусть в момент $t = 0$ на рынке имеется облигация с потоком платежей ($C_1, C_2, \ldots, C_n$; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$). Момент времени $t = 0$ – это момент *купли-продажи* облигации (текущий момент времени). Момент времени $t = t_n$, когда выполняется последний платеж по облигации, называют *моментом погашения* облигации, а срок $T = t_n$ (лет) – *сроком до погашения*.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это ставка сложных процентов, по которой современная стоимость ожидаемого потока платежей по облигации равна рыночной стоимости облигации P в момент $t = 0$

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}.$$

Временная структура процентных ставок

Определение. Облигация называется ***чисто дисконтной***, если по этой облигации производится только один платеж.

Определение. Годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет – внутренняя доходность чисто дисконтной облигации без кредитного риска, срок до погашения которой t лет. Обозначение: $\boldsymbol{r(t)}$.

Безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет рассчитывается по формуле

$$r(t) = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1,$$

где A – сумма, погашаемая сумма по чисто дисконтной облигации без кредитного риска, P – ее рыночная стоимость в момент $t = 0$.

Определение. Набор годовых безрисковых процентных ставок $r(t_1), r(t_2), \ldots, r(t_n)$ для инвестиций в момент $t = 0$ на сроки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ лет, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, называется ***временной структурой процентных ставок*** относительно момента $t = 0$ по t_n-летнему диапазону.

Если известна временная структура процентных ставок по t_n-летнему диапазону $r(t_1)$, $r(t_2)$, …, $r(t_n)$, то цена облигации может быть вычислена по формуле

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}} .$$

Определение. График функции $r = r(t)$, где $r(t)$ – годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет, называется ***кривой доходностей*** (или кривой спот-ставок).

Методы построения кривой доходностей

Линейное интерполирование. Полагают

$$r(t) \approx r(t_i)\frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} + r(t_{i+1})\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} ,$$

где $t \in \left[t_i , t_{i+1}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Интерполирование* (*n* – 1)*-го порядка. Полагают

$$r(t) \approx r(t_1)\frac{(t - t_2)(t - t_3)\ldots(t - t_n)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\ldots(t_1 - t_n)} +$$

$$+ r(t_2)\frac{(t - t_1)(t - t_3)\ldots(t - t_n)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)\ldots(t_2 - t_n)} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ r(t_n)\frac{(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_{n-1})}{(t_n - t_1)(t_n - t_2)\ldots(t_n - t_{n-1})} ,$$

где $t \in [t_1, t_n]$.

Процедура «бутстреппа» построения кривой доходностей подробно изложена в учебнике «Математические методы финансового анализа» [5] и работе Ф. Дж. Фабоцци [7].

Рассмотрим еще один метод получения теоретических значений процентных ставок. Предположим, в момент $t = 0$ известна временная структура процентных ставок $r(t_1)$, $r(t_2)$, …, $r(t_k)$ для инвестиций на t_1, t_2, …, t_k лет, а требуется определить временную структуру процентных ставок по t_n-летнему диапазону, где $t_n > t_k$. При этом на рынке имеется облигация без кредитного риска стоимостью P, по которой через t_1, .., t_k, t_{k+1}, ., t_n лет от текущего момента времени $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n$, обещают выплатить денежные суммы C_1, C_2, …, C_k, C_{k+1}, …, C_n соответственно.

Значения безрисковых процентных ставок $r(t_{k+1})$, $r(t_{k+2})$, …, $r(t_n)$ для инвестиций на сроки t_{k+1}, …, t_n лет неизвестны. Приближенные теоретические значения процентных ставок $r(t_{k+1})$, $r(t_{k+2})$, …, $r(t_n)$ можно найти с помощью данной облигации, используя линейную интерполяцию на отрезке $[t_k, t_n]$. Для этого полагают $r(t_n) = r$. Безрисковая процентная ставка $r(t_k)$ известна. Тогда, применяя формулу линейного интерполирования на отрезке $[t_k, t_n]$ для сроков инвестирования $t_{k+1}, t_{k+2}, .., t_{n-1}, t_n \in [t_k, t_n]$, получим:

$$r(t_{k+1}) \approx r(t_k)\frac{t_{k+1}-t_n}{t_k-t_n} + r\,\frac{t_{k+1}-t_k}{t_n-t_k}\ ,$$

………………..

$$r(t_{n-1}) \approx r(t_k)\frac{t_{n-1}-t_n}{t_k-t_n} + r\,\frac{t_{n-1}-t_k}{t_n-t_k}\ ,$$

$$r(t_n) = r\,.$$

Цена облигации P в момент $t = 0$ известна. По формуле для цены облигации имеем

$$P = \sum_{i=1}^{k}\frac{C_i}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i}} + \frac{C_{k+1}}{\left(1+r(t_{k+1})\right)^{t_{k+1}}} + \ \ldots. + \frac{C_n}{\left(1+r(t_n)\right)^{t_n}}\,.$$

Подставляя в это выражение вместо $r(t_{k+1})$, $r(t_{k+2})$, …, $r(t_n)$ полученные выше равенства, получим уравнение с одним неизвестным r. Решение этого уравнения находят методом линейной интерполяции. Зная r, можно определить безрисковые процентные ставки $r(t_{k+1})$, $r(t_{k+2})$, …, $r(t_n)$. Таким образом, получаем временную структуру процентных ставок $r(t_1)$,$r(t_2)$, …, $r(t_k)$, $r(t_{k+1})$, …, $r(t_n)$ по t_n-летнему диапазону относительно момента $t = 0$. Заметим, что кривая доходностей в этом случае на участке $[t_k, t_n]$ – *прямая линия*.

Выделяют четыре основные формы кривой доходностей: 1 – нормальная кривая (возрастающая); 2 – обратная кривая (убывающая); 3 – «горбатая» кривая; 4 – горизонтальная кривая. Существуют теории, объясняющие форму кривой доходностей. Возрастающая кривая чаще всего означает предполагаемый рост темпа инфляции. Убывающая кривая чаще всего свидетельствует об ожидаемом снижении темпа инфляции. ***Горизонтальная*** кривая доходностей означает, что годовые безрисковые процентные ставки для инвестиций на все сроки одинаковы.

Купонная облигация

Параметры купонной облигации:

A – номинальная стоимость (номинал) облигации;

f – годовая купонная ставка;

m – число купонных платежей в году; $m \geq 1$;

q – сумма отдельного купонного платежа;

τ – время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до момента купли-продажи облигации $t = 0$;

n – число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации от момента $t = 0$.

Цена купонной облигации может быть рассчитана по следующим формулам:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}},$$

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left[\frac{f}{r}\left(1-1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}\right)+1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}\right].$$

Для приблизительной оценки внутренней доходности купонной облигации пользуются «купеческой» формулой:

$$r = \frac{Af + (A-P)/T}{(A+P)/2}.$$

Зависимость цены облигации от внутренней доходности, купонной ставки, срока до погашения

Теорема. Функция $P(r)$ является убывающей и выпуклой.

Определение. Цена облигации, продающейся сразу после купонной выплаты, называется ***котируемой***.

Из формул для цены купонной облигации при $\tau = 0$ получаем формулы для расчета котируемой цены:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}}}$$

или

$$P_n = A\left[\frac{f}{r}\left(1-1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}\right)+1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}\right],$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение. Если $P_n = A$, то говорят, что облигация продается по номиналу.

Если $P_n > A$, то говорят, что облигация продается с премией $П_n = P_n - A$.

Если $P_n < A$, то говорят, что облигация продается с дисконтом $Д_n = A - P_n$.

Теорема. Купонная облигация продается сразу после купонной выплаты по номиналу, с премией, с дисконтом тогда и только тогда, когда $f = r$, $f > r$, $f < r$ соответственно. Здесь r – внутренняя доходность облигации в момент купли-продажи $t = 0$.

Цена облигации, продающейся через время τ после купонной выплаты, связана с котируемой ценой P_n сразу после этой купонной выплаты выражением

$$P = P_n \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\tau m},$$

где $\tau \in [0, 1/m)$. Для покупателя на рынке биржевая цена облигации, продающейся через время τ после купонной выплаты, составит

$$P_Б = P_n + \tau q m,$$

где $\tau q m$ – накопленный купонный доход.

Теорема. Если внутренняя доходность облигации r не изменяется до момента ее погашения, то:

1) котируемая цена облигации, продающейся с премией, уменьшается с уменьшением срока до погашения и равна номиналу облигации в день погашения;

2) котируемая цена облигации, продающейся с дисконтом, увеличивается с уменьшением срока до погашения и равна номиналу облигации в день погашения;

3) котируемая цена облигации, продающейся по номиналу, остается неизменной и равной номиналу облигации в течение всего срока ее обращения.

Факторы, влияющие на величину изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности

Теорема. Уменьшение внутренней доходности облигации приводит к росту ее цены на величину, большую, чем соответствующее снижение цены облигации при увеличении ее доходности на ту же величину. При одном и том же $\Delta r > 0$ относительный рост цены облигации всегда больше относительного снижения.

Теорема. Чем выше уровень процентных ставок рынка, тем меньше абсолютное и относительное изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности на заданную величину.

Теорема. Пусть срок до погашения облигации больше одного купонного периода. Тогда абсолютное (относительное) изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности тем больше, чем больше (меньше) купонная ставка.

Теорема. Пусть внутренняя доходность облигации остается неизменной и равной r до момента ее погашения. Если $f \neq r$, то абсолютное и относительное изменения котируемой цены облигации при изменении срока до погашения тем больше, чем меньше исходный срок до погашения.

