Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»
«Приморский институт железнодорожного транспорта –
филиал ДВГУПС в г. Уссурийске»

Л.П. Квашко

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Рекомендовано
Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2021

УДК 517.91 (075.8)
ББК В 22.161.6я73
К 32

Рецензенты:

кандидат технических наук, директор
Инженерно-технологического института
Приморской государственной
сельскохозяйственной академии, доцент
*Д.М. Журавлёв*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики,
физики, информатики и методики преподавания филиала
Дальневосточного федерального университета в г. Уссурийске
*Я.В. Делюкова*

**Квашко, Людмила Павловна**

К 32 Обыкновенные дифференциальные уравнения и способы их решения : учебное пособие / Л.П. Квашко. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2021. – 120 с.

Соответствует рабочей программе дисциплины «Математика».

Приведены примеры и методы решения основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теоретический материал в объёме, необходимом для решения контрольных заданий. Содержит задания для самостоятельной подготовки и самоконтроля, а также выполнения расчётно-графической работы.

Предназначено для студентов 1-го курса обучения по специальностям 23.05.04 «Эксплуатация железных дорог», 23.05.06 «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей», 23.05.03 «Подвижной состав железных дорог», 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов», 38.05.01 «Экономическая безопасность», направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (профиль «Промышленное и гражданское строительство»).

УДК 517.91 (075.8)
ББК В 22.161.6я73

# ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Дифференциальные уравнения» включён в состав изучения дисциплины «Математика» технических направлений подготовки специалистов высшего образования и экономических направлений – в состав дисциплины «Математический анализ». Это обусловлено тем, что дифференциальные уравнения занимают особое место не только в самой предметной области, но и в прикладных вопросах технических, естественно-научных и даже гуманитарных дисциплин. Их применяют для построения математических моделей при исследовании природных и социальных процессов и явлений, а также для рассмотрения многих вопросов смежных дисциплин.

В связи с массовым переходом системы высшего образования на дистанционные формы обучения появилась острая необходимость развития у студентов навыков самообразования. Данное пособие – это попытка методического обеспечения самостоятельного изучения студентами раздела математики «Дифференциальные уравнения» и практическая реализация принципа завершённости обучения.

Логика изложения учебного материала выстроена в соответствии с традиционно существующей практикой преподавания дифференциальных уравнений. В пособии представлен необходимый минимум теоретических вопросов и практических заданий, обеспечивающих самостоятельное освоение студентами указанного раздела. Практические задания снабжены подробным описанием решения. Пособие содержит задания для самоподготовки, вопросы для коллоквиума, список литературы, где рассматриваются дифференциальные уравнения. Справочный материал содержит сведения из элементарной и высшей математики необходимый для решения дифференциальных уравнений. Особую роль в учебном процессе играют индивидуальные задания для выполнения расчётно-графической работы, которые представлены в 30 вариантах.

В конце каждой темы даются тесты для самопроверки усвоения учебного материала на первом и втором уровнях. Тестами первого уровня с множественным выбором ответов проверяется усвоение теоретического материала. Практическое усвоение решения разных видов уравнений проверяется тестами второго уровня – «подстановки» или «типовая задача». Ко всем тестам даны ответы. Тестовый материала авторский, апробирован в группах студентов инженерных и экономических специальностей. Он может быть представлен в электронной образовательной среде университета на любой из существующих платформ.

Фактический теоретический и практический материал заимствован из литературы [1–9]. Методика изложения учебного материала апробированы в течение многих лет в студенческих аудиториях Приморского института железнодорожного транспорта – филиала Дальневосточного государственного университета путей сообщения.

В результате изучения раздела «Дифференциальные уравнения» студенты должны знать типологию уравнений и способы их решения, уметь решать указанные виды уравнений.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. Дифференциальные уравнения и их порядок

В школьном курсе математики изучаются алгебраические и трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические) уравнения. Каждое из них отличается от других по общему виду и способу решения. Их объединяет то, что *решением* этих уравнений является *число* или *множество чисел*, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное числовое равенство.

Например:

а) линейное уравнение $ax = b$ ($a$ и $b$ – действительные числа) имеет решением число $x = \frac{b}{a}$, при $a \neq 0$.

*Проверка*. Подставим полученное значение корня уравнения в само уравнение: $a \cdot \frac{b}{a} = b$ и получим верное числовое равенство;

б) логарифмическое уравнение $\log_a x = b$ имеет решением число $x = a^b$, при $x > 0, a > 0, a \neq 1$.

*Проверка*. Подставим полученное значение корня уравнения в само уравнение: $\log_a a^b = b$, применим свойства логарифма и получим верное числовое равенство;

с) тригонометрическое уравнение $\sin x = 0$ имеет решением множество чисел $x = \pi n,$ при $n \in Z$.

*Проверка*. Подставим полученное значение корня уравнения в само уравнение: $\sin \pi n = 0$ и при любом целом $n$ получим верное числовое равенство.

Уравнения, решением которых является функция или семейство функций называются ***функциональными уравнениями***. К функциональным уравнениям относятся дифференциальные уравнения.

С такого рода уравнениями мы уже сталкивались, находя первообразную по её функции и решая уравнение: $F'(x) = f(x)$.

Отличительным признаком дифференциального уравнения от другого вида уравнений является наличие в них производных и дифференциалов переменных $x$ и $y$.

***Дифференциальным уравнением (ДУ)*** называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, искомую функцию одной или нескольких переменных, её производные или дифференциалы.

Если искомая функция зависит от *одной* переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Если искомая функция зависит от *нескольких* переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

В данном пособии будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения (и по этой причине само слово «обыкновенные» будет опускаться).

В общем случае обыкновенные дифференциальные уравнения можно определить так.

Уравнение вида

$$f\ (x, y, y', y''..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***, где $f$ – некоторая функция от $x,\ y,\ y',\ y'', ...\ y^{(n)}$ переменных.

*Порядком* дифференциального уравнения называется значение $n$ старшей производной, входящей в запись уравнения.

Дифференциальное уравнение $n$-го порядка называется разрешённым относительно старшей производной (т.е. она явно выражена), если это уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} = F\ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

где $F$ – некоторая функция от $n+1$ переменной.

## 1.2. Общее и частное решения дифференциальных уравнений. Задача Коши́[1]

***Решением дифференциального уравнения*** (1.2) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке её в данное уравнение обращает его в равенство (тождество).

**Пример 1.1.** Какая функция могла быть решением уравнения $y'' + y = 0$?

Решение. Это может быть функция $y = \sin x$, потому что $y'' = (\sin x)'' =$ $= -\sin x$. Подставив полученные выражения для $y$ и $y''$ в данное уравнение, получим нуль: $(\sin x)'' + \sin x = 0,\ -\sin x + \sin x = 0$ для любых $x$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* данного дифференциального уравнения. При его интегрировании используется понятие неопределённого интеграла (прил. 2, разд. 1).

***Общим решением*** дифференциального уравнения (1.2) $n$-го порядка называется такое его решение, $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, которое является функцией переменной $x$ и $n$ произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Чтобы найти частное решение, надо знать начальные условия. Задача отыскания частного решения данного дифференциального уравнения по начальным условиям называется ***задачей Коши́***.

[1] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик, почётный член Петербургской Академии наук (1831). Один из основоположников теории дифференциальных уравнений и теории чисел.

Таким образом, чтобы решить дифференциальные уравнения надо:

1) определить вид дифференциального уравнения для того, чтобы правильно выбрать способ решения;

2) найти общее решение дифференциального уравнения;

3) если известны начальные условия, то, подставив их в общее решение, найти $C_1, C_2, ..., C_n$;

4) полученные значения $C_1, C_2, ..., C_n$ подставить в общее решение и найти частное, т.е. решить задачу Коши;

5) чтобы проверить, верно ли получена искомая функция, надо подставить её и её производные и дифференциалы в данное ДУ и получить верное равенство (тождество).

### 1.3. Некоторые приёмы решения дифференциальных уравнений

Для каждого дифференциального уравнения есть свой способ решения. Начнём изучение этих способов с некоторых приёмов, один из которых назовём применением определения дифференциала функции (прил. 2, подразд. 1.5), а другой – применением непосредственного интегрирования данного дифференциального уравнения с использованием определения и свойств неопределённого интеграла (прил. 2, разд. 1). Следующие примеры показывают, как применять эти приёмы при решении уравнений.

**Пример 1.2.** Решить уравнение $y' = 2x$ и найти одну из интегральных кривых, проходящих через точку М(2; –1).

Р е ш е н и е. По определению дифференциала функции имеем равенство

$$dy = y'\,dx \text{ или } y' = \frac{dy}{dx}. \qquad (1.3)$$

Заменим в данном уравнении $y'$ на $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = 2x.$

Умножим обе части уравнения на $dx$ и выразим $dy$: $dy = 2xdx.$

Проинтегрируем почленно обе части уравнения: $\int dy = \int 2xdx.$

Получим значения каждого интеграла: $y + C_1 = \frac{2x^2}{2} + C_2.$

В силу того, что при вычислении каждого интеграла имеем $C_1$ и $C_2$ – некоторые числа, то в итоге их можно объединить и обозначить $C$. Тогда общий интеграл или общее решение данного ДУ (семейство интегральных кривых) примет вид: $y = x^2 + C$.

Найдём частное решение. Начальными условиями являются координаты точки М(2; –1), через которую проходит одна из множества интегральных кривых $y = x^2 + C$. Подставим $x = 2$ и $y = -1$ в общее решение $y = x^2 + C$ и найдём $C$: $-1 = 2^2 + C;$ $C = -5$. Получим частное решение $y = x^2 - 5$.

Графиком этого дифференциального уравнения является множество парабол, которые получены параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на некоторую величину $C$ вдоль оси $oy$.

О т в е т: $y = x^2 + C$ – общее решение, $y = x^2 - 5$ – частное решение.

**Пример 1.3.** Решить уравнение $y'' = 2x + 3$.

Р е ш е н и е. Чтобы получить искомую функцию $y$, имея её вторую производную $y''$, надо провести обратную операцию – проинтегрировать дважды данное уравнение:

$$y' = \int (2x+3)\,dx = 2\frac{x^2}{2} + 3x + C_1 = x^2 + 3x + C_1; \tag{1.4}$$

$$y = \int (x^2 + 3x + C_1)\,dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \tag{1.5}$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Найдём частное решение по начальным условиям. Известно, что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$. Это значит, что при $x = 0$ функция $y = 1$, а её производная $y' = 2$.

Подставляя эти данные в формулы (1.4) и (1.5), получим:

$$y' = x^2 + 3x + C_1, \quad 2 = 0^2 + 3\cdot 0 + C_1, \quad C_1 = 2;$$

$$y = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \quad 1 = \frac{0^3}{3} + \frac{3}{2}0^2 + C_1 0 + C_2, \quad C_2 = 1.$$

Полученные значения $C_1$ и $C_2$ подставляем в общее решение (1.5) и приходим к результату: $y = \frac{x^3}{3} + 2x + 1$, который и будет частным решением уравнения $y'' = 2x + 3$.

О т в е т: $y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$ – общий интеграл или общее решение; $y = \frac{x^3}{3} + 2x + 1$ – частное решение данного ДУ.

**Пример 1.4.** Найти общее и частное решение ДУ: $y' - 3x^2 + 1 = 0$, если $y = 2$ при $x = -3$.

Р е ш е н и е

1. Найдём общее решение: $y' - 3x^2 + 1 = 0$; $y' = 3x^2 - 1$;

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C.$$

2. Найдём частное решение: $2 = (-3)^3 + 3 + C, \quad \mathrm{C} = 26.$

О т в е т: общее решение: $y = x^3 - x + C$; частное решение: $y = x^3 - x + 26$.

## УПРАЖНЕНИЯ № 1

**1.** Сравните следующие уравнения. Назовите, какие из них являются дифференциальными уравнениями? Объясните свой ответ.

1) $6y' = xy$; 2) $xdy - ydx = 0$; 3) $y^2 = lnx$; 4) $e^x + x^2 - y^2 = 0$;

5) $y' = 2x + y$; 6) $\sin 3x - \cos^2 x = 2y$; 7) $dy^2 = 5dx^2$.

*Замечание*. Чтобы выполнить это задание, надо ответить на вопрос: что в данных уравнениях общего и чем они отличаются друг от друга? Заметьте, что у всех перечисленных уравнений присутствуют две переменные $x$ и $y$, но у одних есть производные или дифференциалы по $x$ и/или $y$, а у других нет.

**2.** Укажите порядок следующих дифференциальных уравнений:

1) $6y' - xy = 0$; 2) $x^2y'' + 2xy = y^3$; 3) $xdy = ydx$; 4) $d^2y - 5dx^2 = 0$;

5) $y''+y^4 = x^3$; 6) $y''' + 2x - 4 = 0$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

*Замечание*. Знание порядка ДУ поможет правильно выбрать способ решения данного ДУ.

**3.** Какие из перечисленных ниже функций представляют собой решения дифференциального уравнения $y' = x$: 1) $y = x + 2$; 2) $= x^2 - 7$; 3) $y = \frac{x^2}{2} - 12$; 4) $y = \frac{x^2}{2} + 3$?

**4.** Решите уравнение первого порядка и найдите частное решение:

а) $y' = x - 2$, если $y(1) = 2$; б) $y' - 6x^2 = 5x$ при $x = -2$ и $y = 2$;

$c$) $y' + 5x^3 + 3x^2 - x = 0$, если интегральная кривая проходит через точку К(0; 3).

**5.** Решите уравнение второго и третьего порядка. Найдите частные решения при начальных условиях:

а) $y'' = x^2 + 3$, если $y(0) = -2$ и $y'(0) = -1$.

б) $y''' = x^2 + 3$, если $y = 1,\ y' = 2,\ y'' = 3$ при $x = 0$ .

**6.** Найдите частное решение ДУ $y' = cosx$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

**7.** Найдите уравнение линии, проходящей через точку М(1; 3) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен ($2x$–3).

**8.** Дано уравнение: $xy' = y - 1$. Является ли решением данного уравнения функция: $y = 3x + 1$?

**9.** Дано уравнение: $dy = (2x + 1)\ dx$. Является ли решением этого уравнения функция: $y = x^2 + x + 1$?

**10.** Дано уравнение: $ds = (3t^2 - 2)\ dt$. Является ли решением этого уравнения функция: $s = 3t^3 - 2t$?

**11.** Дано уравнение: $2yy' = 1$. Является ли решением данного уравнения функция: $y = \sqrt{x}$?

**12.** Найдите значение $a$, при котором функция $y = e^{ax} + \frac{1}{3}e^x$ является решением уравнения $y' + 2y = e^x$.

**Задания для самоконтроля**

После изучения основных понятий раздела «Дифференциальные уравнения» нужно обязательно выполнить нижеследующие тестовые задания и проверить полученные результаты в разделе «Ответы». После проверки свой результат сравнить с указанной после теста шкалой, чтобы определить, насколько усвоен изученный теоретический и практический материал. Если оценка неудовлетворительная, то учебный материал данного раздела пособия не усвоен, и продолжать дальнейшее обучение нельзя, потому что не будет хватать знаний для изучения последующего учебного материала. Надо снова изучить всё, что написано выше, и/или обратиться к другим учебникам и учебным пособиям из раздела «Библиографический список» настоящего пособия.

**Тест 1 (теория). Основные понятия и определения**

*Задание.* Ответьте на следующие вопросы теста, выбрав правильный на ваш взгляд, ответ. Среди предложенных ответов правильных может быть более одного. Ответы дайте в кодированном виде. Например: 1а, 2ав, 3вг, и т.д. При проверке решения не указанный правильный ответ или указанный неправильный ответ оценивается как ошибка.

1. Как называются уравнения, решением которых является функция?

а) линейные;

б) трансцендентные;

в) функциональные;

г) дифференциальные.

2. Что является отличительным признаком дифференциальных уравнений от других видов уравнений?

а) наличие только дифференциала функции;

б) наличие только производной функции;

в) наличие производной функции и/или её дифференциала;

г) наличие независимой переменной $x$, функции $y$ одной или нескольких переменных, её производных или дифференциалов.

3. Что может являться решением дифференциального уравнения?

а) любое действительное число;

б) функция $y$;

в) любое действительное число или функция $y$;

г) производная функции $y'$.

4. Какие дифференциальные уравнения называются обыкновенными?

а) у которых решением является любая функция;

б) у которых решением является функция одной переменной;

в) у которых решением является функция нескольких переменных;

г) у которых решением является производная функции $y'$.

5. Как проверить, является ли некоторая функция решением данного дифференциального уравнения?

а) никак нельзя этого сделать;

б) можно подставить данную функцию в уравнение и получить верное число;

в) можно подставить данную функцию и её производные в уравнение и получить тождество;

г) можно найти производную данной функции и подставить в данное уравнение.

6. Что называется порядком дифференциального уравнения?

а) число членов уравнения;

б) число, отражающее показатель степени функции $y$;

в) число, отражающее показатель степени независимой переменной $x$;

г) число, отражающее наибольший порядок производной функции $y$.

7. Как называется процесс решения дифференциального уравнения?

а) интегрированием;

б) дифференцированием;

в) логарифмированием;

г) потенцированием.

8. Что является общим решением дифференциального уравнения $n$-го порядка?

а) функция вида $y = f\left(x, C_1, ..., C_n\right)$;

б) все возможные функции $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$;

в) функция от переменной $x$ и $n$ произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$;

г) все независимые постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$.

9. Что является частным решением дифференциального уравнения $n$-го порядка?

а) решение, получаемое из общего при конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

б) решение, которое находится при определённых начальных условиях;

в) одно из общих решений;

г) некоторые из общих решений.

10. Что такое задача Коши?

а) задача нахождения общего решения ДУ;

б) задача нахождения общего и частного решения ДУ;

в) задача нахождения частного решения ДУ по начальным условиям;

г) задача по проверке начальных условий.

Всего существенных операций $p$ = 13 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 9 | 0 | «Отлично» |
| 89–80 | 8 | 1 | «Хорошо» |
| 79–70 | 7 | 2 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 6 и менее | 5 и более | «Неудовлетворительно» |

**Тест 2 (практика). Некоторые приёмы решения ДУ. Задача Коши**

*Задание.* Каждое из нижеследующих уравнений решено с пропусками. Вам предстоит по предъявленному тексту усмотреть алгоритм решения и заполнить пропуски, представив ответы в следующем виде: 1) … ; 2) … ; 3) … ; и т.д., где вместо многоточия написать нужные выражения.

**1.** Решить уравнение $4y' - x = 1$ и найти частное решение при условии $y(1) = 0$.

Решение. Выразим $y'$ из данного уравнения. Получим уравнение … (1). По определению дифференциала функции имеем равенство … (2). Заменим в данном уравнении $y'$ на … (3). Умножим обе части уравнения на $dx$ и зим $dy$ = … (4). Проинтегрируем почленно обе части уравнения и получим значения каждого интеграла: … (5), где $C_1$ и $C_2$ – некоторые числа, которые можно объединить и обозначить $C$. Тогда искомая функция … (6) будет являться общим решением данного уравнения.

Найдём частное решение при данных начальных условиях: $x$ = … (7) и $y$ = … (8). Для этого подставим значения $x$ и $y$ в общее решение и найдём $C$ =… (9). Тогда частное решение будет иметь вид: … (10).

Графиком этого дифференциального уравнения является множество … (11), которые получены параллельным переносом графика функции … (12) на некоторую величину $C$ вдоль оси $oy$.

Всего существенных операций $p$ = 12 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 12–11 | 1 | «Отлично» |
| 89–80 | 10 | 2 | «Хорошо» |
| 79–70 | 9 | 3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 6 и менее | 5 и более | «Неудовлетворительно» |

**2.** Решить уравнение $3y'' - 9x - 1 + 3e^x = 0$ и найти частное решение, если $y(0) = 8, y'(0) = 9$.

Решение. Выразим $y''$ из данного уравнения и получим уравнение вида: … (1). Чтобы получить искомую функцию $y$, имея её вторую производную $y''$, надо провести обратную операцию – проинтегрировать дважды данное уравнение. Первая производная имеет вид: … (2), а искомая функция: … (3), где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Найдём частное решение по начальным условиям, где $x = \cdots$ (4), функция $y = \cdots$ (5), а её производная $y' = \ldots$ (6). Подставляя эти данные в формулы (2) и (3), получим: $C_1 = \ldots$ (7) и $C_2 = \ldots$ (8). Полученные значения $C_1$ и $C_2$ подставляем в общее решение и приходим к результату: … (9), который и будет частным решением уравнения данного уравнения.