Дюрация и показатель выпуклости облигации

Рассматривается облигация с потоком платежей (C_1, C_2, …, C_n; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$). Безрисковые процентные ставки в этот момент одинаковы для всех сроков и равны r.

Определение. Число

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$$

называется ***дюрацией*** облигации, или дюрацией Маколея.

Определение. Число

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i(0)}{P(r)}$$

называется ***показателем выпуклости*** облигации.

Теорема. При условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности ее перемещений отношение $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ можно оценить по формулам:

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2 ,$$

где D и C – дюрация и показатель выпуклости облигации в начальный момент $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

Стоимость инвестиции в облигацию

Определение. Стоимость инвестиции в облигацию $P(t)$ в момент $t \in [0,\ T]$ – это стоимость потока платежей по облигации (C_1, C_2,.,C_n; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$) в момент t:

$$P(t) = \sum_{i:t>t_i} C_i F(t_i, t) + \sum_{i:t<t_i} C_i \nu(t, t_i),$$

где $F(t_i,\ t)$ и $\nu(t,\ t_i)$ – множители наращения и дисконтирования *к моменту* t по соответствующим *безрисковым процентным ставкам*.

Предположим, что *в момент покупки* облигации $t = 0$ безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны r. Стоимость инвестиции в облигацию через t лет после ее покупки рассматривается при следующих предположениях о временной структуре процентных ставок после покупки облигации:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации (сразу после $t = 0$) безрисковые процентные ставки мгновенно изменятся на одну и ту же величину для всех сроков до значения $\tilde{r}$, после чего останутся на новом уровне до погашения облигации.

В первом случае стоимость инвестиции в облигацию в момент t называют *планируемой* и обозначают через $P(r,\ t)$, во втором случае – *фактической* и обозначают через $P(\tilde{r},\ t)$.

Теорема. $P(r,\ t)$ и $P(\tilde{r},\ t)$ – непрерывные возрастающие функции времени

$$P(r,\ t) = P(r)(1 + r)^t,$$
$$P(\tilde{r},\ t) = P(\tilde{r})(1 + \tilde{r})^t,$$

где $P(r)$ – рыночная цена покупки облигации в момент $t = 0$; $P(\tilde{r})$ – оценка облигации на момент $t = 0$, соответствующая новой временной структуре процентных ставок сразу после покупки облигации.

Теорема (об иммунизирующем свойстве дюрации облигации). Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент ее покупки $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени $t = D$ (равный дюрации облигации) фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой для любых значений $\tilde{r}$ сразу после $t = 0$:

$$P(\tilde{r},\ D) \geq P(r,\ D).$$

ЗАДАЧИ

116. По облигации обещают выплачивать в течение двух лет в конце каждого полугодия 6 д. е., а в конце 2-го года еще 100 д. е. Цена облигации 105 д. е. Найти внутреннюю доходность облигации.

117. По облигации обещают выплачивать в течение 10 лет в конце каждого полугодия 50 д. е., а в конце 10-го года еще 1 000 д. е. Цена облигации 900 д. е. Найти внутреннюю доходность облигации.

118. Определить внутреннюю доходность облигации *A* со следующим потоком платежей:

Облигация	t_i, годы			
	0	0,5	1	1,5
A	–100	10	15	120

119. По облигации обещают выплачивать в течение трех лет в конце каждого полугодия 10 д. е., а в конце 3-го года еще 100 д. е. Внутренняя доходность облигации 8% годовых. Найти цену облигации.

120. Определить внутреннюю доходность облигации *A* со следующим потоком платежей:

Облигация	t_i, годы				
	0	1	1,5	1,8	2
A	–100	10	20	30	140

121. По облигации обещают выплачивать в течение трех лет в конце каждого квартала 3 д. е., а в конце 3-го года еще 100 д. е. Внутренняя доходность облигации 4% годовых. Найти цену облигации.

122. Имеются три государственные облигации *A, B, C*, потоки платежей по которым приведены в следующей таблице:

Облигация	t_i, годы			
	0	2	2,5	3
A	–90	100	–	–
B	–85	–	100	–
C	–80	–	–	100

Определить безрисковые процентные ставки.

123. Известны годовые безрисковые процентные ставки $r(0{,}25) = 0{,}06$; $r(0{,}5) = 0{,}068$; $r(0{,}75) = 0{,}075$; $r(1) = 0{,}083$.

Определить внутреннюю доходность и стоимость облигации, по которой обещаны следующие платежи:

Срок, годы	0,25	0,5	0,75	1
Платеж, д. е.	5	5	5	105

124. Известны годовые безрисковые процентные ставки $r(0,5) = 0,06$; $r(1) = 0,07$; $r(1,5) = 0,075$; $r(2) = 0,08$.

Определить внутреннюю доходность и цену облигации, по которой обещаны следующие платежи:

Срок, годы	0,5	1	1,5	2
Платеж, д. е.	10	10	10	110

125. Определить кривую доходностей, если известны безрисковые процентные ставки:

а) $r(1) = 0,04$, $r(2) = 0,075$;

б) $r(0,5) = 0,04$; $r(1) = 0,05$; $r(2) = 0,06$.

Объяснить характер кривой.

126. Дана временная структура процентных ставок

$$r(1) = 0,05;\ r(2) = 0,06;\ r(3) = 0,07;\ r(4) = 0,06.$$

Определить кривую доходностей. Найти годовые безрисковые процентные ставки $r(0,8)$, $r(1,5)$ и $r(4,5)$. Объяснить характер кривой.

127. Дана временная структура процентных ставок

$$r(0,5) = 0,05;\ r(1) = 0,055;\ r(2) = 0,06.$$

Найти цену облигации с потоком платежей, приведенным в следующей таблице:

Срок, годы	0,5	1	1,5	2
Платеж, д. е.	10	10	10	1000

Использовать линейное и квадратичное интерполирование. Сравнить результаты.

128. Известны годовые безрисковые процентные ставки

$$r(1) = 0,05;\ r(1,5) = 0,06;\ r(2) = 0,065.$$

Построить кривую доходностей, используя квадратичное интерполирование. Зная кривую доходностей, определить рыночную цену облигации со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,5	1	1,5	1,8
Платеж, д. е.	10	10	10	110

129. Даны годовые безрисковые процентные ставки

$$r(1) = 0,06;\ r(2) = 0,08;\ r(3) = 0,09.$$

Используя квадратичное интерполирование, построить кривую рыночных доходностей. Определить цену облигации со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Платеж, д. е.	5	5	6	6	10	110

130. Дана временная структура процентных ставок:

$$r(0{,}5) = 0{,}04;\ r(1) = 0{,}05;\ r(1{,}5) = 0{,}05;\ r(2) = 0{,}06.$$

Определить кривую доходностей. Найти годовые безрисковые процентные ставки $r(0{,}25)$, $r(1{,}2)$, $r(1{,}75)$ и $r(2{,}25)$.

131. Известны годовые безрисковые процентные ставки

$$r(0{,}5) = 0{,}06;\ r(1) = 0{,}07;\ r(1{,}5) = 0{,}08.$$

Определить временную структуру процентных ставок по 2,5-летнему диапазону. Построить кривую доходностей. На рынке имеется облигация со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Платеж, д. е.	–100	5	5	5	5	105

132. Известны годовые безрисковые процентные ставки

$$r(0{,}5) = 0{,}06;\ r(1) = 0{,}065;\ r(1{,}5) = 0{,}08.$$

Определить временную структуру процентных ставок по 3-летнему диапазону. Построить кривую доходностей. На рынке имеется облигация со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Платеж, д. е.	–100	6	6	6	6	6	106

133. Даны годовые безрисковые процентные ставки

$$r(0{,}5) = 0{,}06;\ r(1) = 0{,}08.$$

Определить временную структуру процентных ставок по 1,5-летнему диапазону. Построить кривую доходностей. На рынке имеется облигация со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5
Платеж, д. е.	–100	2	2	2	3	3	105

134. На рынке имеются облигации *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, потоки платежей по которым и цены указаны в следующей таблице:

	Срок в годах					P
	0,5	1	1,5	2	2,5	
A	108					105,27
B		121				113,83
C	10	11	109			118,71
D	11	11	11	120		135,64
E	8	8	8	8	108	118,84

Используя процедуру бутстреппа, определить временную структуру процентных ставок по 2,5-летнему диапазону.

135. На рынке имеются облигации 4-х видов, потоки платежей по которым указаны в следующей таблице:

	Срок в годах						P
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
A	1 000						950
B	50	1 050					946,93
C	10	15	120				100
D	6	6	6	6	6	106	100

Определить временную структуру процентных ставок по 3-летнему диапазону. Построить кривую доходностей. Объяснить характер кривой.

136. На рынке имеется облигация, по которой обещают выплатить 20 д. е. через 0,5 года и 100 д. е. через 1 год. Цена облигации рассчитывается по формуле

$$P = \frac{20}{(1+x)^{0,5}} + \frac{100}{(1+y)^{1}}.$$

Здесь x, y – годовые доходности по инвестициям на 0,5 года и 1 год, определенные на момент расчета цены. Сегодняшние значения доходностей $x_0 = 0{,}04$ и $y_0 = 0{,}05$. Согласно прогнозу, доходности по краткосрочным инвестициям снизятся, по долгосрочным – увеличатся. Стоит ли покупать такую бумагу сегодня? Решить задачу, используя основное свойство градиента.

137. В условиях предыдущей задачи найти возможные наибольшее и наименьшее значения цены облигации при изменениях доходностей в пределах 1%. Решить задачу, используя свойства глобальных экстремумов функции на множестве.