Всего существенных операций $p$ = 9 (раз. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 9 | 1 | «Отлично» |
| 89–80 | 8 | 2 | «Хорошо» |
| 79–70 | 7 | 3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 6 и менее | 5 и более | «Неудовлетворительно» |

**3.** Найти общее и частное решение ДУ: $y' - \sin x + \cos x - e^{2x} = 0$, если $y = -3$ при $x = 0$.

Решение. Выразим $y'$ через функцию от $x$ и получим: … (1). Проинтегрируем данное уравнение и получим функцию $y$, равную: … (2), которая будет … (3) решением данного уравнения. Найдём … (4) решение. Для этого подставим … (5) условия в … (6) решение. Получим значение С =… (7).

О т в е т: общее решение: … (8); частное решение: … (9).

Всего существенных операций $p$ = 9 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 9 | 1 | «Отлично» |
| 89–80 | 8 | 2 | «Хорошо» |
| 79–70 | 7 | 3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 6 и менее | 5 и более | «Неудовлетворительно» |

🕮 ***Рекомендуемая литература:*** [2, гл. XXII, § 1]; [3, гл. 18, § 1]; [4, гл. 29, § 29.1]; [5, гл. 12, § 12.1–12.2]; [6, гл. I, § 1], [7, гл. I].

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 2.1. Основные понятия и определения

Дадим определение ДУ первого порядка.

Уравнения вида

$$y' = f(x; y) \tag{2.1}$$

называются ***дифференциальными уравнениями первого порядка***, разрешёнными относительно производной $y'$ функции $f$ от двух переменных $x$ и $y$.

Следуя геометрическому смыслу производной, установим ***геометрический смысл уравнения*** (2.1). Если производная функции равна угловому коэффициенту касательной, проведённой в некоторой точке $x$, то верно равенство $\boldsymbol{y' = k_{\text{кас}} = tg\alpha = f(x; y)}$. Это значит, что в каждой точке плоскости с координатами $(x; y)$ можно провести касательную к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку $(x; y)$ с угловым коэффициентом $y'$. Это означает, что дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ задаёт поле направлений (множество касательных) на плоскости $XOY$.

***Полем направлений*** в области $D$ называется функция $y' = k_{\text{кас}} = f(x; y)$, ставящая в соответствие каждой точке $(x; y) \in D$ определённое направление (или касательную с угловым коэффициентом $k_{\text{кас}}$).

В точках, где поле параллельно оси $oy$, считается $k = \infty$.

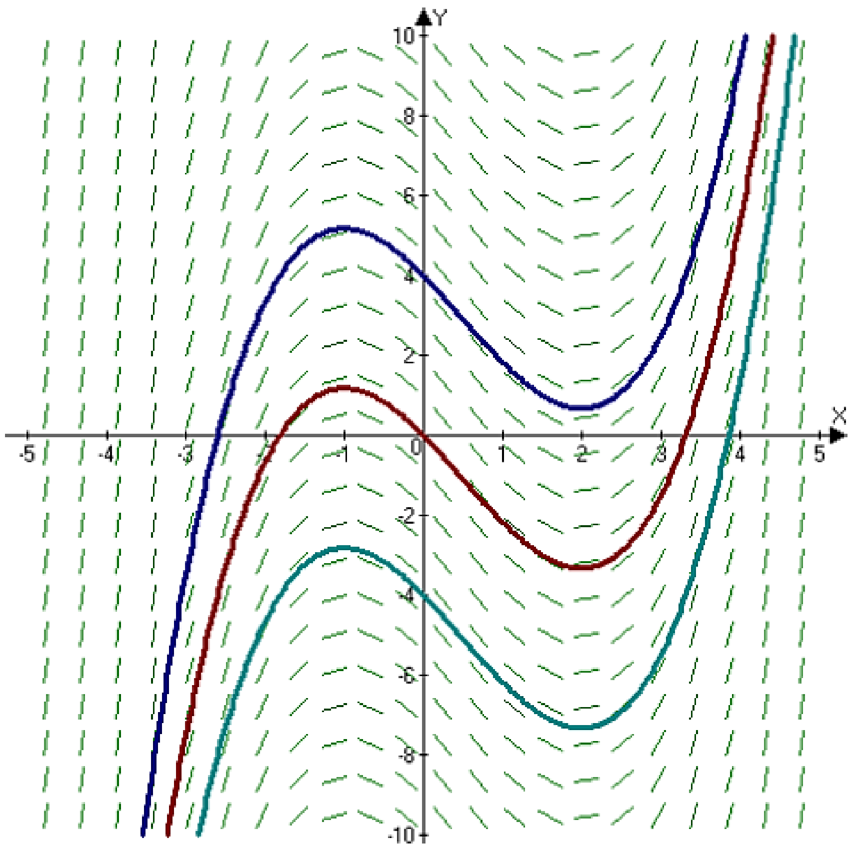


Рис. 2.1. Поле направлений в области определения функции $f(x; y)$

При построении поля направлений функции $y' = f(x; y)$ удобно пользоваться изоклинами.

***Изоклиной*** (греч. isos равный, clineo наклон) называется кривая, во всех точках которой направление поля одинаково. Изоклины поля задаются равенством $f(x; y) = \mathrm{C}$.

**Пример 2.1.** Построить поле направлений, заданное функцией $k = \frac{y}{x}$.

Р е ш е н и е. Изоклины этого поля направлений задаются равенством $C = \frac{y}{x}, y = Cx$ – это прямые, проходящие через начало координат с угловыми коэффициентами $C$. Точка (0; 0) выкалывается (рис. 2.2).

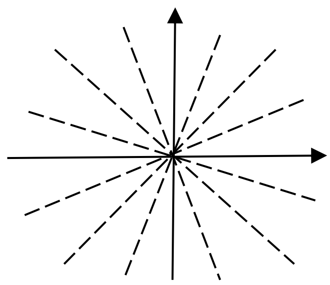

Рис. 2.2. Изоклины и поле направлений к примеру 2.1

Поле направлений $k = \frac{y}{x}, y = kx$ тоже прямые, проходящие через начало координат с угловыми коэффициентами $k$ и выколотой точкой (0; 0). Таким образом, $C = k$, поле направлений и изоклины совпадают.

**Пример 2.2.** Построить поле направлений, заданное функцией $k = -\frac{x}{y}$.

Р е ш е н и е. Изоклины этого поля направлений задаются равенством $C = -\frac{x}{y}, y = -\frac{x}{C}$ – это прямые, проходящие через начало координат с угловыми коэффициентами $k = -\frac{1}{C}$ и с выколотой точкой (0; 0) (рис. 2.3). Угловой коэффициент поля направлений $k = -\frac{x}{y} \Rightarrow y = -\frac{x}{k}$ для каждой изоклины равен $C$: $y = -\frac{x}{k} = -\frac{x}{-\frac{1}{C}} = Cx$ – это прямые с угловым коэффициентом $C$.

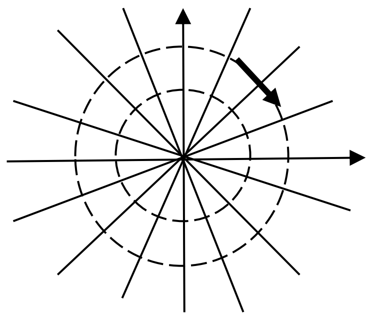

Рис. 2.3. Изоклины и поле направлений к примеру 2.2

Если угловые коэффициенты изоклины и поля направлений взаимно обратны и противоположны по знаку, то они перпендикулярны в каждой точке плоскости $XOY$, кроме точки (0; 0).

***Графиком решения*** дифференциального уравнения первого порядка является множество интегральных кривых $y = F(x)+C$ на плоскости $XOY$ (рис. 2.4).

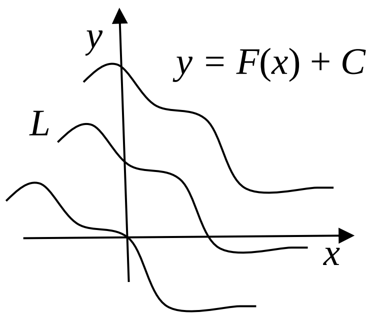


Рис. 2.4. График решения уравнения $y' = f(x; y)$

Линия $L$ называется ***интегральной кривой*** данного поля направлений, если направление касательной к ней в любой её точке совпадает с направлением поля в этой же точке.

Например, в примере 2.1 интегральными кривыми являются лучи, выходящие из начала координат; в примере 2.2 интегральными кривыми являются окружности с центром в начале координат.

Если функция $f(x;\ y)$ задана на области D и через каждую точку $(x; y)$ проходит интегральная кривая $y = y(x)$, к каждой точке которой можно построить касательную, то множество касательных задают *поле направлений* в области определения D.

***Решить уравнение*** $y' = f(x; y)$ – это значит найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.

**Теорема 2.1** (о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x; y)$).

Через каждую точку области определения функции $f(x; y)$ проходит одна и только одна интегральная кривая $y = y(x)$.

**Теорема 2.2** (о существовании и единственности задачи Коши для уравнения (2.1)).

Если в уравнении $y' = f(x;y)$ функция $f(x;y)$ и её частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку ($x_o$; $y_o$), то существует и единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_o) = y_o$. Найти одну из интегральных кривых – это значит решить задачу Коши.

Сформулировав необходимые теоремы, перейдём к рассмотрению различных видов этих уравнений.

## 2.2. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка

2.2.1. Уравнение вида $y' = f(x)$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

Дифференциальное уравнение $y' = f\left(x, y\right)$ первого порядка называется ***неполным***, если функция $f$ явно зависит, либо только от $x$, либо только от $y$.

Рассмотрим решения таких уравнений.

Если в правой части дифференциального уравнения имеем функцию, которая зависит только от $x$, а слева – производную функции $y$, то уравнение вида

$$y' = f\left(x\right) \tag{2.2}$$

называется ***неполным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Перепишем уравнение в виде $dy = f(x)\,dx$, откуда его решение будет иметь вид: $y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$.

**Пример 2.3.** Решить уравнение $y' = x^4 + \sin 2x - e^{3x} - 3tgx$.

Р е ш е н и е. Заменим производную через дифференциал, умножим обе части уравнения на $dx$, проинтегрируем обе части уравнения и получим искомую функцию $y$:

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + \sin 2x - e^{3x} - 3tgx; \quad | \cdot dx;$$
$$dy = (x^4 + \sin 2x - e^{3x} - 3tgx)\,dx;$$
$$\int dy = \int (x^4 + \sin 2x - e^{3x} - 3tgx)\,dx\,;$$

О т в е т: $y = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}e^{3x} - 3ln|\cos x| + C$ – общее решение.

2.2.2. Уравнение вида $y' = f(y)$

Если в правой части дифференциального уравнения имеем функцию, которая зависит только от $y$, а слева – производную этой же функции, то уравнение вида

$$y' = f(y) \tag{2.3}$$

называется ***неполным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Решим это уравнение в общем виде: $\frac{dy}{dx}=f(y)$; $dy=f(y)\,dx$; $dx=\frac{dy}{f(y)}$;
$\int dx=\int\frac{dy}{f(y)}$; $x=\int\frac{dy}{f(y)}=F(y)+C$.

Решение уравнения (2.3) нашлось в виде $x=x(y)$, т.е. можно считать, что ввиду инвариантности формы дифференциала, переменные $x$ и $y$ равноправны и решение уравнения можно получить через зависимость $x$ от $y$.

**Пример 2.4.** Решить уравнение $y'=2y-1$.

Решение. Заменим производную через дифференциалы $\frac{dy}{dx}=2y-1$, выразим $dx=\frac{dy}{2y-1}$ при $(2y-1)\neq 0$. Проинтегрируем это уравнение $\int dx=\int\frac{dy}{2y-1}$ и найдём каждый интеграл $x=\frac{1}{2}ln|2y-1|+C_1$. Далее можно рассуждать так: $C_1$ – некоторое число, $lnC_1$ – тоже некоторое число. Значит, можно уравнение представить так: $x=\frac{1}{2}ln|2y-1|+lnC_1$. А потом, используя свойства логарифма (прил. 3), так: $x=\frac{1}{2}ln|2y-1|C_1$ или $2x=ln(|2y-1|C_1)$. Используя определение логарифма (прил. 2, подразд. 2.1), получим равенство: $e^{2x}=C_1|2y-1|$. Раскрыв модуль, получим следующее равенство: $e^{2x}=\pm C_1(2y-1)$ или $2y-1=\frac{1}{\pm C_1}e^{2x}$. Выразив функцию $y$, получим выражение: $y=\frac{1}{\pm 2C_1}e^{2x}+\frac{1}{2}$. Полагая, что произвольная постоянная $C=\frac{1}{\pm 2C_1}$, получим искомую функцию.

Ответ: $y=Ce^{2x}+\frac{1}{2}$.

*Замечание*: полученное общее решение уравнения при $C=0$ даёт частное решение $y=\frac{1}{2}$, «потерянное» в процессе преобразований.

## УПРАЖНЕНИЯ № 2

1. Решите уравнение: 1) $y'=4+9y^2$ и найдите частное решение, если $y(1)=0$.
2. Найдите общее и частное решения уравнения $y'=y$, если $y(2)=3$.
3. Решите задачу Коши для уравнения $y'=3x^2+\sin x-\frac{7}{\sqrt{x}}+lnx$ при условии $y(1)=5$.
4. Решите уравнение: $y'=sin^3x-\sqrt{x}$ .

## 2.3. Полные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения $y' = f\left(x, y\right)$ первого порядка называются ***полными***, если функция $f$ явно зависит и от $x$, и от $y$.

Различают дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными.

### 2.3.1. Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными

Уравнение вида

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \tag{2.4}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – функции от своих переменных, называются ***уравнениями с разделёнными переменными***.

***Способ решения*** этого уравнения – его непосредственное интегрирование.

Решим уравнение (2.4) в общем виде. Перенесём одно слагаемое в правую часть, запишем интеграл от обеих частей данного уравнения, найдём первообразные для каждого интеграла и ответ представим через функцию от $x$ или $y$:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0;$$
$$f(x)dx = -g(y)dy;$$
$$\int f(x)dx = -\int g(y)dy;$$
$$F(x) + C_1 = G(y) + C_2;$$
$$C_1 + C_2 = C.$$

Общее решение уравнения (2.4):

$$G(y) = -F(x) + C \text{ или } F(x) = -G(y) + C.$$

**Пример 2.5.** Решить дифференциальное уравнение $xdx + ydy = 0$.

Р е ш е н и е. Повторим описанный выше алгоритм решения уравнения с разделёнными переменными:

$$xdx = -ydy; \quad \int xdx = -\int ydy; \ \frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{y^2}{2} + C_2;$$
$$x^2 + 2C_1 = -y^2 + 2C_2; \ x^2 + y^2 = 2\,(C_2 - C_1); \ x^2 + y^2 = C.$$

О т в е т*:* общим интегралом является множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = C$ с центром в точке (0; 0) и радиусами $\sqrt{C}$.

### 2.3.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$f\left(x\right) g\left(y\right) dx + p(x)\, q(y)\, dy = 0, \tag{2.5}$$

где $f(x),\ g(y),\ p(x),\ q(y)$ – функции от своих переменных, называются дифференциальными уравнениями первого порядка ***с разделяющимися переменными.***

Чтобы решить это уравнение, его следует сначала преобразовать к такому виду, в котором дифференциал и функция переменной $x$ окажутся в одной части равенства, а переменной $y$ вместе со своим дифференциалом – в другой, т.е. уравнение (2.5) свести к уравнению с разделёнными переменными. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства,

Решим уравнение (2.5) в общем виде. Разделим почленно уравнение на произведение «лишних» множителей каждого слагаемого $g(y)\,p(x)$, чтобы потом можно было бы их сократить и получить уравнение (2.4):

$$\frac{f(x)\cancel{g(y)}}{\cancel{g(y)}\,p(x)}dx+\frac{\cancel{p(x)}q(y)}{g(y)\cancel{p(x)}}dy=0;$$

$$\frac{f(x)}{p(x)}dx+\frac{q(y)}{g(y)}dy=0;$$

$$\varphi(x)dx+\varphi(y)dy=0,$$

пришли к уравнению с разделёнными переменными (2.4).

**Пример 2.6.** Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$.

Р е ш е н и е. Найдём «лишние» множители. В левой части, содержащей $dx$, «лишним» является корень квадратный, а для правой части уравнения, содержащей $dy$, «лишним» является множитель $x$. Следовательно, надо делить левую и правую части уравнения на произведение этих двух «лишних» множителей, т.е. на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x\neq 0$). Сократив дроби, приходим к равенству, которое выражает уравнение с разделёнными переменными: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя обе части равенства, получим $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}$. Левый интеграл табличный, а правый вычисляется методом замены переменной (прил. 2, подразд. 1.3, п. 3):

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{y^2+1}=t,\\ dt=\dfrac{2ydy}{2\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{ydy}{t}, tdt=ydy\end{matrix}\right|=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t+C_1=\sqrt{y^2+1}+C_1.$$

Тогда решение уравнения примет вид: $ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C_1$. Применим определение логарифма и свойства степени, раскроем модуль $|x|$ (прил. 2, подразд. 2.1, 2.2) и получим $x=\pm e^{C_1}\,e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x=Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C=\pm e^{C_1}$.

О т в е т: $x=Ce^{\sqrt{y^2+1}}$.

**Пример 2.7.** Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Р е ш е н и е. Найдём «лишние» множители: $dx$ имеет «лишний» множитель $(y^2-1)$, $dy$ – «лишний» множитель $(x^2+1)$. Значит, надо уравнение делить почленно на произведение этих множителей: $(x^2+1)(y^2-1)$:

$$\frac{x\cancel{(y^2-1)}dx}{(x^2+1)\cancel{(y^2-1)}}+\frac{y\cancel{(x^2+1)}dy}{(x^2+1)\cancel{(y^2-1)}}=0;$$

$$\frac{dx}{(x^2+1)}+\frac{ydy}{(y^2-1)}=0;\ \int\frac{xdx}{(x^2+1)}+\int\frac{ydy}{(y^2-1)}=0.$$

Оба интеграла табличных $\int\frac{xdx}{ax^2+b}=\frac{1}{2a}ln\left|ax^2+b\right|+C$ (прил. 2, таблица интегралов, интеграл № 23). Находим первообразные для этих интегралов:

$$\frac{1}{2}\,ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\,ln(y^2-1)=C_1+C_2.$$

Умножим обе части равенства на 2 и применим свойство логарифмов (прил. 2):

$$ln(x^2+1)(y^2-1)=2\,(C_1+C_2).$$

По определению логарифма имеем равенство

$$e^{2(C_1+C_2)}=(x^2+1)(y^2-1),$$

где $e^{2(C_1+C_2)}=C$.

О т в е т: общее решение $C=(x^2+1)(y^2-1)$.

**Пример 2.8.** Решить уравнение $y'=xy^2$.

Р е ш е н и е. Заменим $y'=\frac{dy}{dx}$. Умножим обе части уравнения на $dx$. Получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx}=xy^2\mid\cdot dx$; $dy=xy^2dx$. Найдём «лишний» множитель $y^2$ и на него разделим обе части уравнения: $\frac{dy}{y^2}=\frac{xy^2dx}{y^2}$. Сократим и получим уравнение с разделёнными переменными: $\frac{dy}{y^2}=xdx$. Найдём интеграл от обеих частей равенства: $\int\frac{dy}{y^2}=\int xdx$. Оба интеграла сводятся к табличному: $\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$. Преобразуем левый интеграл найдём первообразные для каждого интеграла: $\int y^{-2}dy=\int xdx$; $\frac{y^{-1}}{-1}+C_1=$ $=\frac{x^2}{2}+C_2$; $-\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}+C$, где $C_1+C_2=C$. Выразим из полученного равенства $y=-\frac{2}{x^2}+C$.

О т в е т: общее решение $y=-\frac{2}{x^2}+C$.

### 2.3.3. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(ax+by)$

Есть уравнения, которые сводятся к уравнению с разделяющимися переменными, если сделать правильную замену переменной. Такие уравнения имеют вид:

$$y' = f(ax+by), \tag{2.6}$$

где $a$ и $b$ – некоторые числа, и в них осуществляется следующая замена: $z = ax+by$ (или $z = ax+by+c$, где $c$ – некоторое число). Тогда производная будет иметь вид: $z' = a+by'$.

Рассмотрим пример такого уравнения.

**Пример 2.9.** Решить уравнение $(x+2y)y' = 1$.

Решение. Обозначим $z = x+2y$, найдём производную $z' = 1+2y'$ и выразим отсюда производную $y' = \frac{1}{2}(z'-1)$. Подставим новые переменные в исходное уравнение, которое приведётся к виду: $\frac{1}{2}z(z'-1) = 1$. Преобразуем полученное уравнение: $z(z'-1) = 2$; $(z'-1) = \frac{2}{z}$; $z' = \frac{2}{z}+1$; $z' = \frac{z+2}{z}$. Заменим $z' = \frac{dz}{dx}$ (по определению дифференциала функции $z$) и выразим $dx$: $\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{z}$; $\frac{z\,dz}{z+2} = dx$. Это уравнение с разделёнными переменными, которое можно почленно проинтегрировать:

$$\int dx = \int \frac{z\,dz}{z+2}; \quad x = z - 2\,ln|z+2| + C_1.$$

Правый интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\frac{z\,dz}{z+2} = \int \frac{(z+2)-2}{z+2}\,dz = \int\left(\frac{z+2}{z+2} - \frac{2}{z+2}\right)dz =$$

$$\int\left(1 - \frac{2}{z+2}\right)dz = \int dz - 2\int\frac{dz}{z+2} = z - 2ln|z+2| + C_1.$$

Вернёмся в старой переменной $x = x+2y-2\,ln|x+2y+2| + C_1$ и упростим уравнение.

Ответ: $y - ln|x+2y+2| = C$, где $C = -\frac{1}{2}C_1$.

## УПРАЖНЕНИЯ № 3

**1.** Решите уравнения с разделёнными переменными:

а) $2ydy = 3x^2dx;$ б) $2y^2dy = 3xdx;$ в) $2ydy = (1 - 3x^2)dx;$

г) $e^x dx = ydy;$ д) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$ е) $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}.$

**2.** Найдите частное решение уравнения с разделёнными переменными:

а) $dy = (x^2 - 1)\, dx,$ если $y = 4, x = 1;$

б) $ds = (3t^2 - 2)\, dt,$ если $s(1) = 0.$

**3.** Решите уравнения с разделяющимися переменными:

$a$) $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0;$ б) $1 + y' + y + xy' = 0;$ в) $y' - y - 1 = 0;$

г) $ydx - dx + xdy = 0;$ д) $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0.$

**4.** Найдите частное решение уравнения с разделяющимися переменными при данных начальных условиях.

а) $xy' - y = 0$ при $x = -4, y = 2;$

б) $y' = 2 + y,$ если $y = 3$ при $x = 0;$

в) $y' = \frac{x\sqrt{y^2+1}}{y}$, если задана точка (0;1), через которую проходит одна из интегральных кривых.

🕮 ***Рекомендуемая литература:*** [1, гл. IV, § 1, п. 1, 2]; [2, гл. XXII, § 2, 3]; [3, гл. 18, § 2, п. 2.1–2.3]; [4, гл. 29, § 29.2]; [5, гл. 12, § 12.4]; [6, гл. I, § 2, п. 2.1, 2.2], [7, гл. XIII, § 1, 2], [8, гл. 2].

### 2.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

2.4.1. Однородная функция степени $k$

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с понятием однородной функции. Рассмотрим эту функцию.

Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной функцией степени k*** (по переменным $x$ и $y$), если для произвольного числа $\alpha$ выполняется равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y), \tag{2.7}$$

т.е. однородная функция степени $k$ изменится на $\alpha^k$, если $x$ и $y$ умножить на $\alpha$.

**Пример 2.10.** Выяснить, являются ли однородными следующие функции:

*а*) $f(x, y) = x^2 - xy;$ *б*) $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{x - y};$ *в*) $f(x, y) = xy + 1.$

Решение:

а) $f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - xy) = \alpha^2 f(x, y)$ – данная функция однородная степени 2;

б) $f\left(\alpha x, \alpha y\right)=\dfrac{2\left(\alpha x\right)+3\left(\alpha y\right)}{\alpha x-\alpha y}=\dfrac{\alpha\,(2x+3y)}{\alpha\,(x-y)}=\alpha^{0} f\left(x, y\right)$ – данная функция однородная степени 0;

в) $f\left(\alpha x, \alpha y\right)=\alpha^{2}\, xy+1\neq\alpha^{k}(xy+1)$ – данная функция неоднородная.

Функция $Z=f(x, y)$ называется ***однородной функцией нулевой степени***, если для любого $\alpha\neq 0$ выполняется равенство:

$$f(\alpha x,\alpha y)=f(x, y). \tag{2.8}$$

Однородная функция нулевой степени не изменяется при умножении $x$ и $y$ на одно и то же отличное от нуля число.

**Лемма 2.1.** Если функция $f(x; y)$ – однородная нулевой степени, то её можно представить как функцию отношения своих аргументов

$$\boldsymbol{f(x;y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{2.9}$$

Если в равенстве $f(\alpha x,\alpha y)=f(x, y)$ считать $\alpha=\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, то $f(x; y)=$ $=f\left(\frac{1}{x}\,x;\ \frac{1}{x}\,y\right)=f\left(1;\ \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

2.4.2. Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка $y'=f(x; y)$ называются ***однородными***, если функция $f(x; y)$ может быть представлена в виде (2.9), тогда

$$\boldsymbol{y'=f(x;y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),} \tag{2.10}$$

где $\varphi$ – некоторая функция одной переменной $\frac{y}{x}$.

Например, уравнение $y'=\dfrac{y}{x}\cos ln\dfrac{y}{x}$ – однородное.

*Способом решения* дифференциального уравнения (2.10) является свéдение его к уравнению с разделёнными переменными.

Вводится новая переменная $z=y/x$, выражается из этого равенства $y=zx$, по правилу нахождения производной произведения двух функций $z$ и $x$ находится производная функции: $y'=z'x+z$ и подставляется в уравнение (2.10): $z'x+z=\varphi(z)$. Решим это уравнение с разделяющимися переменными. Заменим производную по определению дифференциала $z'=\dfrac{dz}{dx}$. Умножим на $dx$ обе части уравнения: $\frac{dz}{dx}x+z=\varphi(z)\,|\cdot dx$. Получим уравнение с разделяющимися переменными: $xdz=(\varphi(z)-z)\,dx$. Разделим обе части уравнения на произведение «лишних» множителей $x\ (\varphi(z)-z)$ и сократим общие множители:

$$\frac{\cancel{x}dz}{\cancel{x}(\varphi(z)-z)}=\frac{\cancel{(\varphi(z)-z)}\,dx}{x\,\cancel{(\varphi(z)-z)}};\quad \frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}. \tag{2.11}$$

Интегрируя обе части уравнения (2.11) и считая, что $\varphi(z)$ – это одна из первообразных функции $\frac{1}{\varphi(z)-z}$, будем иметь общее решение уравнения (2.10):

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\int\frac{dx}{x};\quad \Phi\left(\frac{y}{x}\right)=ln|x|+C.$$

**Пример 2.11.** Решить уравнение $y'=\frac{x+2y}{x}$.

Решение. Проверим, является ли данное уравнение однородным. Для этого представим его в виде (2.10): $\frac{x+2y}{x}=1+2y/x=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Получили функцию, зависящую от $\frac{y}{x}$. Пусть $z=y/x$, тогда $y=zx,\ \ y'=z'x+z$. Подставим полученное выражение в данное уравнение: $y'=1+2y/x$ и $z'x+z=1+2z.$ Упростим полученное выражение: $z'x=1+z.$ Заменим $z'=\frac{dz}{dx}$ и умножим на $dx$ обе части уравнения: $\frac{dz}{dx}x=1+z\ \ |\cdot dx;\ \ xdz=(1+z)dx$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на произведение «лишних» множителей $x\ (1+z)$, сокращаем общие множители и получаем уравнение с разделёнными переменными: $\frac{\cancel{x}dz}{\cancel{x}(1+z)}=\frac{\cancel{(1+z)}\,dx}{x\,\cancel{(1+z)}};\ \frac{dz}{1+z}=\frac{dx}{x}$.

Можно поступить иначе. Выше было получено $1+2y/x=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. После замены $z=y/x$ это выражение имеет вид: $1+2z=\varphi(z)$. Подставим в формулу (2.11) полученное выражение: $\frac{dz}{\varphi\,(z)-z}=\frac{dx}{x};\ \frac{dz}{1+2z-z}=\frac{dx}{x}$ или $\frac{dz}{1+z}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя почленно это равенство $\int\frac{dz}{1+z}=\int\frac{dx}{x}$, получаем выражение:

$ln|1+z| = ln|x| + C_1$. Пусть $C_1 = ln\, C_2$. Тогда, применяя свойства суммы логарифмов, получим равенство: $ln|1+z| = ln|x| + ln\, C_2$; $ln|1+z| = ln(|x| C_2)$, потенцируя которое, получаем уравнение $|1+z| = C_2|x|$. Раскрыв модуль и считая, что $C = \pm C_2$, получим уравнение $1+z = Cx$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1+\frac{y}{x} = Cx$, откуда $y = (Cx-1)\,x$.

О т в е т: $y = (Cx-1)\,x$.

## УПРАЖНЕНИЯ № 4

**1.** Решить однородное ДУ первого порядка:
а) $(x+2y)dx - xdy = 0$; б) $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$.
**2.** Найти общее решение однородного ДУ первого порядка:
а) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$; б) $(x+2y)dx + xdy = 0$.
**3.** Найти общее и частное решения однородного ДУ первого порядка:
а) $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0$ при условии $f(1) = 0$;
б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ при условии $y(1) = 2$.

🕮 ***Рекомендуемая литература:*** [1, гл. IV, § 1, п. 1, 2]; [2, гл. XXII, § 2, 3]; [3, гл. 18, § 2, п. 2.1, 2.3]; [4, гл. 29, § 29.2]; [5, гл. 12, § 12.4]; [6, гл. I, § 2, п. 2.1, 2.2]; [7, гл. 2]; [8, гл. 15, § 1].

## 2.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

### 2.5.1. Однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка называются ***линейными неоднородными***, если они имеют вид

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{2.12}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые (непрерывные) функции переменной $x$, а $y$ и её производная $y'$ входит в это уравнение линейно, т.е. в первой степени.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (2.12) приобретает вид:

$$y' + f(x)y = 0, \tag{2.13}$$

тогда оно называется ***однородным*** уравнением.

Однородные линейные ДУ первого порядка вида (2.13) относятся к уравнениям с *разделяющимися переменными* и могут сразу решаться разделением переменных и интегрированием уравнения (п. 2.4.1 настоящего пособия).

Приведём уравнение вида (2.13) к уравнению с разделяющимися переменными вида (2.5). Заменим производную функции $y$ через дифференциалы $dx$ и $dy$, обе части равенства умножим на $dx$ и разделим на $y$. Получим уравнение с разделёнными переменными, которое почленно интегрируется. Выразим $y$, используя определение логарифма: $y' + f(x)y = 0$; $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \,|\cdot dx$; $dy + f(x)ydx = 0 \,|: y$; $\frac{dy}{y} + \frac{f(x)ydx}{y} = 0$ или $\frac{dy}{y} = -f(x)dx$; $\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$; $lny = -F(x) + C_1$; $y = e^{-F(x)+C_1}$ или $y = e^{-F(x)}\, e^{C_1}$. Если считать, что $e^{C_1} = C$, то общее решение уравнения (2.12) будет иметь вид:

$$y = Ce^{-F(x)}. \tag{2.14}$$

Тогда при решении уравнения (2.13) можно пользоваться формулой (2.14), помня о том, что $F(x)$ – это первообразная функции $f(x)$, а можно каждый раз проводить те же самые рассуждения.

**Пример 2.12.** Решите однородное линейное ДУ первого порядка $y' = y\sin x$.

Р е ш е н и е. Зная о том, что это уравнение с разделяющимися переменными, можно его решать, придерживаясь алгоритма из п. 2.3.2 настоящего пособия. Но можно воспользоваться формулой (2.14). Для этого надо данное уравнение привести к виду (2.13) и установить выражение для функции $f(x)$. Если перенести слагаемые из правой части уравнения в левую, то получим уравнение вида (2.13): $y' - y\sin x = 0$, $y' - y\sin x = 0$, где $f(x) = \sin x$, для которой $F(x) = -\cos x$. Тогда общим решением данного уравнения будет функция вида (2.14).

О т в е т: $y = Ce^{-\cos x}$.

**Пример 2.13.** Решить уравнение $xy' - 2y = 0$, используя формулу (2.14).

Р е ш е н и е. Данное уравнение приведём к виду (2.13) и установим выражение для функции $f(x)$. Для этого разделим обе части равенства на $x$ и получим уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$, где $f(x) = -\frac{2}{x}$, для которой $F(x) = -2lnx = -lnx^2$. Подставим первообразную для функции $f(x)$ в формулу (2.14) и получим выражение для искомой функции: $y = Ce^{lnx^2} = Cx^2$ (прил. 2, подразд. 2.1).

О т в е т: $y = Cx^2$.

### 2.5.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли

Неоднородные линейные ДУ первого порядка вида (2.12) решаются специальным методом, который называется *метод Бернулли* (или *метод вариации переменных*).

**Алгоритм применения метода Бернулли**

Применяя метод Бернулли, необходимо произвести строго определенные действия.

1. Привести данное уравнение к виду (2.12): $y' + f(x)y = g(x)$, и убедиться, что оно является линейным неоднородным ДУ первого порядка.

2. Используя подстановку $\boldsymbol{y = u \cdot v}$, где $u = u(x), v = v(x)$ функции переменной $x$, найти $\boldsymbol{y' = u'v + uv'}$ и подставить в данное уравнение вместо $y$ и $y'$:

$$(u'v + uv') + f(x) \cdot uv = g(x).$$

3. В левой части сгруппировать члены полученного уравнения так, чтобы можно было вынести общий множитель $u$ (или $v$):

$$u'v + (uv' + f(x) \cdot uv) = g(x);$$
$$u'v + u\,(v' + f(x) \cdot v) = g(x). \qquad (2.15)$$

4. Найти частное решение соответствующего линейного однородного уравнения, приравняв выражение в скобках к нулю и решив его относительно $v$ (или $u$):

$$v' + f(x) \cdot v = 0 \to v.$$

Это уравнение вида (2.13), и оно решается как уравнение с разделяющимися переменными.

5. Найденную функцию $v$ (или $u$) подставить в оставшуюся часть уравнения (2.15) и решить его относительно переменной $u$ (или $v$):

$$u'v = g(x) \longrightarrow u.$$

6. Записать общее решение уравнения (2.12), подставив полученные выражения функций $u$ и $v$ в равенство $y = u \cdot v$.

7. Если заданы начальные условия, то найти частное решение. Для этого подставить начальные условия в общее решение, найти $C$ и записать полученное частное решение.

**Пример 2.14.** Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение

1. Приведём данное уравнение к виду (2.12), разделив левую и правую часть на $x$. Приходим к уравнению $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$, где $f(x) = -\frac{2}{x}$ и $g(x) = 2x^3$.

Введём новые переменные $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим выражения для $y$ и $y'$ в данное уравнение, которое примет вид:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3.$$

2. Сгруппируем второе и третье слагаемое, чтобы вынести за скобку общий множитель $u$:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=2x^3. \tag{2.16}$$

3. Найдём частное решение соответствующего однородного уравнения. Для этого выражение в скобках приравняем к нулю и решим уравнение вида (2.13), которое относится к уравнению (2.5): $v'-\frac{2}{x}v=0$ или $\frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v$. Разделяем переменные и получаем уравнение с разделёнными переменными, проинтегрировав которое найдем частное решение этого уравнения при $C=0$:

$$\frac{dv}{v}=2\,\frac{dx}{x};\quad \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x};\quad ln|v|=2ln|x|;\quad v=x^2.$$

4. Подставим полученное выражение $v=x^2$ в оставшуюся часть равенства (2.16): $u'\,x^2=2\,x^3$ или $\frac{du}{dx}=2x$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u=x^2+C$.

5. Подставим найденные значения $u$ и $v$ в равенство $y=u\cdot v$, тогда окончательно имеем $y=uv=(x^2+C)\,x^2=x^4+Cx^2$.

О т в е т: $y=x^4+Cx^2$.

### 2.5.3. Уравнения Бернулли

Уравнения Бернулли являются нелинейными ДУ уравнениями, но они, после некоторых преобразований, приводятся к линейным.

Уравнения вида

$$y'+f(x)\cdot y=g(x)\cdot y^n, \tag{2.17}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на своей области определения функции; $n$ – показатель степени функции $y$, называются ***уравнениями Бернулли.***

1. Если $n$ = 0, то уравнение (2.17) становится уравнением вида (2.12), линейным неоднородным уравнением.

2. Если $n$ = 1, то уравнение (2.17) становится уравнением вида (2.13), линейным однородным уравнением.

3. Если $n\neq 0,\ n\neq 1$, то уравнение (2.17) решается специальной подстановкой.

Уравнения Бернулли решаются способом подстановки.

Введём новую функцию $z=y^{1-n}$, тогда её производная $z'=(1-n)\,\frac{y'}{y^n}$, т.к. $z'=(y^{1-n})'=(1-n)\,y^{1-n-1}\cdot y'=(1-n)y^{-n}\cdot y'=(1-n)\,\frac{y'}{y^n}$.

Преобразуем уравнение (2.17). Разделим обе части равенства на $y^n$ и умножим на $(1-n)$, чтобы получить $(1-n)\frac{y'}{y^n}$ и сделать замену:

$$y' + f(x)\, y = g(x)\, y^n \quad |{:}y^n;$$

$$\frac{y\,'}{y^n} + \frac{f(x)\, y}{y^n} = \frac{g(x)\, y^n}{y^n};$$

$$\frac{y\,'}{y^n} + f\,(x)\, y^{1-n} = g\,(x) \qquad |{\cdot}(1-n);$$

$$(1-n)\frac{y\,'}{y^n} + (1-n)\, f\,(x)\, y^{1-n} = g\,(x)(1-n);$$

$$z' + (1-n)\, f(x)\, z = g(x)\,(1-n). \tag{2.18}$$

Пусть $(1-n)f(x) = f_1(x)$ и $(1-n)g(x) = g_1(x)$, то уравнение (2.18) примет вид (1): $z' + f_1(x)\cdot z = g_1(x)$ – линейное неоднородное уравнение первого порядка, которое решается методом Бернулли.

**Пример 2.15.** Решить уравнение Бернулли $y' + xy = xy^3$.

Решение

1. В данном уравнении $n = 3$.

2. Преобразуем данное уравнение. Для этого разделим его на $y^3$ и умножим на $1-3 = (-2)$:

$$y' + xy = xy^3 \ \ |{:}\, y^3; \quad \frac{y\prime}{y^3} + \frac{xy}{y^3} = \frac{xy^3}{y^3} \ \ |\cdot(-2); \quad \frac{-2y\prime}{y^3} - 2xy^{-2} = -2x. \tag{2.19}$$

3. Выполним подстановку:

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2};$$

$$z' = (1-n)\frac{y'}{y^n} = (1-3)\frac{y'}{y^3} = \frac{-2y'}{y^3}.$$

Уравнение (2.19) преобразится:

$$z' - 2xz = -2x \tag{2.20}$$

и станет линейным уравнением первого порядка, которое решается методом Бернулли.