138. По облигации производятся купонные выплаты каждые три месяца. Срок до погашения облигации: а) 10,5 месяцев; б) 6 месяцев. Определить число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, а также время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

139. В текущий момент времени безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны r. Доказать, что внутренняя доходность любой облигации без кредитного риска, имеющейся в этот момент на рынке, равна r.

140. По 5%-ной купонной облигации номиналом 100 д. е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Определить цену облигации (двумя способами) в момент, когда до погашения облигации остается: а) 3,3 года; б) 3 года. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 6% годовых.

141. По 6%-ной купонной облигации номиналом 200 д. е. обещают производить каждый квартал купонные платежи. Определить цену облигации (двумя способами) в момент, когда до погашения облигации остается: а) 16 месяцев; б) 15 месяцев. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 5% годовых.

142. По 8%-ной купонной облигации номиналом 100 д. е. обещают производить купонные выплаты 4 раза в год. Срок до погашения облигации – 5 лет, цена – 98 д. е. Определить внутреннюю доходность облигации (3 способа).

143. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. обещают производить купонные выплаты один раз в год. Определить годовую внутреннюю доходность облигации, если за 20 лет до погашения облигации в нее инвестировали 1 100 д. е.

144. По 9%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Определить внутреннюю доходность облигации, если за 3,8 года до погашения в нее инвестировали 1 050 д. е. (3 способа).

145. Дана 8%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., срок до погашения которой 20 лет, купонные выплаты производятся раз в год. Доказать, что цена облигации – котируемая. Определить цену облигации для следующих значений ее внутренней доходности: 9, 7, 8% годовых. Определить размер премии, дисконта. Результаты показать на рисунке.

146. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. обещают купонные выплаты раз в год в течение 5 лет. Внутренняя доходность облигации – 12% годовых и не изменяется в течение времени. Определить:

1) зависимость котируемой цены от срока до погашения облигации;

2) величину дисконта после каждой купонной выплаты в течение 5 лет;

3) зависимость абсолютного и относительного изменения котируемой цены (дисконта) облигации при изменении срока до погашения на один купонный период от исходного срока до погашения.

Решение задачи показать на рисунке.

147. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. обещают купонные выплаты раз в год в течение 10 лет. Внутренняя доходность облигации 8% годовых и не изменяется в течение времени. Определить:

1) зависимость котируемой цены от срока до погашения облигации;

2) величину премии после каждой купонной выплаты в течение 10 лет;

3) зависимость абсолютного и относительного изменения котируемой цены (премии) облигации при изменении срока до погашения на один купонный период от исходного срока до погашения.

Решение задачи показать на рисунке.

148. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. в конце каждого квартала обещают производить купонные выплаты в течение 5,2 лет. Внутренняя доходность облигации составляет 8% годовых. Определить котируемую цену облигации и величину накопленного купонного дохода, который должен оплатить покупатель облигации (два способа). Решение задачи показать на рисунке.

149. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. обещают производить купонные выплаты в конце каждого квартала. Внутренняя доходность облигации: а) 8%; б) 12% годовых и не изменяется до погашения облигации. Рассмотреть поведение цены облигации за 5,25; 5,2; 5 и 4,8 года до ее погашения. Решение задачи показать на рисунке. В каждом случае рассчитать биржевую цену облигации.

150. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. купонные выплаты производятся один раз в год. Внутренняя доходность облигации 8% годовых и не изменяется в течение времени. Определить цену облигации за 2; 1,5; 1 и 0,5 года до погашения. Решение задачи показать на рисунке.

151. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. купонные выплаты производятся один раз в год. Внутренняя доходность облигации 12% годовых и не изменяется в течение времени. Определить цену облигации за 2; 1,5; 1 и 0,5 года до погашения. Решение задачи показать на рисунке.

152. По 5%-ной купонной облигации номиналом 100 д. е. обещают производить купонные выплаты каждые полгода. Внутренняя доходность облигации: а) 8%; б) 4% годовых и не изменяется до погашения облигации. Рассмотреть поведение цены облигации для следующих сроков до ее погашения: 4; 3,5; 3,2; 2,8 и 2,5 года. Решение задачи показать на рисунке.

153. Построить график зависимости цены облигации $P(f)$ от величины купонной ставки f при уровнях доходности облигации r_1 и r_2, где $r_1 < r_2$.

154. Построить график зависимости цены облигации $P(r)$ от внутренней доходности r при значениях ее купонной ставки f_1 и f_2, где $f_1 < f_2$.

155. Построить график зависимости котируемой цены облигации $P_n(r)$ от внутренней доходности r для сроков до погашения n_1 и n_2, где $n_1 < n_2$.

156. Какую облигацию предпочтет инвестор (при прочих равных условиях) при ожидаемом снижении (повышении) уровня рыночной доходности: 1) облигацию с высокой или низкой купонной ставкой; 2) долгосрочную или краткосрочную облигацию.

157. Рассматривается 7%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают производить купонные выплаты каждые полгода. Срок до погашения – 3 года. Внутренняя доходность облигации – 6% годовых. Найти изменение цены облигации (абсолютное и относительное), если внутренняя доходность облигации изменится на $\pm\Delta r = \pm$ 0,5%. Сделать рисунок к решению задачи.

158. По 8%-ной купонной облигации номиналом 1 000 д. е. и сроком до погашения 10,25 лет обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Внутренняя доходность облигации – 8% годовых. Найти изменение цены облигации (абсолютное и относительное), если внутренняя доходность облигации изменится на величину $\pm\Delta r = \pm$ 1%. Сделать рисунок к решению задачи.

159. Рассматривается облигация со следующими параметрами: A = 1 000 д. е., T = 9,25 лет, m = 2, f = 0,09. Предполагается, что облигация может продаваться при двух уровнях доходности: $r_{н}$ = 0,07 или $r_{в}$ = 0,09. В обоих случаях доходность облигации может увеличиться на 0,5%. Определить изменение цены облигации (абсолютное и относительное) в обоих случаях. Результаты показать на рисунке.

160. Рассматривается облигация со следующими параметрами: A = 1 000 д. е., T = 9,25 лет, m = 2, f = 0,09. Предполагается, что облигация может продаваться при двух уровнях доходности: $r_{н}$ = 9% или $r_{в}$ = 20% годовых. В обоих случаях доходность облигации может снизиться на 2%. Определить изменение цены облигации (абсолютное и относительное) в обоих случаях. Результаты показать на рисунке.

161. По купонной облигации номиналом 1 000 д. е. и сроком до погашения 9,25 лет обещают производить купонные выплаты каждые полгода. Внутренняя доходность облигации 9% годовых. Сравнить изменение цены облигации (абсолютное и относительное) при изменении ее внутренней доходности на величину $\pm\Delta r = \pm$ 2% для значений купонной ставки 8 и 9% годовых. Результаты показать на рисунке.

162. По купонной облигации номиналом 100 д. е. и сроком до погашения 4 года обещают производить купонные выплаты каждые полгода. Внутренняя доходность облигации – 8% годовых. Сравнить изменение цены облигации (абсолютное и относительное) при изменении ее внутренней доходности на величину $\pm\Delta r = \pm$ 1% для значений купонной ставки 5 и 6% годовых. Результаты показать на рисунке.

163. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1 000 д. е. и годовой внутренней доходностью 8%, имеют сроки до погашения 10 и 20 лет соответственно. Купонные платежи производятся ежегодно. Определить котируемую цену и размер премии для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения котируемых цен (премий). Решение задачи показать на рисунке.

164. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1 000 д. е. и годовой внутренней доходностью 12%, имеют сроки до погашения 15 и 25 лет соответственно. Купонные платежи производятся ежегодно. Определить котируемую цену и размер дисконта для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения котируемых цен (дисконтов). Решение задачи показать на рисунке.

165. Рассматривается 8%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 5 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых. Вычислить:

1) дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2) относительное изменение цены облигации при снижении процентных ставок на 0,5; 1 и 3%, используя: а) только дюрацию облигации; б) дюрацию и показатель выпуклости облигации. Сравнить с точным значением $\Delta P(r)/P(r)$. Указать роль каждого из показателей в оценке относительного изменения цены облигации;

3) новую цену облигации в результате изменения процентных ставок по формулам точной, линейной, квадратичной зависимости $P(r + \Delta r)$ от Δr. Сделать рисунок.

166. В условиях предыдущей задачи рассмотреть увеличение процентных ставок на 0,5; 1 и 3%.

167. Дана 6%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в год в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 8% годовых. Вычислить:

1) дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2) относительное изменение цены облигации при увеличении процентных ставок на 1%, используя: а) только дюрацию облигации; б) дюрацию и показатель выпуклости облигации. Сравнить с точным значением $\Delta P(r)/P(r)$. Указать роль каждого из показателей в оценке изменения цены облигации;

3) новую цену облигации $P(r + \Delta r)$ в результате изменения процентных ставок по формулам точной, линейной, квадратичной зависимости $P(r + \Delta r)$ от Δr. Сделать рисунок.

168. На рынке имеются облигации B_1 и B_2 со следующими параметрами:

Вид облигации	Номинал, д. е.	Купонная ставка, %	Число платежей в году	Срок до погашения, лет
B_1	1000	10	1	10
B_2	1000	10	1	20

Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых. Рассчитать для этих облигаций дюрацию и показатель выпуклости, а также относительное изменение цены, если сразу после $t = 0$ процентные ставки снизятся на 1%. Какова зависимость от срока до погашения рассчитанных величин?

169. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в год в течение 4 лет. Определить дюрацию и показатель выпуклости для следующих значений внутренней доходности облигации: а) 10%; б) 9%; в) 8% годовых.

170. Дана купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в год в течение 4 лет. Внутренняя доходность облигации – 10% годовых. Определить дюрацию и показатель выпуклости облигации для следующих значений купонной ставки: а) 7%; б) 8%; в) 10% годовых.

171. Доказать, что зависимость дюрации купонной облигации от купонной ставки $D(f)$ при неизменных остальных параметрах является убывающей выпуклой функцией.

172. Дана купонная облигация со следующими характеристиками: номинал – 1 000 д. е., срок до погашения – 9,25 лет, купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации – 9% годовых. Сравнить относительные изменения цены облигации при увеличении ее внутренней доходности на 0,5% для купонных ставок 8 и 9% годовых.

173. Даны две облигации с 10%-ными купонными ставками и номиналом 1 000 д. е. Сроки до погашения облигаций – 4 года и 15 лет. По обеим облигациям производятся ежегодные процентные платежи. Предположив, что доходность облигаций может увеличиться с 10 до 14%, рассчитайте цену облигаций до и после изменения процентных ставок.

174. Не производя вычислений, ранжируйте следующие облигации по дюрации:

Облигация	Срок до погашения, лет	Купонная ставка, %	Внутренняя доходность, %
A	30	10	10
B	30	0	10
C	30	10	7
D	5	10	10

175. Можно ли сказать, не производя вычислений, какая из трех облигаций при прочих равных параметрах будет иметь большее процентное изменение цены при изменении безрисковых процентных ставок на одну и ту же величину?

Облигация	Срок до погашения, лет	Купонная ставка, %
A	9	8
B	11	10
C	12	0

176. Даны две облигации, потоки платежей по которым заданы в следующих таблицах:

Срок, годы	1	2	3	4
Платеж, д. е.	10	10	10	300

Срок, годы	2	3	4	5
Платеж, д. е.	10	10	10	300

Внутренняя доходность облигаций составляет 8% годовых. Определить дюрацию и показатель выпуклости этих облигаций. Процентный риск какой облигации больше и почему?

177. Дана облигация, поток платежей по которой задан в следующей таблице:

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, д. е.	4	4	5	5	5	100

Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 6% годовых. Все платежи по облигации отсрочили на 0,5 года. Оценить процентное изменение цены облигации с отсроченными платежами, если безрисковые процентные ставки для всех сроков увеличились на 1%.

178. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е. с полугодовыми купонами. Внутренняя доходность облигации равна 6%. Определить котируемую цену и дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $\frac{n}{2}$ лет, если $n = 1, 2, \ldots, 10$. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

179. Рассматривается облигация с ежегодными купонами, имеющая следующие параметры:

$$A = 1000 \text{ д. е.}, f = 4\%, m = 1, r = 80\%.$$

Рассчитать зависимость цены и дюрации облигации от срока до погашения для следующих значений числа периодов до погашения $n = 1, 2, \ldots, 8$. Сделать рисунок.

180. Для облигации, продающейся с дисконтом, показать, что чем больше купонная ставка $f < r$, тем больше срок максимума дюрации n_0 (считать $m = 1$). Рассчитать зависимость дюрации от срока до погашения для облигации со следующими параметрами:

$$r = 25\%, m = 1, f_1 = 5\% \text{ и } f_2 = 10\%.$$

Число периодов до погашения $n = 1, 2, \ldots, 15$. Сделать рисунок.

181. Дана 6%-ная купонная облигация с ежегодными купонами. Внутренняя доходность облигации равна 15%. Определить дюрацию облигации, когда до ее погашения остается n лет, если $n = 1, 2, \ldots, 30$. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

182. В условиях предыдущей задачи рассмотреть облигацию с полугодовыми купонами.

183. Дана облигация, поток платежей по которой приведен в таблице.

Срок, годы	1	2	3	4	5	6
Платеж, д. е.	20	20	20	15	15	135

Определить стоимость инвестиции в эту облигацию через 3,5 года после покупки для безрисковых процентных ставок, приведенных в таблице.

Ставка, %	17	16	15	15	15,5	16
Срок инвестирования, годы	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5
Момент инвестирования, годы	1	2	3	3,5	3,5	3,5

Вычислить составляющие стоимости инвестиции.

184. Дана облигация, поток платежей по которой задан в таблице.

Срок, годы	1	2	3	4	5	6	7	8
Платеж, д. е.	6	6	7	7	8	8	8	108

Определить стоимость инвестиции в облигацию через 3,5 года после ее покупки для безрисковых процентных ставок, приведенных в таблице.

Ставка, %	5	5	4	5	6	7	7	8
Срок инвестирования, годы	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
Момент инвестирования, годы	1	2	3	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Вычислить составляющие стоимости инвестиции.

185. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 100 д. е., по которой обещают ежегодно производить купонные выплаты в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и составляют 10% годовых. Определить:

1) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в любой момент времени $t \in [0, 3]$, если сразу после покупки облигации процентные ставки выросли до 11% годовых;

2) дюрацию облигации D и момент времени t^*, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадут; сравнить t^* и D;

3) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени в момент времени, равный дюрации облигации. Объяснить, за счет чего достигается иммунизация. Решение задачи показать на рисунке.

186. Рассматривается 6%-ная купонная облигация номиналом 100 д. е., платежи по которой производятся один раз в год. Срок до погашения – 4 года. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 7% годовых. Определить стоимость инвестиции в облигацию через 2,5 года после покупки при следующих условиях:

1) временная структура процентных ставок не изменяется в течение всего срока обращения облигации;

2) сразу после покупки облигации процентные ставки снизились на 1% и не менялись в дальнейшем;

3) через 0,5 года после покупки облигации процентные ставки снизились на 1% и не менялись в дальнейшем;

4) сразу после покупки облигации процентные ставки увеличились на 1%, а через год после покупки снизились на 1% и не менялись в дальнейшем.

187. Рассматривается 6%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают каждый год производить купонные выплаты в течение 5 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 6% годовых. Найти:

1) дюрацию облигации, планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если сразу после покупки облигации процентные ставки снизились до 5%. Объяснить, за счет чего достигается иммунизация;

2) момент времени t^*, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию совпадут;

3) фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если после $t = 0$ рыночная процентная ставка является переменной: в течение первых трех лет временная структура процентных ставок оставалась неизменной, а через 3 года после покупки облигации процентные ставки увеличились до 7% годовых.

188. Рассматривается 8%-ная купонная облигация номиналом 1 000 д. е., по которой обещают каждый год дважды производить купонные выплаты в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 8% годовых. Найти:

1) дюрацию облигации и планируемую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации;

2) фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если сразу после покупки облигации процентные ставки изменились: а) до 9 и б) до 7% годовых. В каждом случае объяснить, за счет чего достигается иммунизация;

3) момент времени t^*, когда планируемая и фактическая стоимость инвестиции в облигацию совпадут;

4) фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если через 2 года после покупки облигации процентные ставки изменились: а) до 9 и б) до 7% годовых (в течение первых двух лет временная структура процентных ставок оставалась неизменной);

5) фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если после $t = 0$ рыночная процентная ставка является переменной: непосредственно после инвестирования процентные ставки увеличились до 9% годовых, а через 1,5 года после покупки облигации увеличились еще до 10% годовых.

189. На рынке имеется 9%-ная купонная облигация номиналом 1000 д. е., по которой обещают каждый год производить купонные выплаты в течение 5 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 9% годовых. Найти:

1) дюрацию облигации, планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если через полгода после покупки облигации процентные ставки снизились до 8,5%, а через 1,5 года после покупки снова установились на уровне 9% годовых;

2) фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если после $t = 0$ рыночная процентная ставка является переменной: сразу после покупки облигации процентные ставки поднялись до 10% годовых, а через 2 года после покупки облигации – до 11% годовых.

190. Продается акция по цене 50 д. е. Ожидается, что каждый год по этой акции будут выплачиваться дивиденды в размере 1,5 д. е. Предполагается, что через три года цена акции будет равна 55 д. е. Ставка реинвестирования на рассматриваемый период времени – 6% годовых. Срок инвестиции в акцию – 3 года. Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту акцию.

191. Продается акция по цене 40 д. е. Ожидается, что каждый год по этой акции будут выплачиваться дивиденды в размере 2 д. е. Предполагается, что в конце 1-го года цена акции будет равна 45 д. е., а в конце 2-го – 50 д. е. Срок инвестиции в акцию – 2 года. Дивиденды реинвестируются в акции того же типа. Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту акцию.

192. Продается акция по цене 50 д. е. Ожидается, что каждый год по этой акции будут выплачиваться дивиденды в размере 2 д. е. Предполагается, что в конце 1-го года цена акции будет равна 55 д. е., в конце 2-го – 60 д. е., а в конце 3-го года – 62 д. е. Срок инвестиции в акцию – 3 года. Дивиденды реинвестируются в акции того же типа. Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту акцию.

193. Куплена 6%-ная купонная облигация номиналом 1000 д. е. со сроком до погашения 5 лет и с внутренней доходностью 8% годовых. Купонные выплаты по облигации производятся раз в год. Срок инвестиции в облигацию – 5 лет. Определить среднегодовую доходность этой инвестиции для следующего поведения процентных ставок после покупки облигации: а) через 0,5 года после покупки облигации процентные ставки снизились до 6% годовых; б) через 3 года после покупки облигации процентные ставки снизились до 7% годовых (в течение первых трех лет временная структура процентных ставок оставалась неизменной).