4. Выполним замену в уравнении (2.20):

$$z = uv,\ z' = u'v + uv'; \qquad u'v + uv' - 2xuv = -2x;$$

$$u'v + u(v' - 2xv) = -2x. \tag{2.21}$$

Решим это уравнение.

| Найдём частное решение соответствующего линейного однородного уравнения | Решим оставшуюся часть уравнения (2.21) | Найдём общее решение уравнения (2.21) и данного уравнения |
|---|---|---|
| $v' - 2xv = 0$<br>$\frac{dv}{dx} = 2xv \quad \vert\cdot dx$<br>$dv = 2xvdx \quad \vert : v$<br>$\int \frac{dv}{v} = 2\int xdx$<br>$ln\vert v\vert = x^2 + C, C = 0$<br>$ln\vert v\vert = x^2$<br>$e^{x^2} = v$ | $u'v = -2x$<br>$u'e^{x^2} = -2x$<br>$u' = \frac{-2x}{e^{x^2}}$<br>$u = \int \frac{-2xdx}{e^{x^2}}$<br>Интеграл находится методом подстановки (см. ниже)<br>$u = e^{-x^2} + C$ | $z = uv$<br>$z = e^{x^2}\left(e^{-x^2} + C\right)$<br>$z = e^{x^2} \cdot e^{-x^2} + Ce^{x^2}$<br>$z = 1 + Ce^{x^2}$<br>Решая систему уравнений, найдём искомую функцию:<br>$\begin{cases} z = 1 + Ce^{x^2} \\ z = y^{-2} \end{cases} \Rightarrow$<br>$y^{-2} = 1 + Ce^{x^2}$<br>$\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{x^2}$<br>$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}$ |

$$\int \frac{-2xdx}{e^{x^2}} = \left| \begin{matrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{-x^2} + C.$$

О т в е т: $y = \frac{1}{\sqrt{1+Ce^{x^2}}}$ – общее решение данного уравнения.

## УПРАЖНЕНИЯ № 5

**1.** Какие уравнения являются линейными (однородными или неоднородными) дифференциальными уравнениями первого порядка:

1) $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; 2) $y'' + 2xy = 0$; 3) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$;

4) $y' + \frac{y}{x} = 3ylnx$; 5) $3y' - x = \frac{2y}{x}$; 6) $y' + y = e^{-x}$.

**2.** Решите однородные линейные ДУ первого порядка:

а) $yy' + x = 1$; в) $y' = 8y$;

б) $2y' - ytgx = 0$; г) $7y^4 - y^2y' = 0$.

**3.** Решите неоднородные линейные ДУ первого порядка, и найдите частное решение там, где указаны начальные условия:

а) $y'cosx + ysinx = 1$; в) $y' + ytgx = cos^2x$, если $y(\pi) = 3$;

б) $b$) $y' + \frac{3}{x}y = x$; г) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$, если $y(1) = e$.

**4.** Решите уравнения Бернулли и найдите частное решение там, где указаны начальные условия:

а) $y' + y = xy^3$; б) $y'x + y = -xy^2$; в) $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$, если $y(0) = 5$.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

После изучения дифференциальных уравнений первого порядка (разд. 2 данного пособия) нужно обязательно выполнить нижеследующие тестовые задания и проверить полученные результаты в разд. «Ответы». После проверки свой результат сравните с указанной после теста шкалой, чтобы определить, насколько усвоен изученный теоретический и практический материал. Если оценка неудовлетворительная, то учебный материал данного раздела пособия не усвоен, и продолжать дальнейшее обучение нельзя, потому что не будет хватать знаний для изучения последующего учебного материала. Надо снова изучить всё, что написано выше, и/или обратиться к другим учебникам и учебным пособиям из разд. «Библиографический список» настоящего пособия.

### Тест 3 (теория). ДУ первого порядка

*Задание.* Ответьте на следующие вопросы теста, выбрав правильный, на ваш взгляд, ответ. Среди предложенных ответов правильных может быть более одного. Ответы дайте в кодированном виде. Например: 1а, 2аг, 3вг, и т.д. При проверке решения не указанный правильный ответ или указанный неправильный ответ оценивается как ошибка.

1. Определите по внешнему виду, какие из нижеприведённых уравнений являются ДУ первого порядка?

а) $y'' = -x + y$; в) $xy^3dx + dy = 0$;

б) $y' + 3x^2y - 5 = 0$; г) $(x + y)dx^2 + xd^2y = 0$.

2. В чём геометрический смысл уравнения первого порядка?

а) в геометрическом смысле производной функции;

б) в угловом коэффициенте касательной;

в) это множество касательных к какой-то интегральной кривой;

г) это множество касательных к интегральным кривым на плоскости XOY с угловым коэффициентом $y'$, которые задают поле направлений.

3. Что такое поле направлений?

а) функция от $x$ и $y$, которая равна разным значениям угловых коэффициентов касательных, проведённых во всех точках плоскости ХОУ ко всем интегральным кривым;

б) множество векторов, проведённых в каждой точке касания интегральной кривой;

в) кривая, которая задаёт определённое направление движения точки на плоскости;

г) отрезки, которые расположены определённым образом.

4. Что такое изоклины?

а) множество одинаково наклонённых касательных к интегральной кривой;

б) отрезки прямых с равными наклонами;

в) линия, во всех точках которой направление поля одинаково;

г) кривая, в каждой точке которой касательные одинаково наклонены.

5. Каким равенством задаются изоклины?

а) $y = Cx$; в) $y' = f(x; y)$;

б) $f(x; y) = C$; г) $y' = k_{\text{кас}} = tg\alpha = f(x; y)$.

6. Чем является график решения ДУ первого порядка?

а) множеством интегральных кривых, которые отличаются друг от друга на постоянную величину С;

б) линией, для которой направление касательных в любой её точке совпадает с направлением поля в этой же точке;

в) множество точек плоскости, удовлетворяющих данному уравнению;

г) прямая или парабола, расположенная определённым образом.

7. Что значит решить ДУ первого порядка?

а) надо найти семейство функций, которые при подстановке их в данное уравнение обращают его в верное равенство (тождество);

б) получить ответ и он должен быть правильным;

в) надо найти множество кривых, отвечающих заданному полю направлений;

г) вычислить какую-нибудь функцию.

8. Сколько интегральных кривых может проходить через каждую точку плоскости ХОУ?

а) несколько; б) только одна; в) ни одной; г) множество.

9. Сколько существует решений ДУ первого порядка, удовлетворяющего начальному условию $(x_o) = y_o$?

а) множество; б) несколько; в) только одна; г) ни одной.

10. Что называют начальными условиями?

а) данное уравнение;

б) найденную функцию;

в) точку с известными координатами;

г) точку с неизвестными координатами.

Всего существенных операций $p$ = 13 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 13–12 | 0–1 | «Отлично» |
| 89–80 | 11–10 | 2–3 | «Хорошо» |
| 79–70 | 9 | 4 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 7 и менее | 5 и более | «Неудовлетворительно» |

**Тест 4 (практика). ДУ первого порядка**

*Задание.* Каждое из нижеследующих уравнений решено с пропусками. Вам предстоит по предъявленному тексту увидеть алгоритм решения и заполнить пропуски, представив ответы в следующем виде: 1) …; 2) …; 3) …; и т.д., где вместо многоточия надо написать нужные выражения.

**1.** Решить уравнение $\frac{dy}{dx} + 3cos5x - 2\sqrt{x} + e^{-x} = 0.$

Р е ш е н и е. Это уравнение является неполным ДУ первого порядка вида $y' = f(x)$. Здесь производная представлена через дифференциалы переменной $x$ и $y$, поэтому умножим обе части уравнения на …(1) и … (2) и получим искомую функцию $y$. Выполним действия:

$$\frac{dy}{dx} + 3cos5x - 2\sqrt{x} + e^{-x} = 0; \quad | \cdot ...(3);$$

$$dy = -3cos5xdx + 2\sqrt{x}\,dx - e^{-x}dx;$$

$$\int dy = \cdots(4)\int cos5xdx + 2\int ...(5)\,dx - \int ...(6)dx.$$

О т в е т: $...(7) = \cdots(8) + \cdots(9) - \cdots(10)$ – общее решение.

Всего правильно выполненных существенных операций $p$ = 10 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 10 | 0 | «Отлично» |
| 89–80 | 9 | 1 | «Хорошо» |
| 79–70 | 8–7 | 2–3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 10 и более | 4 и более | «Неудовлетворительно» |

**2.** Решить уравнение $y' - y^2 - 9 = 0.$

Р е ш е н и е. Это неполное ДУ первого порядка вида $y' = f(y)$. Для решения этого уравнения заменим производную $y'$ через дифференциалы … (1), выразим $dx = ...(2)$, при … (3) не равном нулю. Проинтегрируем это уравнение и получим: … (4). Найдём каждый интеграл (прил. 2, подразд. 1.4), и получим выражение: $...(5) = \frac{1}{...(6)}...(7)\frac{x}{...(8)}...(9)$, которое и будет искомой функцией, выраженной явно через … (10).

Всего существенных операций $p$ = 10 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 10 | 0 | «Отлично» |
| 89–80 | 9 | 1 | «Хорошо» |
| 79–70 | 8–7 | 2–3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 10 и более | 4 и более | «Неудовлетворительно» |

**3.** Решить уравнение $(x+1)dx + (1-y)dy = 0$.

Р е ш е н и е. Это ДУ первого порядка с разделёнными переменными. Для решения этого уравнения перенесём выражение с $y$ в правую часть уравнения: $\ldots(1)dx = \cdots(2)dy$. Возьмём интеграл от обеих частей равенства и получим выражение: $\ldots(3) + \cdots(4) + \cdots(5) = \cdots(6) + \cdots(7) + \cdots(8)$. Если считать, что $C_1 + C_2 = \cdots(9)$, то общее решение будет иметь вид: … (10).

Всего существенных операций $p$ = 10 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 10 | 0 | «Отлично» |
| 89–80 | 9 | 1 | «Хорошо» |
| 79–70 | 8–7 | 2–3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 10 и более | 4 и более | «Неудовлетворительно» |

**4.** Решить уравнение $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

Решение. Это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Для решения этого уравнения разнесём слагаемые в разные части уравнения. Найдём «лишние» множители: при $dx$ – это … (1) и при $dy$ – это …(2). Тогда разделим каждое слагаемое на произведение этих множителей, сократим и получим уравнение: $\ldots(3)dx = \cdots(4)dy$.

Оба интеграла табличных (прил. 2, таблица интегралов подразд. 1.4, интеграл № 5). Находим первообразные для этих интегралов:

$$\ldots(6) + \mathrm{C}_1 = \cdots(7) + \mathrm{C}_2.$$

Если считать, что $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = \cdots(8)$, то общим решением данного уравнения будет функция: $\ldots(9) - \cdots(10) = \mathrm{C}$.

Всего существенных операций $p$ = 10 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 10 | 0 | «Отлично» |
| 89–80 | 9 | 1 | «Хорошо» |
| 79–70 | 8–7 | 2–3 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 10 и более | 4 и более | «Неудовлетворительно» |

**5.** Решить уравнение $(x^2 - 2y^2)\,dx + 2xydy = 0$.

Решение. Проверим, является ли данное уравнение однородным. Для этого представим его в виде: $y' = f(x; y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Разнесём слагаемые по обе части равенства, разделим их на $dx$ и выразим производную функции $y$. Выполним эти действия:

$$(x^2 - 2y^2) = -2xy\ldots(1);$$

$$(x^2 - 2y^2) = -2xy \ldots (2);$$
$$y' = \cdots (3).$$

Разделим почленно дробь, сократим и получим выражение для производной функции $y$:

$$y' = \frac{x^2}{-2xy} + \frac{2y^2}{2xy};$$
$$y' = -\cdots(4) + \cdots(5) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Если после преобразований была получена функция от дроби $\frac{y}{x}$, значит, это уравнение является однородным ДУ первого порядка и его надо решать заменой: … (6), а $\frac{x}{y} = \frac{1}{z}$, тогда $y = \cdots(7)$, $y' = \cdots(8)$. Подставим полученное выражение в данное уравнение: $\ldots(9) = -\cdots(10) + z$ и после упрощения получаем: … (11) = $= -\frac{1}{2z}$. Заменим $z' = \cdots(12)$ и решим пропорцию: $\frac{xdz}{dx} = \frac{1}{-2z}$. Получим: $-2xzdz = dx$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на «лишний» множитель … (12), сокращаем общий множитель в левой части равенства и получаем уравнение с разделёнными переменными: $\frac{-2xzdz}{x} = \frac{dx}{x}$; $\ldots(13) = \frac{dx}{x}$, которое интегрируем и получаем уравнение: $-2\int \ldots(14)dz = \int \ldots(15)$; $-2\frac{z^2}{2} = \cdots(16) + C$; $-z^2 = ln|x| + \cdots(17)$; $z^2 =$ $= \cdots(18)$. Выполним обратную замену переменной, проведём преобразования и получим выражение: $-(\ldots(19))^2 = ln|Cx|$; $-\cdots(20) = ln|Cx|$; $y^2 = \cdots(21)$; $y = \cdots(22)$.

Всего существенных операций $p$ = 22 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 22–20 | 0–2 | «Отлично» |
| 89–80 | 19–18 | 3–4 | «Хорошо» |
| 79–70 | 17–16 | 5–6 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 15 и более | 7 и более | «Неудовлетворительно» |

**6.** Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение

Данное уравнение имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)$ и является неоднородными линейными ДУ первого порядка, которое решается методом Бернулли.

Введём новые переменные $y = \ldots(1)$, тогда производная от этой функции будет: $y' = \ldots(2)$. Подставим выражения для $y$ и $y'$ в данное уравнение, которое примет вид: … (3) $+ \cdots(4) + \frac{1}{x}\ldots(5) = \frac{\sin x}{x}$.

Сгруппируем второе и третье слагаемое, чтобы вынести за скобку общий множитель $u$: $u'v + (\ldots(6)) = \frac{\sin x}{x}$; $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{\sin x}{x}$; (*).

Найдём частное решение данного уравнения. Для этого выражение в скобках приравняем к нулю и решим уравнение вида (2.13), которое относится к уравнению (2.5). Разделяем переменные и получаем уравнение с … (7) переменными, проинтегрировав которое найдем частное решение этого уравнения при $C = 0$. Выполним указанные действия:

$$\ldots(8) = 0;\ \ldots(9) = -\frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = -\cdots(10);\ \int \ldots(11) = -\int \frac{dx}{x};$$
$$ln|v| = -\cdots(12);\ \ldots(13) = ln|x|^{-1};\ v = \cdots(14).$$

Подставим полученное выражение для $v$ в оставшуюся часть равенства (*): $\ldots(15) = \frac{\sin x}{x}$; $\frac{u'}{x} = \frac{\sin x}{x}$. Заметим, что дроби равны, знаменатели равны, значит и числители будут равны. Следовательно, $u' = \cdots(16)$. Интегрируя это уравнение, получим выражение для функции $u$:

$$u = \int \ldots(17)dx = \ldots(18)$$

Подставим найденные значения $u$ и $v$ в равенство $y = \cdots(19)$, тогда окончательно имеем $y = uv = \cdots(20)$.

Всего существенных операций $p$ = 20 (разд. «Ответы»). Шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 20–18 | 0–2 | «Отлично» |
| 89–80 | 17–16 | 3–4 | «Хорошо» |
| 79–70 | 15–14 | 5–6 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 13 и более | 7 и более | «Неудовлетворительно» |

📖 ***Рекомендуемая литература:*** [1, гл. IV, § 1, п. 3–7]; [2, гл. XXII, § 4, 5]; [3, гл. 18, § 2, п. 2.4, 2.5]; [4, гл. 29, § 29.2]; [5, гл. 12, § 12.5, 12.6]; [6, гл. I, § 2, п. 2.3, 2.4]; [7, Гл. XIII, § 7, 8]; [7, Гл. XIII, § 3–6]; [8, гл. 2]; [9, гл. 15, § 1].

# 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

## 3.1. Общие сведения

***Дифференциальными уравнениями второго порядка*** называются уравнения вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.1}$$

где $x$ – независимая переменная; $y$ – искомая функция; $y'$ и $y''$ – первая и вторая производные искомой функции.

Если в уравнении (3.1) выразить $y''$, то уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.2}$$

называется ***дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка.***

ДУ (3.2) имеет бесконечное множество решений, которые можно задать формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$. Эта совокупность решений называется ***общим решением*** уравнения (3.2).

***Частным решением*** уравнения (3.2) является одна из интегральных кривых, которая находится при помощи задания начальных условий: значения функции $y_o$ и значения её производной $y_o'$ при фиксированном значении $x_o$, т.е. $y(x_o) = y_o$ и $y'(x_o) = y_o'$. Таким образом, под начальными условиями понимается задание точки с координатами $(x_o; y_o)$ и касательной с угловым коэффициентом $k = y'(x_o)$ в данной точке.

В силу того, что общее решение уравнения второго порядка (3.2) зависит от двух произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, то через данную точку проходит бесчисленное множество интегральных кривых, и лишь одна из них имеет данный угловой коэффициент.

**Теорема 3.1** (о существовании и единственности решения уравнения (3.2)).

Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений $x_o$, $y_o, y_o'$, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет решение $y = y(x)$, такое, что $y(x_o) = y_o$ и $y'(x_o) = y_o'$.

Задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют ***задачей Коши***.

Существуют частные случаи уравнений второго порядка (3.2).

## 3.2. Уравнения вида $y'' = f(x)$

Если вторая производная искомой функции $y$ явно выражена через функцию одной переменной $f(x)$, то дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x). \tag{3.3}$$

*Способ решения* такого уравнения сводится к двукратному интегрированию данного уравнения, которое уже разбиралось в подразд. 1.3 настоящего пособия.

*Замечание.* При каждом интегрировании появляются независимые друг от друга константы $C_1$ и $C_2$.

**Пример 3.1.** Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = \frac{1}{x} + e^{2x} - \sqrt{x}$ и решить задачу Коши при условии $y(1) = -2$, $y'(1) = 3$.

Решение. Проинтегрируем данное уравнение дважды, найдя прежде $y'$, а потом $y$.

$$y' = \int \left(\frac{1}{x} + e^{2x} - \sqrt{x}\right) dx = ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C_1; \tag{3.4}$$

$$y = \int \left(ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C_1\right) dx =$$

$$= x(lnx - 1) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C_1 x + C_2. \tag{3.5}$$

Решим задачу Коши. Для этого в (3.4) и (3.5) подставим данные начальные условия.

Если

$$y'(1) = 3, \text{ то } 3 = ln|1| + \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} + C_1;$$

$$3 = 0 + \frac{e^2}{2} - \frac{2}{3} + C_1; \; C_1 = -\frac{e^2}{2} + \frac{11}{3}. \tag{3.6}$$

Если

$$y(1) = -2, \text{ то } -2 = 1(ln1 - 1) + \frac{1}{4}e^{2\cdot 1} - \frac{2\sqrt{1^5}}{5} + \left(-\frac{e^2}{2} + \frac{11}{3}\right)1 + C_2;$$

$$-2 = -1 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{2}{5} - \frac{e^2}{2} + \frac{11}{3} + C_2;$$

$$C_2 = \frac{e^2}{4} - \frac{34}{15}. \tag{3.7}$$

Теперь выражения (3.6) и (3.7) подставляем в (3.5) вместо $C_1$и $C_2$ и получаем частное решение данного дифференциального уравнения.

О т в е т: общее решение $y = x(lnx - 1) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C_1 x + C_2$ и частное решение $y = x(lnx - 1) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \left(-\frac{e^2}{2} + \frac{11}{3}\right)x + \frac{e^2}{4} - \frac{34}{15}$.

### 3.3. Уравнения вида $y'' = f(x, y')$

Если вторая производная искомой функции $y''$ представлена функцией от $x$ и первой производной функции $y'$, но нет самой искомой функции $y$, то дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y'). \tag{3.8}$$

*Способ решения* уравнения (3.8) сводится к линейному уравнению первого порядка вида $y' + f(x)y = g(x)$ или $y' + f(x)y = 0$ путём замены первой производной искомой функции на новую функцию от $x$, т.е. осуществляется подстановка $\boldsymbol{z = y' = z(x)}$, тогда $\boldsymbol{z' = y''}$.

**Пример 3.2.** Решить уравнение второго порядка, допускающего понижение порядка $xy'' + y' = 0$.

Р е ш е н и е. Если преобразовать данное уравнение к виду (3.8), по получим уравнение

$$y'' = -\frac{1}{x}y' = f(x, y'), \tag{3.9}$$

в котором $y''$ явно выражена через функцию от $x$ и $y'$. Понизим порядок данного уравнения за счёт замены $z = y'$, тогда $z' = y''$. После подстановки в (3.9), данное уравнение примет вид: $z' = -\frac{z}{x}$. Помня о том, что $z(x)$ – это функция от переменной $x$, то $z' = \frac{dz}{dx}$.

Заменим производную $z'$ через её дифференциал и получим уравнение $\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$. Применив одно из свойств пропорции, уравнение станет уравнением с разделёнными переменными (2.4), которое можно интегрировать:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}. \tag{3.10}$$

Если сделать указанную подстановку сразу в данное уравнение, то результат получим тот же самый. Выполним эти рассуждения. После подстановки $z = y'$ и $z' = y''$данное уравнение примет вид: $xz' + z = 0$. Это однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое сводится к решению уравнения с разделяющимися переменными. Решим его:

$$xz' + z = 0; \quad \frac{xdz}{dx} = -z \quad |\cdot dx; \quad xdz = -zdx \quad |:(xz); \quad \frac{xdz}{xz} = \frac{-zdx}{xz}.$$

Снова получим уравнение (3.10), которое после сокращения можно сразу интегрировать:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}; \quad lnz = -lnx + C_1; \quad lnz = ln\frac{C_1}{x}; \quad z = \frac{C_1}{x}.$$

Вернёмся к старой переменной: $z = y'$; $y' = \frac{C_1}{x}$ и проинтегрируем это уравнение: $y = \int \frac{C_1}{x}dx = C_1 ln|x| + C_2$.

Ответ: $y = C_1 ln|x| + C_2$.

**Пример 3.3.** Решить уравнение второго порядка, допускающего понижение порядка $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

Решение. Упростим данное уравнение, разделив обе части равенства на $x^3$. Тогда уравнение примет вид:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^3} = 0 \text{ или } y'' = -\frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^3} = f(x, y').$$

Для таких уравнений применима следующая подстановка: $y' = z$, $y'' = z'$. При выполнении такой подстановки данное уравнение примет вид $z' + \frac{1}{x}z - \frac{1}{x^3} = 0$, который соответствует линейному уравнению первого порядка $y' + f(x)y = g(x)$ и решается методом Бернулли (п. 2.5.2):

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^3}.$$

Сделаем замену $z = uv$ и $z' = u'v + uv'$

$$u'v + (uv' + \frac{1}{x}uv) = \frac{1}{x^3};$$

$$u'v + u\,(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{1}{x^3}. \qquad (3.11)$$

Затем выполним следующие действия: 1) выражение в скобках в … (3.11) приравняем к нулю, чтобы найти функцию $v$; 2) подставим найденное выражение для $v$ в оставшуюся часть уравнения (3.11) и найдём $u$; 3) вернёмся к «старой» переменной $z = uv$, подставив найденные значения $v$ и $u$, найдём z, которая в свою очередь равна $y'$; проинтегрировав полученное выражение для $y'$ найдём искомую функцию *y:*

| | | |
|---|---|---|
| 1) $v' + \frac{1}{x}v = 0;$ | 2) $u'v = \frac{1}{x^3};$ | 3) $z = uv;$ |
| $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};$ | $u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3};$ | $z = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x} + C_1\right);$ |
| $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$ | $u' = \frac{1}{x^2};$ | $y' = z;$ |
| $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$ | $u = \int \frac{1}{x^2}dx =$ | $y' = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x} + C_1\right);$ |
| $ln\|v\| = -ln\|x\|, C = 0;$ | $= \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C_1;$ | $y = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}\right)dx =$ |
| $ln\|v\| = ln\|x^{-1}\|;$ | $u = -\frac{1}{x} + C_1.$ | $= \frac{1}{x} + C_1 ln\|x\| + C_2.$ |
| $v = \frac{1}{x}.$ | | |

О т в е т: $y = \frac{1}{x} + C_1 ln|x| + C_2$.

### 3.4. Уравнения вида $y'' = f(y, y')$

Если вторая производная искомой функции $y''$ представлена самой функцией *y* и первой производной этой функции $y'$, но нет независимой переменной *x*, то дифференциальное уравнение принимает вид:

$$y'' = f(y, y'). \qquad (3.12)$$

*Способ решения* этого уравнения сводится к решению линейного уравнения первого порядка путём подстановки $\boldsymbol{y' = z = z(y)}$, где z – это функция от переменной *y*. Тогда, вычисляя производную сложной функции $z(y)$, будем рассуждать так:

$$y'' = (y')' = \big(z\,(y)\big)' = z'\,(y)\,y' = z' \cdot z, \text{ т.е. } \boldsymbol{y'' = z' \cdot z}.$$

**Пример 3.4.** Решить уравнение $y'' = (y')^2$.

Р е ш е н и е. В данном уравнении вторая производная $y''$ явно выражена через первую производную $y'$ и функцию $y$, представленную в нулевой степени. Значит, это уравнение вида (3.12) и надо выполнить замену: $y' = z,\ y'' = z' \cdot z$. Получим уравнение: $z' \cdot z = z^2\ |: z$, которое упростим, разделив обе части равенства на $z$. Тогда оно преобразится в уравнение с разделяющимися переменными:

$$z' = z, \frac{dz}{dy} = z, dz = zdy, \frac{dz}{z} = dy, \int \frac{dz}{z} = \int dy,$$

$$y = ln|z| - C_1, y = ln|z| - \ lnC_1, y = ln\left|\frac{z}{C_1}\right|, e^y = \frac{z}{C_1}, z = C_1 e^y\ .$$

Выполним обратную замену:

$$y' = z, y' = \ C_1 e^y;\ \frac{dy}{dx} = C_1 e^y;\ dy = \ C_1 e^y dx\ |: e^y;\ \frac{dy}{e^y} = \ C_1 dx;$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int C_1 dx;\ -e^{-y} = C_1 x + C_2;\ e^{-y} = C_1 x + C_2;\ -y = \log_e(C_1 x + C_2);$$

О т в е т: $y = -ln(C_1 x + C_2)$.

## УПРАЖНЕНИЯ № 6

**1.** Решите уравнение второго порядка, допускающего понижение порядка, имеющего вид $y'' = f(x)$. Найдите частное решение там, где указаны начальные условия:

а) $y'' = e^{2x}$; б) $y'' = 3 - 2x$; в) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$;

г) $y'' = \sin 3x$, если $y = \frac{4}{9},\ y' = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

**2.** Решите уравнение второго порядка, допускающего понижение порядка, имеющего вид $y'' = f(x, y')$:

а) $y'' = \frac{y'}{x} + x$; б) $xy'' + 3y' + x^2 = 0$; в) $(x+1)y'' = y' - 1$.

**3.** Решите уравнение второго порядка, допускающего понижение порядка, имеющего вид $y'' = f(y, y')$. Найдите частное решение там, где указаны начальные условия:

а) $yy'' = (y')^2$; б) $2yy'' = (y')^2 + 1$;

в) $2y(y')^3 + \ y'' = 0,$ если $\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -3$.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

После изучения разд. 2 «Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка» нужно обязательно выполнить нижеследующие тестовые задания и проверить полученные результаты в разд. «Ответы». После проверки свой результат сравнить с указанной после теста шкалой, чтобы определить, насколько усвоен изученный теоретический и практический материал. Если оценка неудовлетворительная, то учебный материал данного раздела пособия не усвоен, и продолжать дальнейшее обучение нельзя, потому что не будет хватать знаний для изучения последующего учебного материала. Надо снова изучить всё, что написано выше, и/или обратиться к другим учебникам и учебным пособиям из раздела «Библиографический список» настоящего пособия.

**Тест 5 (теория). ДУ второго прядка**

*Задание.* Ответьте на следующие вопросы теста, выбрав правильный, на ваш взгляд, ответ. Среди предложенных ответов правильных может быть более одного. Ответы дайте в кодированном виде. Например: 1а, 2ав, 3вг, и т.д. При проверке решения не указанный правильный ответ или указанный неправильный ответ оценивается как ошибка.

1. Какие из нижеуказанных уравнений будут являться уравнениями второго порядка?

а) $y'' = e^x + \cos x$; в) $y^2 + x^2 - y' = x$;

б) $\frac{d^2y}{dx^2} + tg\, x - y = 1$; г) $(7x^2 - 1)\sin 3x = y'$.

2. Почему при решении ДУ второго порядка возникают две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$?

а) потому что надо решать два уравнения;

б) потому что в уравнении есть две переменные;

в) потому что при решении уравнения надо дважды его интегрировать;

г) потому что даны два начальных условия.

3. Что является общим решением ДУ второго порядка?

а) функция от x;

б) функция от независимых переменных $x, y, y'$;

в) совокупность различных решений;

г) множество функций, зависящих от x и содержащих произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$.

4. Что такое частное решение ДУ второго порядка?

а) одна из первообразных функции $y$;

б) множество интегральных кривых, проходящих через данную точку;

в) одна из интегральных кривых, проходящих через данную точку с данным угловым коэффициентом;

г) функция, которая удовлетворяет начальным условиям.

5. Что является начальными условиями для ДУ второго порядка?

а) две заданные точки;

б) значение функции и её производной в некоторой точке;

в) координаты точки и угловой коэффициент касательной, проведённой в этой точке;

г) точка и касательная к любой интегральной кривой;

6. Что решает задача Коши?

а) нахождение частного решения данного уравнения;

б) вопрос о способе решения данного уравнения;

в) выбор интегральной кривой из множества существующих для данного уравнения;

г) выбор начальных условий.

7. Для какого уравнения применим способ двукратного интегрирования?

а) если правая часть уравнения не содержит $y$ и $y'$;

б) если правая часть уравнения не содержит $y$;

в) если правая часть уравнения не содержит $y'$;

г) если правая часть уравнения не содержит $x$;

8. Для какого уравнения применяется подстановка $k = y', k' = y''$?

а) если правая часть уравнения не содержит $y$ и $y'$;

б) если правая часть уравнения не содержит $y$;

в) если правая часть уравнения не содержит $y'$;

г) если правая часть уравнения не содержит $x$;

9. Для какого уравнения применяется подстановка $y' = p(y), y'' = p' \cdot p$?

а) если правая часть уравнения не содержит $y$ и $y'$;

б) если правая часть уравнения не содержит $y$;

в) если правая часть уравнения не содержит $y'$;

г) если правая часть уравнения не содержит $x$;

10. Какие из нижеследующих уравнений второго порядка являются уравнениями, допускающими понижение прядка?

а) $y'' = f(x, y)$; б) $y'' = f(x)$; в) $y'' = f(x, y')$; г) $y'' = f(y, y')$.

Всего существенных операций $p$ = 16 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 16–15 | 0–1 | «Отлично» |
| 89–80 | 14–13 | 2–3 | «Хорошо» |
| 79–70 | 12–11 | 4–5 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 10 и более | 6 и более | «Неудовлетворительно» |

## Тест 6 (практика). ДУ второго порядка

В этом тесте предложены уравнения, которые решаются путём понижения порядка. Вам надо решить их и сравнить с эталоном. В эталоне указаны существенные операции, которые надо выполнить для решения данного уравнения. Всякая ошибка или неверный ход решения влечёт за собой исключение невыполненных операций из общего количества. Посчитав число выполненных существенных операций и сравнив их со шкалой, приведённой ниже, вы узнаете о той оценке, которую вы получаете за своё решение. Если оценка неудовлетворительная, то материал данного раздела не усвоен и надо снова его изучить. В противном случае успех дальнейшего обучения не гарантирован.

**1.** Решить уравнение $y'' = (7x + 9)e^x$ и найти частное решение при условии $y(0) = 1, y'(0) = 4$.

Э т а л о н. Для решения данного уравнения требуется знать метод интегрирования по частям некоторых функций (прил. 2, подразд. 1.3).

| Этап решения уравнения $y'' = (7x + 9)e^x$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| Данное уравнение является уравнением вида $y'' = f(x)$ и поэтому решается двойным интегрированием | 2 |
| $y' = \int (7x + 9)e^x\, dx =$ | 1 |
| $= \left\| \begin{matrix} u = 7x + 9, du = (7x + 9)'dx = 7dx \\ dv = e^x dx, \;\; v = \int e^x dx = e^x + C, \text{где } C = 0 \end{matrix} \right\| =$ | 7 |
| $= uv - \int vdu =$ | 1 |
| $= (7x + 9)e^x - \int 7e^x dx =$ | 2 |
| $= (7x + 9)e^x - 7e^x + C_1 = (7x + 2)e^x + C_1$ | 2 |
| $y = \int \left((7x + 2)e^x + C_1\right)dx =$ | 1 |
| $= \int (7x + 2)e^x dx + \int C_1 dx \boxed{\equiv}$ | 3 |
| $\int (7x + 2)e^x dx =$ | 1 |
| $= \left\| \begin{matrix} u = 7x + 2, du = (7x + 2)'dx = 7dx \\ dv = e^x dx, \;\; v = \int e^x dx = e^x + C, \text{где } C = 0 \end{matrix} \right\| =$ | 7 |
| $= uv - \int vdu =$ | 1 |
| $= (7x + 2)e^x - \int 7e^x dx =$ | 2 |
| $= (7x + 2)e^x - 7e^x + C_2;$ | 2 |
| $\boxed{\equiv}\ (7x + 2)e^x - 7e^x + C_1 x + C_2$ | 5 |
| $y_{\text{общее}} = (7x - 5)e^x + C_1 x + C_2$ | 4 |
| 1. Найдём частное решение при условии $y(0) = 1, y'(0) = 4$ | |
| $\begin{cases} y' = (7x + 2)e^x + C_1 = 4; \\ y = (7x - 5)e^x + C_1 x + C_2 = 1 \end{cases}$ | 2<br>2 |

| Этап решения уравнения $y'' = (7x+9)e^x$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| Если $x = 0$, то $\begin{cases} y' = (7\cdot 0 + 2)e^0 + C_1 = 4; \\ y = (7\cdot 0 - 5)e^0 + C_1\cdot 0 + C_2 = 1 \end{cases}$ | 2<br>3 |
| $\begin{cases} 2 + C_1 = 4; \\ -5 + C_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 6; \end{cases}$ | 1<br>1 |
| $y_{\text{частное}} = (7x-5)e^x + 2x + 6$ | 3 |
| Всего существенных операций $p$ | 55 |

Шкала оценивания

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 55–50 | 0–5 | «Отлично» |
| 89–80 | 49–45 | 6–10 | «Хорошо» |
| 79–70 | 44–40 | 11–15 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 39 и более | 16 и более | «Неудовлетворительно» |

**2.** Найти общее решение уравнения $xy''\ln x = y'$.

Э т а л о н. Для решения данного уравнения требуется знать метод интегрирования заменой переменной и интеграл № 26 (прил. 2, подразд. 1.3, 1.4).

| Этап решения уравнения $xy''\ln x = y'$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| Данное уравнение является уравнением вида $y'' = f(x, y')$ и поэтому решается методом замены переменной | 2 |
| $xy''\,ln\,x = y' \quad \vert : x\,ln\,x\,;$ | 1 |
| $y'' = \frac{y'}{x\,ln\,x};$ $\left\vert \begin{matrix} \text{замена переменной} \\ y' = z, y'' = z' \end{matrix} \right.$ | 2 |
| $z' = \dfrac{z}{x\,ln\,x}$ | 2 |
| $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x\,ln\,x}$ | 1 |
| $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x\,ln\,x}$ | 2 |
| $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x\,ln\,x}$ | 1 |
| Вычислим интеграл: $\int \frac{dx}{x\,ln\,x} = \left\vert \begin{matrix} t = ln\,x \\ dt = (ln\,x)'dx = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right\vert =$ | 3 |
| $= \displaystyle\int \frac{dt}{t} = ln\vert t\vert + C_1 =$ | 3 |
| $= ln\vert ln\,x\vert + C_1$ | 1 |
| $ln\vert z\vert = ln\vert ln\,x\vert + C_1$ | 2 |
| $ln\vert z\vert = ln\vert ln\,x\vert + ln\,C_1$ | 1 |
| $ln\vert z\vert = ln\vert C_1 ln\,x\vert$ | 1 |

| Этап решения уравнения $xy'' \ln x = y'$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| $z = C_1 ln\, x$ | 1 |
| $y' = z = C_1 ln\, x$ | 2 |
| $y = \int C_1 ln\, x\, dx =$ | 1 |
| $= C_1 \int ln\, x\, dx =$ | 1 |
| $= C_1 x\,(\ln x - 1) + C_2$ | 2 |
| Ответ: $y = C_1 x\,(\ln x - 1) + C_2$ | 1 |
| Всего существенных операций $p$ | 30 |

Шкала оценивания

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 30–27 | 0–3 | «Отлично» |
| 89–80 | 26–24 | 4–6 | «Хорошо» |
| 79–70 | 23–21 | 7–9 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 22 и более | 10 и более | «Неудовлетворительно» |

**3.** Найти общее решение уравнения $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$.

Э т а л о н. Для решения данного уравнения требуется знать метод интегрирования заменой переменной и интеграл № 17 (прил. 2, подразд. 1.3, 1.4).

| Этап решения уравнения $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| Данное уравнение является уравнением вида $y'' = f(y, y')$ и поэтому решается методом замены переменной | 2 |
| $y'' \cdot tgy = 2(y')^2 \quad \left\vert \begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ y' = z(y), y'' = z' \cdot z \end{array} \right.$ | 2 |
| $z' \cdot z \cdot tgy = 2z^2;$ | 2 |
| $z' \cdot z \cdot tgy = 2z^2 \; \vert : z$ | 2 |
| $z' \cdot tgy = 2z \; \vert : tgy$ | 2 |
| $z' = \dfrac{2z}{tgy}$ | 2 |
| $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{2z}{tgy}$ | 1 |
| $tgy \cdot dz = 2zdy \; \vert : z \cdot tgy$ | 1 |
| $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{2dy}{tgy}$ | 2 |
| $\int \dfrac{dz}{z} = 2 \int \dfrac{dy}{tgy}$ | 1 |

| Этап решения уравнения $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| $\ln\lvert z\rvert = 2\int \frac{cosy\, dy}{\sin y}$ | 2 |
| $\int \frac{cosy\, dy}{\sin y} = \left\lvert \begin{matrix} t = \sin y \\ dt = (\sin y)'dx = \cos y\, dy \end{matrix} \right\rvert = $ $= \int \frac{dt}{t} = ln\lvert t\rvert + C_1 = ln\lvert\sin y\rvert + C_1$ | 7 |
| $ln\lvert z\rvert = 2ln\lvert sin\, y\rvert + C_1$ | 1 |
| $ln\lvert z\rvert = ln\lvert sin^2\, y\rvert + ln\, C_1$ | 1 |
| $ln\lvert z\rvert = ln\lvert C_1\, sin^2\, y\rvert$ | 1 |
| $z = C_1\, sin^2\, y$ | 1 |
| $y' = z(y) = C_1\, sin^2\, y$ | 2 |
| $\frac{dy}{dx} = C_1\, sin^2\, y\ \lvert: dx$ | 1 |
| $dy = C_1\, sin^2\, y\, dx\ \lvert: sin^2\, y$ | 1 |
| $\frac{dy}{sin^2\, y} = C_1 dx$ | 2 |
| $\int \frac{dy}{sin^2\, y} = C_1 \int dx$ | 2 |
| Ответ: $-ctgy = C_1 x + C_2$ | 3 |
| Всего существенных операций $p$ | 41 |

Шкала оценивания:

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 41–37 | 0–4 | «Отлично» |
| 89–80 | 36–33 | 5–8 | «Хорошо» |
| 79–70 | 32–29 | 9–12 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 30 и более | 13 и более | «Неудовлетворительно» |

📖 ***Рекомендуемая литература:*** [1, гл. IV, § 2]; [2, гл. XXII, § 4, 5]; [3, гл. 18, § 3, п. 3.1–3.3]; [4, гл. 30, § 30.1, 30.2]; [5, гл. 12, § 12.7]; [6, гл. I, § 3, п. 3.1–3.2]; [7, гл. XIII, § 7, 8]; [8, гл. 3]; [9, гл. 15, § 2].

# 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

## 4.1. Общие сведения

Наиболее употребляемы в математических приложениях следующие виды дифференциальных уравнений второго порядка:

уравнение вида

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x), \tag{4.1}$$

где $y$ – искомая функция; $y'$ и $y''$ – её производные; $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – функции, зависящие от $x$, и непрерывные на интервале $[a; b]$, называются ***линейными дифференциальными уравнениями второго порядка.***

Если в уравнении (4.1) функция $f(x) \equiv 0$, то уравнение приобретает вид:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0 \tag{4.2}$$

и называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.***

В противном случае уравнение (4.1) называется ***неоднородным***.

Если в уравнении (4.1) или (4.2) функции $p(x)$ и $q(x)$ заменить на постоянные величины (действительные числа) $p$ и $q$, тогда уравнение (4.1) приобретает вид:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \tag{4.3}$$

и называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Если в уравнении (4.3) $f(x) \equiv 0$, то уравнение приобретает вид:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \tag{4.4}$$

и называется ***однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Из всех названных видов уравнений (4.1)–(4.4) подробно рассмотрим уравнение (4.4) и (4.3).