194. Куплена 7%-ная купонная облигация номиналом 1000 д. е. со сроком до погашения 4 года. Купонные выплаты по облигации производятся раз в год. На момент покупки внутренняя доходность облигации – 8% годовых. Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту облигацию для сроков инвестиции 3 и 4 года, если непосредственно после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков: а) не изменились; б) снизились до 6%; в) поднялись до 9% годовых.

195. Куплены следующие виды ценных бумаг:

– одногодичный вексель;

– купонная облигация, платежи по которой производятся один раз в год и до погашения которой остался один купонный период;

– 5-летняя чисто дисконтная облигация;

– 30-летняя чисто дисконтная облигация.

В момент покупки внутренние доходности облигаций были одинаковы и составляли 6% годовых. Через год вексель и купонная облигация были погашены, остальные бумаги продали. Определить среднегодовую доходность инвестиции в каждую из бумаг для следующего поведения процентных ставок сразу после их покупки: а) не изменились; б) снизились до 4%; в) поднялись до 8% годовых.

196. Инвестор со сроком инвестиции 3 года рассматривает покупку 20-летней облигации, купонные платежи по которой выплачиваются каждые полгода. Номинал облигации 1 000 д. е., годовая купонная ставка – 8 %, доходность к погашению – 10% годовых. Инвестор ожидает, что он сможет реинвестировать купонные выплаты по годовой ставке 6% и в конце планируемого срока инвестиции 17-летняя облигация будет продаваться с доходностью к погашению 7% годовых. Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту облигацию на 3 года при этих условиях.

197. На рынке имеется 7,5%-ная купонная облигация, срок до погашения которой 18 лет, номинал – 1 000 д. е. Купонные выплаты производятся раз в год. В настоящее время облигация оценивается в 825 д. е. Инвестор рассчитывает владеть облигацией 3 года, полагая, что через 3 года 15-летняя облигация будет продаваться с доходностью к погашению 8% годовых. Определить ожидаемую среднегодовую доходность инвестиции в эту облигацию на 3 года, если платежи по облигации реинвестируются по ставке, равной: а) внутренней доходности облигации в текущий момент времени; б) 7% годовых.

198. Определить доходность инвестиции в чисто дисконтную облигацию, погашаемую через 1,5 года, если в момент ее покупки уровень рыночной доходности составлял 8% годовых. Рассмотреть следующие случаи: а) после покупки облигации рыночные ставки не изменились; б) поднялись до 9% годовых; в) снизились до 7% годовых. Во всех случаях рассмотреть два варианта: 1) инвестор владеет облигацией до момента погашения; 2) инвестор продал облигацию через 4 месяца.

Глава 4. УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕМ ОБЛИГАЦИЙ

Портфель представляет собой набор финансовых инструментов, собранных для достижения инвестиционной цели.

Принцип Редингтона иммунизации портфеля облигаций: для защиты стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом.

Задача о формировании иммунизированного портфеля с инвестиционным горизонтом T лет имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases}$$

$$\omega_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Стратегия иммунизации – способ управления портфелем облигаций, обеспечивающий защиту стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки. В основе этой стратегии – принцип иммунизации Ф. Редингтона.

Стратегия предназначенного портфеля позволяет инвестору выполнить его обязательства $S_1, \ldots, S_n$ через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ лет соответственно. Портфель формируется в соответствии с решением следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_i^j x_j \geq S_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \text{ (min)}.$$

Стратегия предназначенного портфеля ***с реинвестированием части доходов*** для выполнения обязательства инвестора в следующий период иногда позволяет несколько снизить стоимость предназначенного портфеля. Портфель формируется в соответствии с решением следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_1^j x_j \geq S_1 + G_1 \\ \sum_{j=1}^{m} C_2^j x_j + G_1 (1 + r_1)^{t_2 - t_1} \geq S_2 + G_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{m} C_{n-1}^j x_j + G_{n-2} (1 + r_{n-2})^{t_{n-1} - t_{n-2}} \geq S_{n-1} + G_{n-1} \\ \sum_{j=1}^{m} C_n^j x_j + G_{n-1} (1 + r_{n-1})^{t_n - t_{n-1}} \geq S_n \\ G_i \geq 0, \ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \text{ (min)}.$$

Меры доходности портфеля облигаций

Средневзвешенная доходность $r_{\text{ср}}$ портфеля определяется путем усреднения доходностей по всем облигациям в портфеле $r_{\text{ср}} = \sum_{j=1}^{m} \omega_j r_j$. Здесь $\omega_j = \Omega_j / \Omega$ – доля облигаций j-го вида в портфеле, r_j – их внутренняя доходность. Недостатком этой характеристики является то, что она несет мало информации о потенциальной доходности портфеля.

Внутренняя ставка доходности портфеля $r_{\text{п}}$ – это процентная ставка, по которой приведенная стоимость потока доходов от портфеля (R_1, R_2, …, R_n; $t = t_1$, t_2, …, t_n) равна его рыночной цене Ω в момент $t = 0$:

$$\Omega = \frac{R_1}{(1 + r_{\text{п}})^{t_1}} + \dots + \frac{R_n}{(1 + r_{\text{п}})^{t_n}}.$$

Внутренняя ставка доходности портфеля имеет те же недостатки, что и внутренняя доходность облигации. Она предполагает, что платежи от портфеля реинвестируются по ставке, равной $r_{\text{п}}$, а сам портфель держится до погашения облигации с наибольшим сроком погашения из портфеля.

Обе характеристики $r_{ср}$ и $r_п$ являются несовершенными, поскольку они дают мало информации об инвестиционной эффективности портфеля. Адекватной мерой эффективности управления портфелем считается годовая ***доходность инвестиции*** $\bar{r}$ в портфель облигаций за инвестиционный период T. Уравнение доходности имеет вид

$$\Omega(T) = \Omega(0)(1 + \bar{r})^{T},$$

где $\Omega(0)$ и $\Omega(T)$ – начальная и конечная стоимости инвестиции в портфель облигаций. $\Omega(0)$ – реальные затраты на формирование портфеля.

При отсутствии транзакционных расходов $\Omega(0) = \Omega$ – цене покупки портфеля. $\Omega(T)$ – реально вырученные средства в результате управления портфелем облигаций в течение всего срока T. Полагают $\Omega(T) = \Omega(\tilde{r}, T)$ – фактической стоимости инвестиции в портфель на момент T. Величину $\bar{r}$ сравнивают с уровнем рыночной доходности r в момент покупки портфеля $t = 0$.

ЗАДАЧИ

199. Имеются облигации трех видов:

Срок, годы	B_1	B_2	B_3
0	–855,37	–452,95	–990,91
0,5	–	10,5	–
1	–	10,5	90
1,5	–	500	–
2	1035	–	1 100

Определить поток платежей от портфеля П(2000, 2000, 2000). Найти дюрацию и показатель выпуклости портфеля (рыночную процентную ставку определить из условия задачи).

200. Дюрации четырех видов облигаций равны соответственно 1,5; 2; 3,5 и 5 лет, а их показатели выпуклости 5, 8, 10 и 12 лет. Из этих облигаций сформирован портфель П(1000, 1500, 2500, 4000). Сразу после его формирования процентные ставки для всех сроков изменились с 8 до 9% годовых. Найти:

1) дюрацию и показатель выпуклости портфеля;

2) относительное изменение цены портфеля используя: а) только дюрацию портфеля; б) дюрацию и показатель выпуклости портфеля. Указать роль каждого из показателей в оценке относительного изменения цены портфеля.

201. Сформирован портфель П(4000, 6000) из облигаций двух видов. Характеристики облигаций приведены в таблице:

Вид облигации	Номинал, д. е.	Купонная ставка, %	Число платежей в году	Срок до погашения, лет
B_1	100	5	2	2
B_2	100	8	1	2

Сразу после формирования портфеля процентные ставки изменились с 9 до 8% годовых. Рассчитать:

1) поток платежей и дюрацию портфеля (два способа);

2) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель на момент времени, равный дюрации портфеля;

3) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в портфель на момент погашения всех облигаций в портфеле $t = 2$ года.

202. Сформирован портфель П(3000, 2000) из облигаций двух видов. Характеристики облигаций приведены в таблице.

Вид облигации	Номинал, д. е.	Купонная ставка, %	Число платежей в году	Срок до погашения, лет
B_1	100	6	2	1
B_2	100	8	1	2

Сразу после формирования портфеля процентные ставки изменились с 8 до 9% годовых. Рассчитать:

1) дюрацию и показатель выпуклости портфеля (два способа);

2) относительное изменение цены портфеля, используя: а) только дюрацию портфеля; б) дюрацию и показатель выпуклости портфеля. Сравнить с точным значением $\Delta\Omega(r)/\Omega(r)$. Указать роль каждого из показателей в оценке относительного изменения цены портфеля;

3) новую цену портфеля $\Omega(r + \Delta r)$ в результате изменения процентных ставок по формулам точной, линейной, квадратичной зависимости $\Omega(r + \Delta r)$ от Δr. Сделать рисунок.

203. В условиях предыдущей задачи найти:

1) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в портфель на момент времени, равный дюрации портфеля;

2) доходность инвестиции в портфель для сроков инвестиции 1 год, 2 года и срока инвестиции, равного дюрации портфеля. Объяснить результаты.

204. Сформировать портфель из облигаций двух видов, дюрации которых равны 2 и 3 года. Дюрация портфеля заранее известна и равна 2,75 года.