## 4.2. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Для выяснения вопроса о решении уравнения (4.4) сформулируем некоторые базовые теоремы.

**Теорема 4.1.** Если функция $y_1(x)$ является решением уравнения (4.4), то и функция $y_2(x) = ay_1(x)$ также является решением уравнения (4.4), где $a$ – постоянный множитель.

**Теорема 4.2.** Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (4.4), то и функция $y_1(x)+y_2(x)$ также является решением уравнения (4.4).

При этом функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называют *частными решениями* уравнения (4.4).

Два частных решения уравнения (4.4) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называют *линейно независимыми*, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т.е. при всех значениях $a$ следует, что $y_2(x) \neq ay_1(x)$.

**Теорема 4.3.** Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются *линейно независимыми частными решениями* уравнения (4.4), то его *общее решение* имеет вид:

$$y = C_1y_1+C_2y_2, \tag{4.5}$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (4.4), надо найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

*Замечание.* Две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются *линейно независимыми*, если их отношение *не равно постоянному числу*.

В противном случае говорят, что данные функции линейно зависимы.

**Пример 4.1**

1. Найдём отношение двух функций $f_1(x) = 2^x$ и $f_2(x) = 2^{3x}$.

$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{2^{3x}}{2^x} = 2^{3x-x} = 2^{2x} \neq const \Rightarrow$ функции линейно независимы.

2. Найдём отношение двух функций $f_1(x) = 2^x$ и $f_2(x) = 2^{x+3}$.

$\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = \dfrac{2^{x+3}}{2^x} = 2^{x+3-x} = 2^3 = 8 - const \Rightarrow$ функции линейно зависимы.

Леонард Эйлер[2] предложил искать частные решения уравнения (4.4) в виде $y\,(x) = e^{kx}$, где $k$ – *const*. Тогда частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно независимыми. Выясним, какими могут быть значения $k$, при которых функция $y = e^{kx}$ окажется решением уравнения (4.4).

Для этого найдём первую и вторую производные этой функции и подставим их в уравнение (4.4):

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx};$$
$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0;$$
$$k^2e^{kx} + p \cdot ke^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0;$$
$$e^{kx}(k^2 + p \cdot k + q) = 0.$$

[2] Эйлер Леонард (1707–1783) родился в Швейцарии, работал в России с 1727 г. Внёс фундаментальный вклад в развитие математики и механики, открыл формулу, которая связывает показательную и тригонометрические функции $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ в 1748 г., когда ему был 21 год.

Ни при каких $k$ выражение $e^{kx} \neq 0$, значит должно равняться нулю выражение в скобках

$$k^2 + p \cdot k + q = 0, \tag{4.6}$$

которое получило название ***характеристического уравнения*** для дифференциального уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.

Уравнение (4.6) можно получить из уравнения (4.4) заменой $\boldsymbol{y''}$на $\boldsymbol{k^2}$, $\boldsymbol{y'}$на $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{y}$ на $\mathbf{1}$.

Уравнение (4.6) является квадратным уравнением и, решая его, получим значения $k_1$ и $k_2$, которые при подстановке в функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ будут являться частными решениями уравнения (4.4).

Так как при решении квадратного уравнения (4.6) могут возникнуть три различных случая наличия корней этого уравнения (прил. 2, подразд. 2.3, 2.4 данного пособия), то соответственно могут возникнуть три различных случая решения уравнения (4.4). Ниже представлен алгоритм, с помощью которого можно научиться решать данный вид уравнений.

### Алгоритм решения однородного линейного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Для решения необходимо произвести действия в строго определенном порядке.

1. Преобразовать данное уравнение к виду: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.
2. Составить для него характеристическое уравнение и решить его:

$$k^2 + p \cdot k + q = 0;$$

а) если $D > 0$, то уравнение (4.6) имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$, тогда общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

б) если $D = 0$, то уравнение (4.6) имеет один действительный корень или два одинаковых: $k = k_1 = k_2$, тогда общее решение будет иметь вид:

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x);$$

в) если $D < 0$, то уравнение (4.6) не имеет действительных корней, но имеет сопряжённые комплексные корни $k_1 \neq k_2$, равные $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi$, где $i = \sqrt{-1}$, тогда общее решение будет иметь вид:

$$y = e^{ax}(\mathrm{C}_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

3. Найти частное решение данного уравнения, если заданы начальные условия $y(x) = m$ и $y'(x) = n$. Для этого надо составить систему уравнений: $\begin{cases} y = m \\ y' = n, \end{cases}$ и решить её при заданном значении $x$. Таким образом можно найти значения $C_1, C_2$ и записать общее решение данного уравнения, подставив вместо $C_1$ и $C_2$ найденные значения.

**I случай.** Характеристическое уравнение (4.6) имеет 2 различных действительных корня $k_1 \neq k_2$, если $D > 0$.

Тогда частными решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$.

Общее решение будет иметь вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где $C_1$ и $C_2$ произвольные постоянные.

**Пример 4.2**. Решить уравнение $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 2k - 8 = 0, \qquad D = 36, \quad k_1 = -4, \qquad k_2 = 2.$$

Частные решения: $y_1 = e^{-4x}$ и $y_2 = e^{2x}$.

Общее решение: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$

**Пример 4.3**. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$, если $y = 8$ и $y' = 0$ при $x = 0$.

Решение

1. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 2k - 3 = 0, \qquad D = 16, \quad k_1 = -1, \qquad k_2 = 3.$$

Частные решения: $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{3x}$.

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

2. Найдём частное решение. Для этого вычислим $C_1$ и $C_2$ из системы, состоящей из начальных условий:

$$\begin{cases} y = 8, \\ y' = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} = 8, \\ (C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x})' = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} = 8, \\ (-C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x}) = 0; \end{cases}$$

Решим систему при $x = 0$.

$$\begin{cases} C_1 e^{-0} + C_2 e^{3\cdot 0} = 8, \\ (-C_1 e^{-0} + 3C_2 e^{3\cdot 0}) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 8, \\ -C_1 + 3C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 8 - C_2, \\ -(8 - C_2) + 3C_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 8 - C_2, \\ C_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 6, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ: Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, частное решение: $y = 6e^{-x} + 2e^{3x}$.

**II случай.** Характеристическое уравнение (4.6) имеет один действительный корень или два одинаковых: $k = k_1 = k_2$, если $D = 0$.

Тогда частными решениями будут функции $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$,

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$, где $C_1$ и $C_2$ произвольные постоянные.

**Задание:** докажите или покажите на примерах истинность этого утверждения.

**Пример 4.4**. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 4k + 4 = 0, \qquad D = 0, \qquad k = 2.$$

Частные решения: $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

**Пример 4.5**. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, если $y(0) = 4$ и $y'(0) = 2$.

Решение

1. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \qquad D = 0, \qquad k = 1.$$

Частные решения: $y_1 = e^{x}$ и $y_2 = xe^{x}$.

Общее решение: $y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$.

2. Найдём частное решение. Для этого вычислим $C_1$ и $C_2$ из системы, состоящей из начальных условий:

$$\begin{cases} y = 4, \\ y' = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x}(C_1 + C_2 x) = 4, \\ \left(e^{x}(C_1 + C_2 x)\right)' = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x}(C_1 + C_2 x) = 4, \\ e^{x}(C_1 + C_2 x + C_2) = 2; \end{cases}$$

Решим систему при $x = 0$:

$$\begin{cases} e^{0}(C_1 + C_2 \cdot 0) = 4, \\ e^{0}(C_1 + C_2 \cdot 0 + C_2) = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ 4 + C_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$, частное решение: $y = e^{x}\,(4 - 2x)$.

**III случай.** Характеристическое уравнение (4.6) не имеет действительных корней, если $D < 0$, но есть сопряжённые комплексные корни $k_1 \neq k_2$ равные $k_1 = a + bi,\ k_2 = a - bi,$ где $i = \sqrt{-1},\ a$ – действительная часть комплексного числа, $b$ – мнимая часть комплексного числа (прил. 2, подразд. 4.2). Тогда частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{(a+bi)x} \ \text{ и } \ y_2 = e^{(a-bi)x}.$$

Чтобы получить общее решение, надо избавиться от мнимых величин в показателе степени. Для этого применяют формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{и } e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Используя формулы Эйлера, преобразуют частное решение и получают общее решение дифференциального уравнения (4.4) для мнимых корней, которое имеет вид:

$$y = e^{ax}\,(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

где $C_1$ и $C_2$ – некоторые произвольные постоянные величины, а частными решениями будут функции: $y_1 = e^{\alpha x} \cos bx$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin bx$.

**Пример 4.6**. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Р е ш е н и е . Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 4k + 13 = 0, \qquad D = -36, \qquad k = 2 \pm 3i, \qquad a = 2,\;\; b = 3.$$

Частные решения: $y_1 = e^{2x} \cos 3x$ и $y_2 = e^{2x} \sin 3x$.

Общее решение: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

**Пример 4.7.** Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + 50y = 0$, если $y(0) = 1$ и $y'(0) = -1$.

Р е ш е н и е

1. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 2k + 50 = 0, \qquad D = -196, \qquad k = 1 \pm 7i, \qquad a = 1,\;\; b = 7.$$

Частные решения: $y_1 = e^{x} \cos 7x$ и $y_2 = e^{x} \sin 7x$.

Общее решение: $y = e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$.

2. Найдём частное решение. Для этого вычислим $C_1$ и $C_2$ из системы, состоящей из начальных условий:

$$\begin{cases} y = 1, \\ y' = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x) = 1, \\ \left(e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)\right)' = -1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x) = 1, \\ e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x) + e^{x}(-7C_1\, sin\, 7x + 7C_2 \cos 7x) = -1. \end{cases}$$

Решим систему при $x = 0$:

$$\begin{cases} e^{0}(C_1 \cos 7 \cdot 0 + C_2 \sin 7 \cdot 0) = 1, \\ e^{0}(C_1 \cos 7 \cdot 0 + C_2 \sin 7 \cdot 0) + e^{0}(-7C_1\, sin\, 7 \cdot 0 + 7C_2 \cos 7 \cdot 0) = -1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + 7C_2 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ 1 + 7\mathrm{C}_2 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ \mathrm{C}_2 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

О т в е т: общее решение: $y = e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$,

частное решение: $y = e^{x}\left(1 \cos 7x - \frac{2}{7} \sin 7x\right)$.

## 4.3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Эти уравнения имеют вид (4.3):

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$$

и решаются специальными методами. Сформулируем теорему, которая отражает положение о том, что решение данного вида уравнений имеет особую структуру.

**Теорема 4.4** (о структуре общего решения ДУ (4.3))

Общее решение дифференциального уравнения (4.3) состоит из суммы его частного решения $y^*$ и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (4.4)

$$y = \bar{y} + y^*, \tag{4.7}$$

где $y$ – общее решение уравнения (4.3), $\bar{y}$ – общее решение однородного ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, $y^*$ – частное решение уравнения (4.3).

В ряде случаев удаётся угадать или подобрать частное решение уравнения (4.3) по виду его правой части. Но чаще всего, для отыскания частного решения уравнения (4.3) применяют *метод неопределённых коэффициентов* или *метод вариации произвольных постоянных*.

### Алгоритм решения ДУ (4.3)

Произведем действия.

1. Левую часть уравнения (4.3) приравнять к нулю и решить линейное однородное ДУ второго порядка (4.4)

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

Найти решение в виде: $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

2. Найти частное решение $y^*$, используя вид правой части $f(x)$ (п. 4.3 данного пособия).

3. Общее решение ДУ (4.3) записать в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения (4.4) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения в виде:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{4.8}$$

Нахождение общего решения однородного ДУ (4.4) рассмотрено в подразд. 4.1 данного пособия. Теперь рассмотрим способы нахождения частного решения уравнения (4.3) по виду его правой части $f(x)$.

## 4.4. Нахождение частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида $f(x)$

Частное решение такого уравнения находится в зависимости от вида функции $f(x)$.

**I случай.** Если правая часть $f(x)$ ДУ (4.3) выражена многочленом $n$-й степени и имеет вид: $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots + a_nx^n$, то и частное решение $y^*$ будет выражено многочленом той же $n$-ой степени. Это верно только тогда, когда коэффициенты $p$ и $q$ отличны от нуля. А случай, когда хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю, надо рассматривать отдельно.

Например:

а) если правая часть выражена многочленом нулевой степени $f(x) = a_o$, то частное решение будет иметь вид: $y^* = A$;

б) если правая часть выражена многочленом I степени $f(x) = a_o + a_1x$, то частное решение будет иметь вид: $y^* = Ax + B$;

в) если правая часть выражена многочленом II степени $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2$, то частное решение будет иметь вид: $y^* = Ax^2 + Bx + C$;

г) если правая часть выражена многочленом III степени $y = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, то частное решение будет иметь вид: $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где *A, B, C, D*… – неопределённые коэффициенты искомых многочленов, и т.д. (прил. 2, разд. 4).

Чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов *A, B, C, D* и т.д., надо найти первую $(y^*)'$ и вторую $(y^*)''$ производные частного решения $y^*$, выраженного в общем виде, и подставить их в данное уравнение. Приравнять коэффициенты при соответствующих степенях $x$ левой и правой части и составить систему уравнений, решая которую можно найти числа $A$, $B$, $C$, $D$ и т.д.

Покажем на примере решение такого вида уравнений.

**Пример 4.8.** Решить уравнение $y'' - 5y' + 4y = 8$.

Решение

1. Решим соответствующее однородное ДУ. Для этого приравняем к нулю левую часть данного уравнения, составим характеристическое уравнение, решим его и по значению дискриминанта найдём корни этого уравнения. Составим общее решение данного уравнения:

$$y'' - 5y' + 4y = 0, \quad k^2 - 5k + 4 = 0, D = 9, \quad k_1 = 4, k_2 = 1.$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1e^{4x} + C_2e^{x}$.

2. Правая часть имеет вид многочлена нулевой степени: $f(x) = 8$. Значит, частное решение можно искать также в виде многочлена нулевой степени в виде: $y^* = \text{A}$.

Найдём первую и вторую производные $(y^*)' = 0$, $(y^*)'' = 0$ и подставим их в данное уравнение: $0 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot \mathrm{A} = 8$; $\mathrm{A} = 2$. Неизвестный коэффициент найден.

3. Подставим полученное значение коэффициента А в частное решение и получим функцию вида: $y^* = 2$.

Ответ: решением данного уравнения является функция $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x} + 2$

**Пример 4.9**. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 5x + 1$.

Решение

1. Решим соответствующее однородное ДУ. Приравняем к нулю левую часть уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его. По значению дискриминанта и корней квадратного уравнения составим общее решение данного уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad k^2 - 6k + 9 = 0, D = 0, \quad k_1 = k_2 = 3.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

2. Правая часть данного уравнения имеет вид многочлена I степени: $f(x) = 5x + 1$. Значит, частное решение можно искать в виде многочлена тоже первой степени в виде: $y^* = Ax + B$, где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Найдём первую и вторую производные $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$ и подставим их в данное уравнение:

$$0 - 6 \cdot A + 9 \cdot (Ax + B) = 5x + 1,$$
$$9Ax + (9B - 6A) = 5x + 1.$$

Составим систему уравнений, которые отражают равенство коэффициентов при соответствующих степенях $x$:

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 9A = 5, \\ 9B - 6A = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{9}, \\ 9B - 6\,\dfrac{5}{9} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{9}, \\ 9B = \dfrac{10}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{9}, \\ B = \dfrac{10}{27}. \end{cases}$$

3. Подставим полученные значения коэффициентов $A$ и $B$ в частное решение и получим функцию вида: $y^* = \frac{5}{9}x + \frac{10}{27}$.

Ответ: решением данного уравнения является функция: $y = \bar{y} + y^* = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{5}{9}x + \frac{10}{27}$.

**Пример 4.10.** Решить уравнение $y'' + 4y' + 8y = x^2 - 3x$.

Решение

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 4k + 8 = 0, \qquad D = -16, \qquad k = 2 \pm 2i, \qquad \alpha = 2,\ \beta = 2.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2. Правая часть имеет вид многочлена II степени: $f(x) = x^2 - 3x$. Значит, частное решение можно искать в виде многочлена тоже второй степени в виде: $y^* = Ax^2 + Bx + C$, где $A$, $B$, $C$ – неизвестные коэффициенты. Надо их вычислить. Для этого найдём первую и вторую производные: $(y^*)' = 2Ax + B$, $(y^*)'' = 2A$ и подставим их в данное уравнение. Выполним следующие преобразования:

$$2A + 4(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 3x;$$
$$2A + 8Ax + 4B + 8Ax^2 + 8Bx + 8C = x^2 - 3x;$$
$$8Ax^2 + (8Ax + 8Bx) + (2A + 4B + 8C) = x^2 - 3x;$$
$$8Ax^2 + (8A + 8B)x + (2A + 4B + 8C) = x^2 - 3x.$$

Составим систему уравнений, которые отражают равенство коэффициентов при соответствующих степенях *x*:

$$\begin{matrix} x^0: \\ x^1: \\ x^2: \end{matrix} \begin{cases} 2A + 4B + 8C = 0, \\ 8A + 8B = 3, \\ 8A = 1; \end{cases} \begin{cases} 2\,\dfrac{1}{8} + 4B + 8C = 0, \\ 8\,\dfrac{1}{8} + 8B = 3, \\ A = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{4} + 4B + 8C = 0, \\ 1 + 8B = 3, \\ A = \dfrac{1}{8}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} + 4 \cdot \dfrac{1}{4} + 8C = 0, \\ B = \dfrac{1}{4}, \\ A = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{4} + 1 + 8C = 0, \\ B = \dfrac{1}{4}, \\ A = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} 8C = -\dfrac{5}{4}, \\ B = \dfrac{1}{4}, \\ A = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \begin{cases} C = -\dfrac{5}{32}, \\ B = \dfrac{1}{4}, \\ A = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

3. Подставим полученные значения коэффициентов *A*, *B*, *C* в частное решение и получим функцию вида: $y^* = Ax^2 + Bx + C = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{32}$.

О т в е т: решением данного уравнения является функция $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{32}$.

Решим уравнения, у которых один из коэффициентов *p* или *q* равен нулю.

**Пример 4.11.** Решить уравнение $y'' - y' = 4x^3 - 9x^2 - 6x - 2$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - k = 0, \qquad k(k-1) = 0, k_1 = 0, k_2 = 0.$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$.

2. Казалось бы, правая часть имеет вид многочлена III степени: $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 6x - 2$. Значит, частное решение можно искать в виде многочлена тоже третьей степени в виде: $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где $A$, $B$, $C$, $D$ – неизвестные коэффициенты. Вычислив эти коэффициенты, как в предыдущих примерах, мы получим искомую функцию. Однако это не так.

*Задание.* Следуя вышеописанному алгоритму поиска неизвестных коэффициентов, покажите, что найти их нельзя.

Это связано с тем, что при дифференцировании степень многочленов снижается на единицу. Поэтому в качестве частного решения надо взять многочлен ($n$+1)-й степени следующего вида:

$$y^* = x\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

3. Теперь займёмся вычислением неизвестных коэффициентов. Для этого найдём первую и вторую производные:

$$(y^*)' = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$
$$(y^*)'' = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

и подставим их в данное уравнение. Выполним следующие преобразования: раскроем скобки и сгруппируем слагаемые так, чтобы были очевидны коэффициенты при степенях $x$:

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C - (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) = 4x^3 - 9x^2 - 6x - 2;$$
$$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx - D = 4x^3 - 9x^2 - 6x - 2;$$
$$-4Ax^3 + (12A - 3B)x^2 + (6B - 2C)x + (2C - D) = 4x^3 - 9x^2 - 6x - 2.$$

Составим систему уравнений, которые отражают равенство коэффициентов при соответствующих степенях $x$.

| | | |
|---|---|---|
| $x^3$ | $-4A = 4$ | $A = -1$ |
| $x^2$ | $12A - 3B = -9$ | $B = -1$ |
| $x^1$ | $6B - 2C = -6$ | $C = 0$ |
| $x^0$ | $2C - D = -2$ | $D = 2$ |

4. Подставим полученные значения коэффициентов $A$, $B$, $C$, $D$ в частное решение и получим функцию вида:

$$y^* = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x(-x^3 - x^2 + 2) = -x^4 - x^3 + 2x.$$

О т в е т: решением данного уравнения является функция $y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^x - x^4 - x^3 + 2x$.

Итак, если $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен $n$-й степени, то частное решение $y^*$ надо искать в виде:

$$y^* = Q_n(x), \text{ если } q \neq 0;$$
$$y^* = xQ_n(x), \text{ если } q = 0;\ p \neq 0;$$
$$y^* = x^2Q_n(x), \text{ если } q = 0;\ p = 0.$$

Эти правила сохраняются, если решаются ДУ более высокого порядка.

**II случай**. Если правая часть $f(x)$ ДУ (4.3) выражена произведением показательной функции $e^{\alpha x}$ и многочлена $n$-й степени $P_n(x)$, т.е. $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}. \tag{4.9}$$

Тогда возможны три частных случая поиска частного решения данного уравнения.

① Когда число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В этом случае частное решение будет выражено через произведение многочлена той же степени и той же показательной функции, т.е. иметь вид:

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}. \tag{4.10}$$

Покажем на примере решение таких уравнений.

**Пример 4.12.** Решить уравнение $y'' + 4y' + 3y = x$.

Решение

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого левую часть данного уравнения приравняем к нулю, составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad k^2 + 4k + 3 = 0, D = 4, \ k_1 = -3, k_2 = -1.$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$.

2. Правая часть данного уравнения имеет вид (4.9), где $n = 1$, а $\alpha = 0$, т.е. $f(x) = P_1(x)e^{0x} = xe^0 = x$, причём 0 не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 4k + 3 = 0$. Тогда частное решение будем искать в виде (4.10), т.е. $y^* = Q_1(x)e^{0\cdot x} = Ax + B$.

Найдём первую и вторую производные $(y^*)' = A,\ \ (y^*)'' = 0$ и подставим их в данное уравнение:

$$0 + 4A + 3(Ax + B) = x;$$
$$3Ax + (4A + 3B) = x.$$

Составим систему уравнений, которые отражают равенство коэффициентов при соответствующих степенях *x*:

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 3A = 1, \\ 4A + 3B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ 4\,\dfrac{1}{3} + 3B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ 3B = -\dfrac{4}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = -\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

3. Подставим полученные значения коэффициентов А и В в частное решение и получим функцию вида: $y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

О т в е т: решением данного уравнения является функция $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

**Пример 4.13.** Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = 2e^{2x}$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого приравняем к нулю левую часть данного уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' - 2y' + 2y = 0; \quad k^2 - 2k + 2 = 0, D = -4;$$
$$k = 1 \pm i, \ \ a = 1, \ \ b = 1.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

2. Правая часть $f(x) = 2e^{2x} = P_0(x)e^{2x}$ имеет вид произведения многочлена нулевой степени ($n = 0$) и показательной функции с коэффициентом при неизвестном $\alpha = 2$, который не является корнем характеристического уравнения $k^2 - 2k + 2 = 0$.

Значит, частное решение будем искать в виде (4.10): $y^* = Ae^{2x}$, где А – неизвестный коэффициент. Чтобы вычислить этот неизвестный коэффициент, надо найти первую и вторую производные частного решения:

$$(y^*)' = 2Ae^{2x}, (y^*)'' = 4Ae^{2x}$$

и подставить их в данное уравнение:

$$4Ae^{2x} - 2 \cdot 2\, Ae^{2x} + 2\, Ae^{2x} = 2\, e^{2x};$$
$$4\cancel{Ae^{2x}} - 4\cancel{Ae^{2x}} + 2 \cdot Ae^{2x} = 2\, e^{2x};$$
$$2\, Ae^{2x} = 2\, e^{2x} \ \ |: e^x;$$
$$2\, A = 2, \qquad A = 1.$$

3. Подставим полученное значение коэффициента $A$ в частное решение и будем иметь функцию вида: $y^* = e^{2x}$.

О т в е т: решением данного уравнения является функция $y = e^x\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}$.

② Число $\alpha$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

Это случай, когда $D > 0$ и квадратное уравнение имеет два различных действительных корня. Если один из них равен коэффициенту $\alpha$ при переменной $x$ в показателе степени функции $e^{\alpha x}$, то в этом случае частное решение будет выражено через произведение многочлена $(n + 1)$-й степени и той же показательной функции, т.е. будет иметь вид:

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (4.11)$$

Покажем на примере решение таких уравнений.

**Пример 4.14.** Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное уравнение, приравняв левую часть данного уравнения к нулю. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' - 7y' + 6y = 0, \quad k^2 - 7k + 6 = 0, D = 25, \quad k_1 = 6, k_2 = 1.$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1 e^{6x} + \mathrm{C}_2 e^x$.

2. Правая часть $f(x) = (x-2)\, e^x = P_1(x)\, e^{1\,x}$ имеет вид произведения многочлена первой степени ($n = 1$) и показательной функции с коэффициентом при неизвестном $\alpha = 1$, который является корнем характеристического уравнения $k^2 - 7k + 6 = 0$. Значит, частное решение надо искать в виде (4.11), т.е. $y^* = xQ_1(x)e^x = x(Ax+B)e^x$.

Для вычисления неизвестных коэффициентов $A$ и $B$ найдём первую и вторую производные от функции $y^*$ и выполним следующие преобразования:

$$\begin{gathered}
(y^*)' = \big((Ax^2 + Bx)e^x\big)' = (Ax^2 + Bx)'e^x + (Ax^2 + Bx)(e^x)' = \\
= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = e^x(Ax^2 + (2A+B)\,x + B); \\
(y^*)'' = \big(e^x\,(Ax^2 + (2A+B)x + B)\big)' = \\
= (e^x)'(Ax^2 + (2A+B)\,x + B) + e^x\,(Ax^2 + (2A+B)\,x + B)' = \\
= e^x(Ax^2 + (2A+B)x + B) + e^x\,\big(2Ax + (2A+B)\big) = \\
= e^x\,(Ax^2 + (4A+B)\,x + 2B + 2A).
\end{gathered}$$

Подставим найденные производные в данное уравнение и преобразуем его:

$$\begin{gathered}
e^x(Ax^2 + (4A+B)x + 2B + 2A) - 7e^x(Ax^2 + (2A+B)x + B) + \\
+6x(Ax+B)e^x = \ (x-2)e^x; \\
e^x[\cancel{Ax^2} + \underline{4Ax} + \cancel{Bx} + \underline{\underline{2B}} + 2A - \cancel{7Ax^2} - \underline{14Ax} - \cancel{7Bx} - \underline{\underline{7B}} + \cancel{6Ax^2} + \cancel{6Bx}] = \\
= (x-2)\,e^x; \\
e^x(-10Ax - 5B + 2A) = (x-2)e^x;
\end{gathered}$$

Разделим обе части равенства на $e^x$ и получим выражение

$$-10Ax - 5B + 2A = x - 2.$$

Составим систему уравнений, которые отражают равенство коэффициентов при соответствующих степенях $x$:

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} \quad -10A = 1, \\ -5B + 2A = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad\quad A = -\frac{1}{10}, \\ -5B + 2\left(-\frac{1}{10}\right) = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{10}, \\ -5B = -\frac{9}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{10}, \\ B = \frac{9}{25}. \end{cases}$$

3. Подставим полученные значения коэффициентов $A$ и $B$ в частное решение и получим функцию вида:

$$y^* = x\,(Ax + B)\,e^x = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)\,e^x.$$

О т в е т: общим решением данного уравнения будет функция $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$.

③ Число $\alpha$ является двукратным корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Это случай, когда $D = 0$ и квадратное уравнение имеет один или два одинаковых (их называют двукратными) $k = k_1 = k_2$ действительных корня. Если этот корень равен коэффициенту $\alpha$ при переменной $x$ в показателе степени функции $e^{\alpha x}$, то в этом случае частное решение будет выражено через произведение многочлена $(n+2)$-й степени и той же показательной функции $e^{\alpha x}$, т.е. будет иметь вид:

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}. \qquad (4.12)$$

Покажем на примере решение таких уравнений.

**Пример 4.15.** Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное ДУ. Для этого приравняем к нулю левую часть уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad k^2 + 4k + 4 = 0, D = 0, \quad k_1 = k_2 = k = -2.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

2. Правая часть $f(x) = 4e^{-2x} = P_0(x)e^{-2x}$ имеет вид произведения многочлена нулевой степени $(n = 0)$ и показательной функции с коэффициентом при неизвестном $\alpha = -2$, который является корнем характеристического уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$. Значит, частное решение надо искать в виде (4.12), т.е. $y^* = x^2 Q_0(x) e^{\alpha x} = x^2 A e^{-2x}$, где $A$ – неизвестный коэффициент, который надо вычислить. Для этого найдём первую и вторую производные этого частного решения:

$$(y^*)' = (Ax^2 e^{-2x})' = (Ax^2)' e^{-2x} + Ax^2 (e^{-2x})' =$$
$$= 2Axe^{-2x} - 2Ax^2 e^{-2x} = e^{-2x}(2Ax - 2Ax^2);$$
$$(y^*)'' = \left(e^{-2x}(2Ax - 2Ax^2)\right)' =$$
$$= (e^{-2x})'(2Ax - 2Ax^2) + e^{-2x}(2Ax - 2Ax^2)' =$$
$$= -2e^{-2x}(2Ax - 2Ax^2) + e^{-2x}(2A - 4Ax) =$$
$$= e^{-2x}(\underline{-4Ax} + 4Ax^2 + 2A - \underline{4Ax}) = e^{-2x}(4Ax^2 - 8Ax + 2A).$$

Подставим найденные производные в данное уравнение:

$$e^{-2x}(4Ax^2 - 8Ax + 2A) + 4e^{-2x}(2Ax - 2Ax^2) + 4Ax^2 e^{-2x} = 4e^{-2x}.$$

Разделим обе части равенства на $e^{-2x}$, раскроем скобки, приведём подобные слагаемые и получим уравнение:

$$\cancel{4Ax^2} - \cancel{8Ax} + 2A + \cancel{8Ax} - \cancel{8Ax^2} + \cancel{4Ax^2} = 4,$$
$$2A = 4, \qquad A = 2.$$

3. Найденное значение неизвестного коэффициента $A$ подставим в частное решение данного уравнения и получим функцию вида:

$$y^* = Ax^2e^{-2x} = 2x^2e^{-2x}.$$

О т в е т: общим решением данного уравнения является функция $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x) + 2x^2e^{-2x} = e^{-2x}(C_1 + C_2x + 2x^2)$.

**III случай**. Если правая часть $f(x)$ ДУ (4.3) содержит тригонометрические, показательные функции и многочлены, а в общем виде её можно представить так:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{4.13}$$

где $P_n(x)$ – многочлен от $x$ степени $n$, $Q_m(x)$ – многочлен от $x$ степени $m$, то форма частного решения определяется следующим образом:

1) если число $\alpha + \beta i$ ***не является*** *корнем характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, то частное решение $y^*$ уравнения (4.3) надо искать в виде:

$$y^* = e^{\alpha x}(U_s\,(x)\ \cos\beta x + V_s\,(x)\ \sin\beta x), \tag{4.14}$$

где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ – многочлены от $x$, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $s = max(n, m)$;

2) если число $\alpha + \beta i$ ***является*** *корнем характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, то частное решение $y^*$ уравнения (4.3) надо искать в виде:

$$y^* = xe^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x), \tag{4.15}$$

где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ – многочлены от $x$, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $s = max(n, m)$.

***Замечание.*** Если функция $f(x)$ в формуле (4.13) содержит один из многочленов $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ тождественно равным нулю, т.е. функция (4.13) имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ или $f(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)\sin\beta x$, то вид частных решений (4.14)–(4.15) сохраняется.

Рассмотрим **частные случаи** функции $f(x)$ вида (4.13).

**1.** Если $\alpha = 0$, то функция $e^{\alpha x} \equiv 1$ и функция $f(x)$ принимает вид:

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x, \tag{4.16}$$

тогда частное решение надо находить в зависимости от числа $\beta i$:

а) если число $\beta i$ ***не является*** *корнем характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, то частное решение надо искать в виде:

$$y^* = U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x, \qquad (4.17)$$

где $s = max(n, m)$;

б) если число $\beta i$ **является** корнем характеристического уравнения $k^2 + +pk + q = 0$, то частное решение надо искать в виде:

$$y^* = x\,(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x), \qquad (4.18)$$

где $s = max(n, m)$.

**2.** Если $\alpha = 0$ и функция $e^{\alpha x} \equiv 1$, а также, если $m = n = 0$ и многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ являются многочленами нулевой степени, т.е. $P_n(x) = \mathrm{M}$ и $Q_m(x) = N$, а функция $f(x)$ принимает вид:

$$f(x) = \mathrm{M}\cos\beta x + N\sin\beta x, \qquad (4.19)$$

тогда частное решение надо находить в зависимости от числа $\beta i$:

а) если число $\beta i$ ***не является*** *корнем характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, то частное решение надо искать в виде:

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x\,; \qquad (4.20)$$

б) если число $\beta i$ **является** корнем характеристического уравнения $k^2 + +pk + q = 0$, то частное решение надо искать в виде:

$$y^* = x\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \qquad (4.21)$$

где A, B, M, N – неизвестные коэффициенты, которые надо найти.

Покажем решение таких уравнений на примерах.

**Пример 4.16.** Решить уравнение $y'' - y = 3\,e^{2x}\cos x$.

Решение.

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого приравняем к нулю левую часть данного уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' - y = 0, \quad k^2 - 1 = 0, \;\; k = \pm 1.$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2\,e^{-x}$.

2. Правая часть $f(x) = 3\,e^{2x}\cos x = P_0(x)e^{2x}\cos x$ имеет вид произведения многочлена нулевой степени ($n = 0$) и тригонометрической функции $\cos x$ и показательной функции $e^{2x}$, где $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Значит, число $\alpha + \beta i = 2 + i$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 - 1 = 0$. И тогда частное решение будем искать в виде (4.14):

$$y^* = e^{2x}(A\cos x + B\sin x),$$

где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты, которые надо вычислить.

Найдём первую и вторую производные частного решения $y^*$:

$$(y^*)' = (e^{2x})'(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(A\cos x + B\sin x)' =$$
$$= 2e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(-A\sin x + B\cos x);$$
$$(y^*)'' = 4e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + 2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) +$$
$$+2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(-A\cos x - B\sin x)$$

и подставим их в данное уравнение:

$$y'' - y = 0; \quad 4e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + 2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) +$$
$$+2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(-A\cos x - B\sin x) -$$
$$-e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = 3\,e^{2x}\cos x.$$

Упростим это уравнение так, чтобы были очевидны коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$. Но прежде разделим обе части уравнения на $e^{2x}$:

$$4\,(A\cos x + B\sin x) + 2\,(-A\sin x + B\cos x) +$$
$$+2\,(-A\sin x + B\cos x) + (-A\cos x - B\sin x) -$$
$$-(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x) = 3\cos x\,;$$
$$4A\cos x + 4B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x -$$
$$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = 3\cos x\,;$$
$$2A\cos x + 4B\cos x - 4A\sin x + 2B\sin x = 3\cos x;$$
$$(2A + 4B)\cos x + (-4A + 2B)\sin x = 3\cos x.$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ левой и правой части уравнения, составим систему уравнений и решим её относительно коэффициентов *A* и *B*:

$$\begin{matrix} sin\,x: \\ \cos x: \end{matrix} \begin{cases} -4A + 2B = 0, \\ 2A + 4B = 3 \quad |\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -4A + 2B = 0, \\ \quad 4A + 8B = 6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$10B = 6,$$
$$B = \tfrac{3}{5}.$$

$$\begin{cases} -4A + 2\,\dfrac{3}{5} = 0, \\ \qquad B = \dfrac{3}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4A = -\dfrac{6}{5}, \\ \quad B = \dfrac{3}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}, \\ \quad B = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

3. Найденные значения неизвестных коэффициентов $A$ и $B$ подставим в частное решение данного уравнения и получим функцию вида:

$$y^* = \tfrac{3}{10}\cos x + \tfrac{3}{5}\sin x.$$

О т в е т: общим решением данного уравнения будет функция $y = \bar{y} + y^* = = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x.$

**Пример 4.17.** Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Решение

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого приравняем к нулю левую часть данного уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad k^2 + 2k + 5 = 0, D = -16,$$
$$k = -1 \pm 2i, a = -1, \quad b = 2.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2. Правая часть $f(x) = 2\cos x = P_0(x)\cos x$ имеет вид произведения многочлена нулевой степени $(n = 0)$ и тригонометрической функции $\cos x$, где число $2i$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Значит, частное решение будем искать в виде (4.20): $y^* = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неизвестные коэффициенты, которые надо вычислить, а $\beta = 1$.

Найдём первую и вторую производные частного решения $y^*$:

$$(y^*)' = -A\,sin\,x + B\cos x;$$
$$(y^*)'' = -A\,cos\,x - B\,sin\,x$$

и подставим их в данное уравнение:

$$(-A\,cos\,x - B\,sin\,x) + 2\,(-A\,sin\,x + B\cos x) + 5\,(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Упростим это уравнение так, чтобы были очевидны коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

$$-A\,cos\,x - B\,sin\,x - 2A\,sin\,x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5\,B\sin x = 2\cos x;$$
$$(-B - 2A + 5B)\,sin\,x + (-A + 2B + 5A)\cos x = 2\cos x.$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ левой и правой части уравнения, составим систему уравнений и решим её относительно коэффициентов *A* и *B*:

$$\begin{matrix} sin\,x: \\ \cos x: \end{matrix} \begin{cases} -2A + 4B = 0, |\cdot 2 \\ 4A + 2B = 2. \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -4A + 8B = 0, \\ 4A + 2B = 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$10B = 2,$$
$$B = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{cases} -2A + 4\,\dfrac{1}{5} = 0, \\ B = \dfrac{1}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A = -\dfrac{4}{5}, \\ B = \dfrac{1}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{5}, \\ B = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

3. Найденные значения неизвестных коэффициентов *A* и *B* подставим в частное решение данного уравнения и получим функцию вида:

$$y^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

О т в е т: общим решением данного уравнения будет функция $y = \bar{y} + y^* =$ $= e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

**Пример 4.18.** Решить уравнение $y'' + 4y = \cos 2x$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное уравнение. Для этого приравняем к нулю левую часть данного уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его

$$y'' + 4y = 0, \quad k^2 + 4 = 0, \qquad k = \pm 2i, \qquad a = 0, \qquad b = 2.$$

Общее решение: $\bar{y} = e^{0x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

2. Правая часть $f(x) = \cos 2x = P_0(x)\cos 2x$ имеет вид произведения многочлена нулевой степени ($n = 0$) и тригонометрической функции $\cos 2x$, где число $2i$ является корнем характеристического уравнения $k^2 + 4 = 0$.

Значит, частное решение будем искать в виде (4.21):

$$y^* = x(A\cos\beta x + \mathrm{B}\sin\beta x),$$

где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты, которые надо вычислить, а $\beta = 2$, т.е. $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Найдём первую и вторую производные частного решения $y^*$:

$$\begin{gathered}(y^*)' = x'\,(A\cos 2x + B\sin 2x) + x\,(A\cos 2x + B\sin 2x)' = \\ = (A\cos 2x + B\sin 2x) + x\,(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x); \\ (y^*)'' = (A\cos 2x + B\sin 2x)' + x'\,(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + \\ +x\,(-2\mathrm{A}\sin 2x + 2B\cos 2x)' = \\ = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \\ +x\,(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\end{gathered}$$

и подставим их в данное уравнение:

$$\begin{gathered}-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + \\ +2B\cos 2x + x\,(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + \\ +4x\,(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x.\end{gathered}$$

Упростим это уравнение так, чтобы были очевидны коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$. Для этого раскроем скобки, сгруппируем слагаемые, содержащие $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

$$\begin{gathered}-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - \cancel{4Ax\cos 2x} - \cancel{4Bx\sin 2x} + \\ +\cancel{4xA\cos 2x} + \cancel{4xB\sin 2x} = \cos 2x; \\ -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x.\end{gathered}$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ левой и правой части уравнения, составим систему и решим её относительно коэффициентов $A$ и $B$:

$$\begin{array}{l} sin\,x: \\ \cos x: \end{array} \begin{cases} -4A = 0, \\ 4B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

3. Найденные значения неизвестных коэффициентов $A$ и $B$ подставим в частное решение данного уравнения и получим функцию вида:

$$y^* = x\left(0\cos 2x + \tfrac{1}{4}\sin 2x\right) = \tfrac{1}{4}x\sin x.$$

О т в е т: общим решением данного уравнения будет функция $y = \bar{y} + y^* =$ $= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin x$.