205. Дюрации четырех видов облигаций равны соответственно 2, 3, 5 и 7 лет, а их показатели выпуклости – 5, 6, 10 и 12 лет^2. Из этих облигаций сформировать портфель с дюрацией, равной 3,5 года и наименьшим показателем выпуклости. Для полученного значения показателя выпуклости рассчитать относительное изменение цены портфеля при изменении рыночной процентной ставки с 8 до 9% годовых. Оценить вклад слагаемого $\frac{1}{2}C_{\min}\left(\Delta r/(1+r)\right)^2$.

206. В условиях предыдущей задачи учесть требование $\omega_1 \le 0{,}4$; $\omega_3 \ge 0{,}2$.

207. Дюрации пяти видов облигаций соответственно равны 3; 3,5; 3,75; 4,2; 4,5 года, а их показатели выпуклости – 10, 12, 15, 20 и 25 лет^2. Сформировать портфель из этих облигаций с дюрацией, равной 4 годам и наименьшим показателем выпуклости, если $\omega_1 \le 0{,}2$; $\omega_2 \ge 0{,}2$; $\omega_3 \ge 0{,}2$. Для полученного значения показателя выпуклости портфеля рассчитать относительное изменение цены портфеля при изменении рыночной процентной ставки с 9 до 8% годовых. Оценить вклад слагаемого $\frac{1}{2}C_{\min}\left(\Delta r/(1+r)\right)^2$.

208. Сформирован портфель П(2000, 3000, 2000) из облигаций трех видов, потоки платежей по которым указаны в таблице.

Облигация	Платеж, д. е.				
	Срок, годы				
	0	0,5	1	1,5	2
B_1	–850				1 035
B_2	–290	10	10	330	
B_3	–990		90		1 100

Определить средневзвешенную доходность портфеля и внутреннюю ставку доходности.

209. Портфель составлен из облигаций трех видов. Купонные платежи по облигациям производятся раз в год.

Облигация	Купонная ставка, %	Срок погашения, лет	Номинал, д. е.	Рыночная стоимость, д. е.
B_1	7,0	5	10 000	9 209
B_2	10,5	7	20 000	20 000
B_3	6,0	3	30 000	28 050

Определить средневзвешенную доходность портфеля и внутреннюю ставку доходности.

210. Инвестор через два года должен осуществить за счет своего портфеля платеж в размере 1 млн д. е. Инвестор рассматривает возможности инвестирования в облигации двух видов B_1 и B_2, параметры которых приведены в таблице.

Вид облигации	Номинал, д. е.	Купонная ставка, %	Число платежей в год	Срок до погашения, лет
B_1	1 000	7	1	1
B_2	1 000	8	1	3

Процентные ставки на рынке одинаковы для всех сроков и составляют 10% годовых. Предполагается, что процентные ставки на рынке могут измениться на одну и ту же величину для всех сроков. Считая, что сразу после формирования портфеля процентные ставки снизились до 9%; поднялись до 11%:

1) рассмотреть возможные альтернативы инвестора;

2) сформировать иммунизированный портфель, позволяющий инвестору через два года выполнить его обязательство.

211. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. На рынке имеются купонные облигации со следующими параметрами: $A_1 = A_2 =$ $= 100$ д. е., $f_1 = f_2 = 10\%$, $T_1 = 2$ года, $T_2 = 4$ года. Рассчитать стратегию иммунизации портфеля при инвестировании 10 000 д. е. в данные облигации сроком на 3 года, если через год после инвестирования безрисковые процентные ставки увеличились до 9% годовых.

212. В условиях предыдущей задачи учесть, что при покупке и продаже облигаций берутся комиссионные в размере 0,5%.

213. Через 1, 2 и 3 года инвестору предстоят выплаты соответственно в размерах 400, 600 и 1 000 д. е. На рынке имеются облигации A и B со следующими параметрами:

Облигация	C_1	C_2	C_3	P
A	20	20	100	100
B	10	100		90

Рыночная ставка для всех сроков – 5% годовых. Сформировать портфель наименьшей стоимости, позволяющий инвестору:

1) выполнить его обязательства;

2) выполнить его обязательства при условии, что часть платежа, поступающего от портфеля, используется для выполнения обязательства через год.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Тема 1. Математические основы финансового анализа в условиях определенности

1. Принципы теории разовых платежей.
2. Для чего нужны операции наращения и дисконтирования?
3. Операция наращения. Формулировка задачи о наращении суммы долга. Схема процесса наращения суммы P_0. Зависит ли эта схема от вида ставки наращения? Как называется найденная наращением сумма долга? Что такое капитализация процентов? Что такое множитель наращения, кривая наращения?
4. Операция дисконтирования. Формулировка задачи о дисконтировании суммы долга. Схема процесса дисконтирования суммы погашаемого долга S_n. Эта схема зависит от вида ставки дисконтирования? Как называется найденная дисконтированием сумма первоначального долга? Что такое дисконтный множитель, дисконтная кривая?
5. Определение современной стоимости суммы погашаемого долга.
6. Что такое проценты, дисконт?
7. Определение процентной ставки (наращения). Смысл этой ставки.
8. Определение учетной ставки (дисконтирования). Смысл этой ставки.
9. Что такое период начисления процентов?
10. Когда используются обозначения n, Sn, i, d?
11. Как определяется процентная ставка i за единицу времени?
12. Как определяется учетная ставка d за единицу времени?
13. Чем отличаются процентные ставки i и d?
14. Простая, сложная, номинальная, непрерывная процентные ставки, их определения.
15. Методы наращения по ставке i: формулы и названия методов.
16. Свойства наращенной суммы долга по ставке i. Их иллюстрация на кривых наращения.
17. Свойства процентов по ставке i.
18. Методы наращения по учетной ставке d: формулы и названия методов.
19. Свойства наращенной суммы долга по ставке d. Их иллюстрация на кривых наращения.
20. Методы дисконтирования по ставке i: формулы и названия методов.

21. Свойства современной стоимости долга по ставке i. Их иллюстрация на дисконтных кривых.

22. Методы дисконтирования по учетной ставке d: формулы и названия методов.

23. Свойства современной стоимости долга по ставке d. Их иллюстрация на дисконтных кривых.

24. Свойства дисконтов по ставке d.

25. Что такое математический и банковский учет долга?

26. Годовая номинальная учетная ставка $d^{(m)}$, определение.

27. Что такое непрерывное дисконтирование?

28. Поведение номинальных ставок $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ при $m \to \infty$?

29. Определение эквивалентности денежных сумм. Как это определение выполняется для сумм P_0 и S_n по формулам наращения и дисконтирования?

30. Определение эквивалентных процентных ставок. Начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно 1% в месяц?

31. Определение эффективной процентной ставки $i_{эф}$. Ее свойства.

32. Определение эффективной учетной ставки $d_{эф}$. Ее свойства.

33. Последовательность номинальных процентных ставок $\left\{i^{(m)}\right\}$, соответствующая фиксированной эффективной процентной ставке $i_{эф}$. Доказать монотонность последовательности и неравенство $i_{эф} \geq i^{(m)}$.

34. Последовательность номинальных учетных ставок $\left\{d^{(m)}\right\}$, соответствующая фиксированной эффективной учетной ставке $d_{эф}$. Доказать монотонность последовательности и неравенство $d_{эф} \leq d^{(m)}$.

35. Последовательность эффективных процентных ставок $\left\{i_{эф}(m)\right\}$, соответствующая фиксированной номинальной процентной ставке $i^{(m)}$. Показать кривые наращения, соответствующие членам последовательности $\left\{i_{эф}(m)\right\}$. Доказать монотонность последовательности.

36. Последовательность эффективных учетных ставок $\left\{d_{эф}(m)\right\}$, соответствующая фиксированной номинальной процентной ставке $d^{(m)}$. Показать дисконтные кривые, соответствующие членам последовательности $\left\{d_{эф}(m)\right\}$. Доказать монотонность последовательности.

37. Переменная процентная ставка. Формулы наращения и дисконтирования по переменной процентной и учетной ставке. Средняя процентная ставка.

38. Непрерывная переменная процентная ставка. Основные виды функции $\delta(t)$. Что такое годовой прирост интенсивности процентов и как он определяется? Что такое годовой темп изменения интенсивности процентов и как он определяется?

39. Финансовая операция. Для чего нужен показатель доходности финансовой операции? Его определение. Виды показателей доходности и их определение. Уравнение доходности финансовой операции.

40. Определение инфляции. Определение количественных показателей, характеризующих инфляцию. Связь между ними.

41. Формулы для индекса цен и темпа инфляции.

42. Как учитывается инфляция в реальной сумме вклада?

43. Множитель наращения $q(n)$, учитывающий инфляцию. Барьерная процентная ставка $i_б$, ее определение. Что такое положительная (отрицательная) ставка процента? Доказать, что если $i > i_б$ ($i < i_б$), то $q(n) > 1$ ($q(n) < 1$). Поведение реальной суммы вклада в случаях $i > i_б$ и $i < i_б$.

44. Значения барьерной ставки при простом и сложном начислении процентов. Вид кривых наращения по сложной ставке i при наличии инфляции.

45. Брутто-ставка, ее определение и смысл. Значения простой и сложной брутто-ставки. Формула Фишера.

46. Поток платежей. Его параметры, основные виды потоков платежей.

47. Основные характеристики и основные формулы потока платежей.

48. Эквивалентные финансовые потоки. Уравнение эквивалентности.

49. Доходность финансового потока. Уравнение доходности потока. Основное свойство доходности потока. Определение операции реинвестирования.

50. Теорема о существовании и единственности решения уравнения доходности потока платежей.

51. Метод линейной интерполяции. Сходимость последовательности приближенных значений доходности.

52. Финансовая рента. Ее параметры и основные виды. Бессрочная рента. Отложенная рента.

53. Вывод формул основных показателей p-срочной ренты для различных способов начисления процентов.

54. Вывод формул основных показателей годовой и непрерывной ренты для различных способов начисления процентов.

55. Коэффициенты наращения и приведения ренты: их определения, смысл, свойства.

56. Зависимость показателей A и S от основных параметров ренты.

57. Зависимость показателей A и S от второстепенных параметров ренты.

58. Сравнение рент.

59. Задачи об определении параметров ренты.

60. Рента с постоянным абсолютным изменением платежей.

61. Рента с постоянным относительным изменением платежей.

62. Основные характеристики любой схемы погашения задолженности.

63. Погашение задолженности с организацией погасительного фонда. Общая характеристика схемы: когда применяется, что собой представляет.

64. Сумма кредита и сумма на банковском счете фонда: их связь с потоком погасительных платежей. Обоснование погашения задолженности с помощью данной схемы.

65. Поведение денежной суммы на банковском счете фонда. Рекуррентная формула. Доказательство равенства $S_{t_n} = S$.

66. Поведение задолженности заемщика во времени. Рекуррентная формула. Доказательство равенств $A_{t_k} = P_{t_k}$ и $A_{t_n} = 0$.

67. Погашение долга в рассрочку. Общая характеристика схемы: когда применяется, что собой представляет.

68. Погашение долга постоянной обычной рентой. Правило начисления и выплаты процентов в этой схеме. Составляющие платежей, их поведение во времени.

69. Доказательство обеспечения возврата основной суммы долга с помощью данной схемы. Формула погашенной задолженности по основной сумме долга на конец любого года в сроке долга.

70. Модель оценки стоимости акции.

Тема 2. Финансовый анализ производственных инвестиций

1. Что такое инвестиционный проект? Дать определение показателей эффективности инвестиционного проекта.
2. Получить зависимость чистого приведенного дохода проекта от срока начала отдачи от инвестиций.
3. Как устанавливается ставка дисконтирования?
4. В чем преимущество проекта, выбранного по критерию максимального *NPV*, перед другими проектами?
5. В чем преимущество проекта с наибольшим значением показателя *IRR*?
6. Что такое резерв безопасности проекта?

Тема 3. Основы теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом

1. Облигация. Условия определенности для облигации.
2. Внутренняя доходность облигации. Номинальная и эффективная ставки внутренней доходности. Их связь. Свойства внутренней доходности.
3. Безрисковые процентные ставки, их роль на рынке финансовых инструментов. Временная структура процентных ставок. Теорема о цене облигации по временной структуре процентных ставок.
4. Кривая доходностей. Методы построения кривой доходностей. Формы кривой доходностей.
5. Доказать, что если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны r, то внутренняя доходность любой облигации без кредитного риска, имеющейся в этот момент на рынке, равна r.
6. Купонная облигация, ее параметры. Номинальная стоимость (номинал), купонный период. Вывод правила определения параметров n и τ. Формулы для расчета цены купонной облигации.
7. Теорема о зависимости цены облигации от ее внутренней доходности. Кривые зависимости «цена – доходность» для облигаций с купонными ставками $f_1 < f_2$.
8. Котируемая цена. Премия, дисконт. Теорема о зависимости котируемой цены купонной облигации от купонной ставки.
9. Цена облигации между купонными выплатами: ее связь с котируемой ценой, поведение, составляющие и способы вычисления.
10. Теорема о зависимости котируемой цены купонной облигации от срока до погашения. График зависимости котируемой цены от срока до погашения. Кривые зависимости «цена – доходность» для котируемых цен облигаций при сроках до погашения $n_1 < n_2$.

11. Теорема о зависимости величины изменения цены облигации (абсолютного и относительного) от направления изменения ее внутренней доходности.

12. Теорема о зависимости величины изменения цены облигации (абсолютного и относительного) от уровня процентных ставок рынка.

13. Теорема о зависимости величины изменения цены облигации (абсолютного и относительного) от купонной ставки.

14. Теорема о зависимости величины изменения котируемой цены облигации (абсолютного и относительного) от срока до погашения.

15. Дюрация Маколея и показатель выпуклости облигации. Как показатели D и C характеризуют поведение функции $P(r)$?

16. Теорема об оценке процентного риска облигации. Роль показателей D и C в оценке процентного риска облигации. Условия, при которых дюрация является мерой процентного риска облигации.

17. Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации.

18. Свойства дюрации и показателя выпуклости купонной облигации.

19. Стоимость инвестиции в облигацию. Условия, при которых определяется стоимость инвестиции в облигацию. Риски, с которыми сталкивается инвестор при покупке облигации в условиях определенности.

20. Планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию и их свойства.

21. Теорема об иммунизирующем свойстве дюрации облигации.

22. Портфель из облигаций без кредитного риска. Меры доходности портфеля.

23. Дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций. Их свойства.

24. Задача о формировании портфеля облигаций с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости. Для чего минимизируется показатель выпуклости?

25. Планируемая и фактическая стоимости инвестиции в портфель облигаций и их свойства.

Тема 4. Управление портфелем облигаций

1. Какому риску подвержен портфель из облигаций, не имеющих кредитного риска?

2. Задача о построении портфеля с заданным значением дюрации и наименьшим показателем выпуклости. Для чего минимизируется показатель выпуклости портфеля?

3. Иммунизирующее свойство дюрации портфеля. Принцип Редингтона. Иммунизированный портфель.

4. Задача о формировании иммунизированного портфеля с дюрацией, оценивающей его процентный риск.

5. Стратегия иммунизации портфеля. Кривая доходностей в стратегии иммунизации. Обоснование необходимости переформирования портфеля. Стоимость портфеля после переформирования.

6. Как сформировать иммунизированный портфель облигаций?

7. Как проверить, иммунизирован ли портфель?

8. Почему в момент поступления платежа от портфеля его необходимо переформировать?

9. Почему при переформировании портфеля должно выполняться равенство расходов и доходов?

10. Что будет, если поступивший платеж инвестор не реинвестирует в облигации, а израсходует по своему усмотрению?

11. Показать, что стоимость портфеля после его переформирования в момент t_1 при отсутствии транзакционных расходов равна $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1)$.

12. Показать, что стоимость портфеля после его переформирования в момент t_1 при наличии транзакционных расходов равна $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1) - C^1$, где C^1 – минимальное значение издержек на переформирование портфеля.

13. Сформулировать задачу минимизации транзакционных издержек. Разрешимость этой задачи.

14. Иммунизация портфеля при наличии транзакционных расходов. Стоимость портфеля после переформирования. Проверка иммунизации.

15. Какому риску подвергается портфель при снижении процентных ставок? За счет чего достигается иммунизация портфеля при снижении процентных ставок?

16. Какому риску подвергается портфель при повышении процентных ставок? За счет чего достигается иммунизация портфеля при повышении процентных ставок?

17. Что такое предназначенный портфель? Как он формируется? Каким рискам он подвержен?

18. Как можно управлять дюрацией портфеля?

19. Какая цель достигается при увеличении дюрации портфеля?

20. Какая цель достигается при уменьшении дюрации портфеля?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольное задание по теме «Методы наращения и дисконтирования. Финансовые потоки. Доходность финансовой операции»

Номер варианта – номер фамилии студента в списке группы

Задание 1

Вычислить множители наращения, соответствующие годовым процентным ставкам $i_{пр.}$, $i_{сл.}$, $i^{(m)}$, δ ($d_{пр.}$, $d_{сл.}$, $d^{(m)}$, δ) для следующих сроков долга: n_1 = 90 дней, n_2 = 180 дней, n_3 = $1/m$ года, n_4 = 1 год, n_5 = 2 года, n_6 = 3 года, считая $i_{пр.} = i_{сл.} = i^{(m)} = \delta = i$ ($d_{пр.} = d_{сл.} = d^{(m)} = \delta = d$). Процентная ставка – номер варианта в виде десятичной дроби, число периодов начисления сложных процентов в году m – номер варианта.

Результаты расчетов представить в виде таблицы, а также в виде кривых наращения, приведенных на одном рисунке. Какие свойства наращенной суммы долга можно сформулировать по полученным результатам? Привести доказательства этих свойств.

Доказать расположение кривых наращения на рисунке.

Для процентных ставок $i^{(m)}$ и δ рассчитать эффективную процентную ставку $i_{эф}$. Доказать и объяснить неравенство $i < i_1 < i_2$, где i_1 и i_2 − эффективные процентные ставки при начислении процентов по ставкам $i^{(m)}$ и δ соответственно. Какой последовательности соответствуют эти расчеты?

Задание 2

Вычислить дисконтные множители, соответствующие процентным ставкам $i_{пр.}$, $i_{сл.}$, $i^{(m)}$, δ ($d_{пр.}$, $d_{сл.}$, $d^{(m)}$, δ) для следующих сроков долга: n_1 = 90 дней, n_2 = 180 дней, n_3 = $1/m$ года, n_4 = 1 год, n_5 = 2 года, n_6 = 3 года, считая $i_{пр.} = i_{сл.} = i^{(m)} = \delta = i$ ($d_{пр.} = d_{сл.} = d^{(m)} = \delta = d$). Процентная ставка – номер варианта в виде десятичной дроби, число периодов начисления сложных процентов в году m – номер варианта.

Результаты расчетов представить в виде таблицы, а также в виде дисконтных кривых, приведенных на одном рисунке. Какие свойства современной стоимости долга можно сформулировать по полученным результатам? Привести доказательства этих свойств.

Доказать расположение дисконтных кривых на рисунке.

Для процентных ставок $d^{(m)}$ и δ рассчитать эффективную учетную ставку $d_{эф}$. Доказать и объяснить неравенство $d > d_1 > d_2$, где d_1 и d_2 − эффективные учетные ставки при начислении процентов по ставкам $d^{(m)}$ и δ соответственно. Какой последовательности соответствуют эти расчеты?

Задание 3

Пятилетний контракт предусматривает следующую схему погашения кредита: в конце 1-го года выплачивается сумма *a*, в конце 2-го – 2*a*, в конце 3-го – 3*a*, в конце 4-го – 4*a*, в конце 5-го – 5*a*, где *a* – номер варианта. Для начисления процентов применяется переменная процентная ставка: *a*% – в течение 1-го года; (*a* + 1)% – в течение 2-го; (*a* + 2)% – в течение 3-го; (*a* + 3)% – в течение 4-го; (*a* + 4)% – в течение 5-го года. Требуется:

1) определить сумму кредита и сумму, накопленную на банковском счете погасительного фонда к концу 5-го года. Сделать проверку. Объяснить, как условия контракта обеспечивают погашение задолженности. Что собой представляет поток погасительных платежей?

2) показать механизм накопления суммы на банковском счете фонда и поведение задолженности во времени для заемщика. Для каждого размера задолженности проверить равенство $A_{t_k} = P_{t_k}$;

3) определить среднегодовую доходность этой финансовой операции для кредитора;

4) определить стоимость контракта для заемщика и для кредитора через 3,5 года (по два способа для каждого);

5) определить, за какую сумму этот контракт можно продать через 3,5 года, если при продаже контракта используется ставка *a*% годовых. Определить среднегодовую доходность финансовой операции для кредитора, если через 3,5 года контракт будет продан;

6) для финансовых операций в пунктах 3) и 5) учесть инфляцию. Ежемесячный темп инфляции 0,5%. В каждом случае рассчитать следующие показатели: среднегодовую доходность $\overline{r}$, барьерную ставку $i_б$ и сравнить ее со средней ставкой по кредиту $i_{ср}$, брутто-ставку r.

Задание 4

Четырехлетний контракт предусматривает следующую схему кредитования проекта: в конце 1-го года выплачивается сумма 4 a, в конце 2-го – 3a, в конце 3-го – a, в конце 4-го – 1/2a, где a – номер варианта. Для начисления процентов применяется переменная процентная ставка: a% – в течение 1-го года, (a + 1)% – в течение 2-го, (a + 2)% – в течение 3-го, (a + 3)% – в течение 4-го года. Требуется:

1) определить размер задолженность по кредиту в конце 4-го года;

2) определить, какая сумма необходима инвестору в начальный момент времени, чтобы он мог кредитовать проект (два способа);

3) показать, как инвестор, располагая данной суммой в начальный момент времени, может выполнить свои обязательства по кредитованию проекта.

Контрольное задание по теме «Оценка эффективности инвестиционного проекта»

1. Найти показатели эффективности *NPV, IRR, DPP, PI* двух предложенных инвестиционных проектов для каждой из указанных процентных ставок (табл. 1, 2).
2. Сделать вывод об эффективности проектов. Отметить согласованность показателей эффективности в оценке проекта.
3. Описать изменение оценки проекта при изменении процентной ставки.
4. Указать и объяснить зависимость показателей эффективности от процентной ставки. Сделать рисунок.
5. Сравнить проекты по критерию максимального *NPV* для каждой из указанных процентных ставок и по критерию максимального *IRR*. Обосновать преимущество выбранного проекта. Объяснить изменение результата сравнения проектов при изменении процентной ставки.
6. Рассчитать для проектов *MIRR* и установить приемлемость проектов по этому показателю.
7. Для одного из проектов показать процесс возмещения инвестиций для двух случаев: 1) проект финансируется за счет собственных средств инвестора; 2) проект финансируется за счет заемных средств.

Т а б л и ц а 1

Номер варианта	Сравнить проекты	Ставка i_1, %	Ставка i_2, %
1	30, 35	8,0	10,5
2	19, 37	12,5	11,5
3	27, 34	6,5	10,0
4	29, 33	7,5	9,5
5	20, 29	13,0	7,5
6	16, 18	11,0	12,0
7	1, 40	3,5	13,0
8	1, 32	3,5	9,0
9	32, 40	9,0	13,0
10	26, 39	8,0	12,5
11	17, 26	11,5	6,0
12	15, 17	10,5	11,5
13	15, 39	10,5	12,5
14	17, 39	11,5	12,5
15	15, 26	10,5	6,0
16	17, 31	11,5	8,5
17	31, 38	8,5	12,0
18	2, 38	4,0	12,0
19	2, 31	4,0	8,5
20	2, 15	4,0	10,5
21	2, 14	4,0	10,0
22	14, 25	10,0	5,5
23	13, 25	9,5	5,5
24	3, 13	4,5	9,5
25	3, 12	4,5	9,0
26	4, 11	5,0	8,5
27	11, 24	6,5	5,0
28	4, 24	7,0	5,0
29	5, 24	5,5	5,0
30	6, 23	8,0	4,5
31	28, 35	7,0	10,5
32	28, 30	9,0	8,0
33	30, 36	9,5	11,0
34	36, 37	11,0	11,5
35	19, 34	12,5	10,0
36	27, 33	6,5	9,5
37	8, 22	7,0	4,0
38	7, 22	6,5	4,0
39	9, 10	7,5	8,0
40	10, 21	8,0	3,5

Т а б л и ц а 2

Номер проекта	Денежный поток проекта							
	Год							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1	–100	–100	20	100	100	20	0	0
2	–100	–90	20	100	100	30	0	0
3	–100	–80	20	100	100	40	0	0
4	–100	–70	20	100	100	50	0	0
5	–100	–60	20	100	100	60	0	0
6	–100	–50	20	100	100	70	0	0
7	–100	–40	20	100	100	80	0	0
8	–100	–30	20	100	100	90	0	0
9	–100	–20	20	100	100	100	0	0
10	–100	–10	20	100	100	110	0	0
11	–120	–20	–20	110	110	50	30	0
12	–120	–30	–30	110	110	60	40	0
13	–120	–40	–40	110	110	70	50	0
11	–120	–20	–20	110	110	50	30	0
12	–120	–30	–30	110	110	60	40	0
13	–120	–40	–40	110	110	70	50	0
14	–120	–50	–50	110	110	80	60	0
15	–120	–60	–60	110	110	90	70	0
16	–120	–70	–70	110	110	100	80	0
17	–100	–80	–80	110	110	110	90	0
18	–100	–90	–90	110	110	120	100	0
19	–100	–100	–100	110	110	130	110	0
20	–100	–100	–100	110	110	140	120	0
21	–30	–40	–50	–10	80	80	80	80
22	–40	–50	–50	–20	90	90	80	70
23	–50	–60	–50	–30	100	100	80	60
24	–60	–70	–50	–40	110	110	80	50
25	–70	–80	–50	–50	120	120	80	40
26	–80	–90	–50	–60	130	130	80	40
27	–90	–100	–50	–70	140	140	80	40
28	–100	–110	–50	–80	150	150	100	40
29	–110	–120	–50	–90	160	160	140	40
30	–120	–130	–50	–100	170	170	160	40
31	–50	–60	–70	70	90	90	10	10
32	–50	–60	–65	65	85	85	10	10
33	–50	–60	–60	60	80	80	10	10
34	–50	–60	–55	55	75	75	20	10
35	–50	–60	–50	50	70	70	20	20
36	–50	–50	–45	45	65	65	20	20
37	–50	–40	–40	40	60	60	20	20
38	–20	–35	–35	35	55	55	20	20
39	–20	–35	–30	30	50	50	20	20
40	–20	–35	–25	25	45	45	20	20

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порядковые номера дней в году

день	янв	фев	мар	апр	май	июнь	июль	авг	сен	окт	ноя	дек
месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С.* Финансовые инвестиции с фиксированным доходом. – М. : Изд-во РЭА им. Г. В. Плеханова, 2006.
2. *Барбаумов В. Е., Попова Н. В.* Индивидуальные контрольные задания по дисциплине «Математический анализ». Построение графиков. Предел и непрерывность функции. – М. : ФГБОУ ВПО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2015.
3. *Барбаумов В. Е., Попова Н. В.*Математический анализ. N-мерное пространство. Функции. Экстремумы : учебник. – ИНФРА-М, 2016.
4. *Гитман Лоренс Дж., Джонк Майкл Д.* Основы инвестирования. – М. : Дело, 1999.
5. *Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С.* Математические методы финансового анализа : учебник. – М. : Анкил, 2006.
6. *Уланов В. А.* Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М. : Финансы и статистика, 2000.
7. *Фабоцци Фрэнк Дж.* Управление инвестициями. – М. : Инфра-М, 2000.
8. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика : учебник. – М. : Дело, 2011.
9. *Чуйко А. С., Шершнев В. Г.* Финансовая математика : учебное пособие. – М. : Инфра-М, 2013.
10. *Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В.* Инвестиции. – М. : Инфра-М, 1999.
11. http://ecsocman.edu.ru/db/msg/110004 Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. 2004 (электронный ресурс).

Учебное издание

ПОПОВА Наталья Владимировна

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА»

Учебное пособие

Редактор *Л. Г. Итберг*
Оформление обложки *К. Г. Жигалов*

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,25. Уч.-изд. л. 4,89.. Тираж 100 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».
117997, Москва, Стремянный пер., 36.

Напечатано в ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».