Часто встречаются уравнения, которые в правой части содержат сумму двух или нескольких функций. Сформулируем теорему, которая позволяет найти решение таких уравнений.

**Теорема 4.5** (о структуре решения ДУ (4.3) с правой частью, представляющей собой сумму функций)

Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида (4.3) имеет в правой части сумму двух (или нескольких) функций

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение $y^*$ такого уравнения состоит из суммы частных решений $y_1^* + y_2^*$ каждого из уравнений:

$$y_1^{*\prime\prime} + p\cdot y_1^{*\prime} + q\cdot y_1^* = f_1(x); \qquad (4.22)$$

$$y_2^{*\prime\prime} + p\cdot y_2^{*\prime} + q\cdot y_2^* = f_2(x). \qquad (4.23)$$

Покажем на примере решение таких уравнений.

**Пример 4.19.** Решить уравнение $y'' + 4y = x + 3e^x$.

Р е ш е н и е

1. Решим соответствующее однородное ДУ. Для этого приравняем к нулю левую часть уравнения, составим характеристическое уравнение и решим его: $y'' + 4y = 0$; $k^2 + 4 = 0$; $k = \pm 2i$, где $i = \sqrt{-1}$; $a = 0$, $b = 2$.

Общее решение:

$$\bar{y} = e^{0\,x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x. \qquad (4.24)$$

2. По теореме 4.5 частное решение $y^*$ данного уравнения равно сумме частных решений $y_1^* + y_2^*$ каждого из уравнений, составленное в соответствии с уравнениями (4.22) и (4.23):

$$y_1^{*''} + 4y_1^* = x; \tag{4.25}$$

$$y_2^{*''} + 4y_2^* = 3e^x. \tag{4.26}$$

3. Найдём частное решение уравнения (4.25). Правая часть – это многочлен первой степени $f_1(x) = x$. Значит надо искать частное решение в виде: $y_1^* = Ax + B$. Найдём первую и вторую производные частного решения $(y_1^*)' = A$, $(y_1^*)'' = 0$ и подставим их в уравнение (4.25):

$$0 + 4\,(Ax + B) = x;$$

$$4Ax + 4B = x. \tag{4.27}$$

Составим систему уравнений, выражающих равенство коэффициентов при соответствующих степенях *x* левой и правой части уравнения (4.27):

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 4A = 1, \\ 4B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тогда частное решение уравнения (4.25) будет иметь вид:

$$y_1^* = \tfrac{1}{4}x. \tag{4.28}$$

4. Найдём частное решение уравнения (4.26). Правая часть уравнения – это произведение многочлена нулевой степени и показательной функции $f_2(x) = 3e^x$, где $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 4 = 0$. Значит надо искать частное решение в виде:

$$y_2^* = Ae^x. \tag{4.29}$$

Найдём первую и вторую производные этого частного решения $(y_2^*)' = Ae^x$, $(y_2^*)'' = Ae^x$ и подставим их в уравнение (4.26):

$$Ae^x + 4\,Ae^x = 3e^x;$$

$$5Ae^x = 3e^x; \quad |{:}e^x$$

$$5A = 3;\ A = \tfrac{3}{5}.$$

Полученный коэффициент *A* подставим в функцию (4.29), и тогда частное решение уравнения (4.26) будет имеет вид:

$$y_2^* = \tfrac{3}{5}e^x. \tag{4.30}$$

5. Суммируем частные решения (4.28) и (4.30) и получим частное решение данного уравнения.

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{5}e^x. \tag{4.31}$$

6. Суммируем общее решение соответствующего однородного уравнения (4.24), сумму частных решений (4.31) и получим общее решение данного уравнения.

Ответ: $y = \bar{y} + y^* = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x$.

## УПРАЖНЕНИЯ № 7

**1.** Решите однородные линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, если дискриминант больше нуля:

а) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' - y' - 2y = 0$;

в) $y'' - 9y = 0,$ если $y = 2,\ y' = 6$ при $x = 0$.

**2.** Решите однородные линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, если дискриминант равен нулю:

а) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0,$ если $y = 3,\ y' = -1$ при $x = 0$.

**3.** Решите однородные линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, если дискриминант меньше нуля:

а) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 0,$ если $y = 1,\ y' = 1$ при $x = 0$.

**4.** Решите неоднородные линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида:

а) $y'' - 2y' + y = 2$;

б) $y'' - 2y' + y = x - 4$;

в) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

г) $y'' - 2y = xe^{-x}$;

д) $y'' - 2y = 2(x^2 + 1)$.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

После изучения раздела «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами» нужно обязательно выполнить нижеследующие тестовые задания и проверить полученные результаты в разд. «Ответы». После проверки свой результат сравнить с указанной после теста шкалой, чтобы определить, насколько усвоен изученный теоретический и практический материал. Если оценка неудовлетворительная, то учебный материал данного раздела пособия не усвоен, и продолжать дальнейшее обучение нельзя, потому что не будет хватать знаний для изучения последующего учебного материала. Надо снова изучить всё, что написано выше, и/или обратиться к другим учебникам и учебным пособиям из раздела «Библиографический список» настоящего пособия.

**Тест 7 (теория). Линейные ДУ второго порядка**

*Задание.* Ответьте на следующие вопросы теста, выбрав правильный, на ваш взгляд, ответ. Среди предложенных ответов правильных может быть более одного. Ответы дайте в кодированном виде. Например: 1а, 2ав, 3гд, и т.д. При проверке решения не указанный правильный ответ или указанный неправильный ответ оценивается как ошибка.

1. Установите соответствие между названием ДУ и его видом (записью уравнения в виде формулы):

| | |
|---|---|
| 1) линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка; | а) $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$; |
| 2) линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка; | б) $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$; |
| 3) линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами; | в) $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$; |
| 4) линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. | г) $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$. |

2. Почему все, перечисленные выше в п. 1, виды уравнений называют линейными?

а) потому что у них есть первая производная функции $y$;

б) потому что у них есть вторая производная функции $y$;

в) потому что у них есть функция $y$ в первой степени.

3. Почему все, перечисленные выше в п. 1, виды уравнений называют уравнениями второго порядка?

а) потому что у них могут быть $y$ или $x$ в квадрате;

б) потому что у них есть первая производная функции $y$;

в) потому что у них есть вторая производная функции $y$;

г) потому что у них есть функция $y$ в первой степени.

4. Если функция $y_1(x)$ является решением уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, то будет ли функция $y_2(x) = -5{,}3\ y_1(x)$ также являться решением этого уравнения?

а) да; б) нет; в) может быть, а может и не быть решением этого уравнения.

5. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, то может ли произведение этих функций также являться решением этого уравнения?

а) да; б) нет; в) может быть, а может и не быть решением этого уравнения.

6. Чем могут являться функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ для уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) оба являются общими решениями;

б) одно общее решение, а другое – частное;

в) оба являются частными решениями.

7. Установите соответствие между первым и вторым столбцами:

| | |
|---|---|
| 1) два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ являются линейно независимыми, если…; | а) $y_2(x) = ay_1(x)$ |
| 2) два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ являются линейно зависимыми, если… | б) $y_2(x) \neq ay_1(x)$ |

8. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно зависимыми частными решениями уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, то могут ли они быть в составе общего решения этого уравнения?

а) да; б) нет; в) могут быть, а могут и не быть решением этого уравнения.

9. Какой вид может иметь общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) $y = C_1y_1 + C_2y_2$; в) $y = \frac{C_2y_2}{C_1y_1}$;

б) $y = \frac{C_1y_1}{C_2y_2}$; г) $y = C_2y_2 - C_1y_1$.

10. Какие функции являются линейно независимыми?

а) $f_1(x) = 8^{7x}$ и $f_2(x) = 8^{-5x}$;

б) $f_1(x) = \frac{2}{3}^{3x-2}$ и $f_2(x) = \frac{2}{3}^{3x-4}$;

в) $f_1(x) = 0{,}2^{x-1}$ и $f_2(x) = 0{,}2^{7x-1}$;

г) $f_1(x) = e^{5-x}$ и $f_2(x) = e^{9-x}$.

11. Какую функцию взяли для поиска частного решения уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) $y = C_1y_1 + C_2y_2$; г) $y = e^{kx}$;

б) $y' = ke^{kx}$; д) $y = 2^{kx}$.

в) $y'' = k^2e^{kx}$;

12. Как составить характеристическое уравнение для решения уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) надо заменить $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k^1$, $y$ на $k^0$;

б) надо заменить $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k$, $y$ на 1;

в) надо заменить $y''$ на $x^2$, $y'$ на $x$, $y$ на 1;

г) надо заменить $y''$ на $x^2$, $y'$ на $x^1$, $y$ на $x^0$.

13. Как используются, полученные после решения характеристического уравнения значения корней $k_1$ и $k_2$, для решения уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) по их количеству определяется вид решения этого уравнения;

б) они подставляются в это уравнение, чтобы получить верное числовое равенство;

в) они подставляются в общий вид решения уравнения в показатель степени функции $y = e^{kx}$;

г) по их значению определяется, сколько решений будет иметь данное уравнение.

14. От чего зависит вид решения уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$?

а) от значения коэффициентов $p$ и $q$;

б) от значения корней характеристического уравнения;

в) от значения дискриминанта характеристического уравнения;

г) от значений произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$.

15. Если дискриминант $D$ характеристического уравнения $k^2 + p \cdot k + q = 0$ имеет значение … (смотри столбец 1), то решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ имеет вид … (смотри столбец 2).Установите соответствие между первым и вторым столбцами.

1) $D > 0$; а) $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$;

2) $D = 0$; б) $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$;

3) $D < 0$. с) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Всего существенных операций $p$ = 27 (разд. «Ответы»), шкала оценивания.

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 27–25 | 0–2 | «Отлично» |
| 89–80 | 24–22 | 3–5 | «Хорошо» |
| 79–70 | 21–19 | 6–8 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 18 и более | 9 и более | «Неудовлетворительно» |

### Тест 8 (практика). Линейные ДУ второго порядка

В этом тесте предложены уравнения, которые являются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, которые решаются через составление характеристического уравнения, его решение и выбора вида записи общего решения (прил. 2, подразд. 3). Вам надо решить эти уравнения и сравнить с эталоном. В эталоне указаны существенные операции $p$, количество которых зависит от того, сколько надо выполнить умственных операций для решения данного уравнения. Всякая ошибка или неверный ход решения влечёт за собой исключение операций из общего количества. Подсчитав число выполненных существенных операций, и сравнив их со шкалой, приведённой ниже, Вы узнаете о той оценке, которую Вы получаете за своё решение. Если оценка неудовлетворительная, то материал данного раздела не усвоен и надо снова его изучить. В противном случае успех дальнейшего обучения не гарантирован.

1. Решить уравнение $3y'' + 7y' + 4y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{2}{3}$.

Э т а л о н. Для решения данного уравнения требуется умение составлять характеристическое уравнение и решать квадратные уравнения (прил. 2, подразд. 2.3 и 2.4), записывать общее решение данного вида уравнений (прил. 2, разд. 3).

| Этап решения уравнения $3y'' + 7y' + 4y = 0$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| 1. Составим и решим характеристическое уравнение: $3k^2 + 7k + 4 = 0$ | 3 |
| $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$ | 1 |
| Уравнение имеет 2 действительных корня | 1 |
| $k = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3}$; $k_1 = -1$; $k_2 = -\frac{4}{3}$ | 3 |
| $y_{\text{общее}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$ | 3 |
| 2. $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y' = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 1 |
| $\begin{cases} C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x} = 1, \\ \left(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}\right)' = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x} = 1, \\ \left(-C_1 e^{-x} - \frac{4}{3} C_2 e^{-\frac{4}{3}x}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 e^{-0} + C_2 e^{-\frac{4}{3} \cdot 0} = 1, \\ \left(-C_1 e^{-0} - \frac{4}{3} C_2 e^{-\frac{4}{3} \cdot 0}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 - \frac{4}{3} C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ -(1 - C_2) - \frac{4}{3} C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ -\frac{1}{3} C_2 = -\frac{2}{3} + 1 \end{cases}$ | 3 |
| $\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ -\frac{1}{3} C_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ | 1 |
| $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1; \end{cases}$ | 2 |
| $y_{\text{частное}} = 2e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x}$ | 2 |
| Всего существенных операций $p$ | 30 |

Шкала оценивания

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 30–27 | 0–3 | «Отлично» |
| 89–80 | 28–25 | 4–6 | «Хорошо» |
| 79–70 | 24–21 | 7–9 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 20 и более | 10 и более | «Неудовлетворительно» |

2. Решить уравнение $9y'' + 12y' + 4y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

Эталон. Для решения данного уравнения требуется умение составлять характеристическое уравнение и решать квадратные уравнения (прил. 2, подразд. 2.3, 2.4), записывать общее решение данного вида уравнений (прил. 2, разд. 3), находить производную произведения двух функций.

| Этап решения уравнения $9y'' + 12y' + 4y = 0$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| 1.Составим и решим характеристическое уравнение: $9k^2 + 12k + 4 = 0$ | 3 |
| $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$ | 1 |
| Уравнение имеет 1 действительный (двукратный) корень | 1 |
| $k = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9}$; $k_{1,2} = -\frac{2}{3}$ | 2 |
| $y_{\text{общее}} = e^{-\frac{2}{3}x}(C_1 + C_2 x)$ | 2 |
| 2. $y(0) = 2, y'(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 2, \\ y' = -1 \end{cases}$ | 1 |
| $\begin{cases} e^{-\frac{2}{3}x}\,(C_1 + C_2 x) = 2, \\ \left(e^{-\frac{2}{3}x}\,(C_1 + C_2 x)\right)' = -1 \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} e^{-\frac{2}{3}x}\,(C_1 + C_2 x) = 2, \\ \left(-\frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x}\,(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}\right) = -1 \end{cases}$ | 6 |
| $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{2}{3}\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) = 2, \\ \left(-\frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}0}(C_1 + C_2 \cdot 0) + C_2 e^{-\frac{2}{3}\cdot 0}\right) = -1 \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 = 2, \\ -\frac{2}{3} C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$ | 2 |

| Этап решения уравнения $9y'' + 12y' + 4y = 0$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| $\begin{cases} C_1 = 2, \\ -\frac{2}{3}\, 2 + C_2 = -1 \end{cases}$ | 1 |
| $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = \frac{4}{3} - 1 \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ | 1 |
| $y_{\text{частное}} = e^{-\frac{2}{3}x}\left(2 + \frac{1}{3}x\right)$ | 2 |
| Всего существенных операций $p$ | 28 |

Шкала оценивания

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 28–26 | 0–2 | «Отлично» |
| 89–80 | 25–23 | 3–5 | «Хорошо» |
| 79–70 | 22–20 | 6–8 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 19 и более | 9 и более | «Неудовлетворительно» |

3. Решить уравнение $2y'' - 2y' + 5y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.

Эталон. Для решения данного уравнения требуется умение составлять характеристическое уравнение и решать квадратные уравнения (прил. 2, подразд. 2.3, 2.4), записывать общее решение данного вида уравнений (прил. 2, разд. 3), находить производную произведения двух функций.

| Этап решения уравнения $2y'' - 2y' + 5y = 0$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| 1. Составим и решим характеристическое уравнение: $2k^2 - 2k + 5 = 0$ | 3 |
| $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 4 - 40 = -36$ | 1 |
| Уравнение не имеет действительных корней, но имеет комплексные сопряжённые | 2 |
| $k = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 6i}{2 \cdot 2}$; $k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ | 6 |
| $y_{\text{общее}} = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x\right)$ | 3 |
| 2. $y(0) = -2, y'(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -2, \\ y' = 3 \end{cases}$ | 1 |

| Этап решения уравнения $2y'' - 2y' + 5y = 0$ | Существенная операция $p$ |
|---|---|
| $\begin{cases} e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right) = -2, \\ \left(e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right)\right)' = 3 \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right) = -2, \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right) + e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{3}{2}C_1\, sin\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}C_2\cos\frac{3}{2}x\right) = 3 \end{cases}$ | 8 |
| Если $x = 0$, то $\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\left(C_1\cos\frac{3}{2}\cdot 0 + C_2\sin\frac{3}{2}\ 0\right) = -2, \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\,0}\left(C_1\cos\frac{3}{2}\ 0 + C_2\sin\frac{3}{2}\ 0\right) + e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\left(-\frac{3}{2}C_1\, sin\frac{3}{2}\ 0 + \frac{3}{2}C_2\cos\frac{3}{2}\ 0\right) = 3 \end{cases}$ | 10 |
| $\begin{cases} C_1 = -2, \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 3 \end{cases}$ | 7 |
| $\begin{cases} C_1 = -2, \\ \frac{1}{2}\ (-2) + \frac{3}{2}C_2 = 3 \end{cases}$ | 1 |
| $\begin{cases} C_1 = -2, \\ \frac{3}{2}C_2 = 3 + 1 \end{cases}$ | 2 |
| $\begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$ | 2 |
| $y_{\text{частное}} = e^{\frac{1}{2}x}\left(-2\cos\frac{3}{2}x + \frac{8}{3}\sin\frac{3}{2}x\right)$ | 2 |
| Всего существенных операций $p$ | 50 |

Шкала оценивания

| Интервал, % | Интервал для $p$ | Интервал ошибок | Оценка (отметка) |
|---|---|---|---|
| 100–90 | 50–45 | 0–5 | «Отлично» |
| 89–80 | 46–41 | 6–10 | «Хорошо» |
| 79–70 | 40–35 | 11–15 | «Удовлетворительно» |
| 69 и меньше | 36 и более | 16 и более | «Неудовлетворительно» |

🕮 ***Рекомендуемая литература:*** [1, гл. IV, § 3, п. 1–4]; [2, гл. XXII, § 7–13]; [3, гл. 18, § 3, п. 3.4–3.6]; [4, гл. 30, § 30.3, 30.4]; [5, гл. 12, § 12.8, 12.9]; [6, гл. I, § 3, п. 3.1, 3.2], [7, гл. XIII, § 20–24], [8, гл. 4], [9, гл. 15, § 3, 4].

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

**Вопросы к коллоквиуму**

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных.

2. Решение дифференциального уравнения, общие и частные решения. Задача Коши. Порядок дифференциального уравнения.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Геометрический смысл решения дифференциального уравнения. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.

4. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделёнными и разделяющимися переменными.

5. Однородная функция степени $k$ и нулевой степени. Однородные дифференциальные уравнения и их решение.

6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и их решение. Метод Бернулли.

7. Уравнения Бернулли и метод их решения.

8. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка и их решение.

9. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и их решение. Характеристическое уравнение.

10. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида и их решение.

**Домашняя работа по решению задач**

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2, гл. XIII. Выполнить упражнения: № 1–196.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2, гл. I, § 1–5, с. 9–46.

3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Гл. 12. Выполнить упражнения: № 12.25–12.66.

4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2, гл. IV, § 2, 3. Выполнить: № 550–565, 603–624, 696–710.

## ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ[3]

### Вариант 1

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y' = e^{x+y}$.

**2.** $(a^2 + y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax - x^2}dy = 0$ при начальных условиях $y(a) = 0$.

**3.** $(y^4 - 2x^3 y)\,dx + (x^4 - 2xy^3)\,dy = 0$.

**4.** $x^2 y' + xy + 1 = 0$ при начальных условиях $y(1) = 3$.

**5.** $y'' = (x+1)\,ln\,x - \dfrac{1}{x^4} + 2x$.

**6.** $x^2 y'' + xy' = 1$.

**7.** $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$.

**8.** $3y'\,y'' = 2y$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

**9.** $y'' - 3y' - 4y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -2$.

**10.** $y'' + 16y' + 64y = 0$.

**11.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

**12.** $y'' + 3y' + 2y = x^2 + e^{-2x} + 2e^{3x}$.

**13.** $25y'' + 5y' - 2y = 3e^{\frac{-2x}{5}} + x^2 - 2x$.

**14.** $y'' + 16y = cos\,4x - sin\,3x$.

**15.** $y'' + y = \dfrac{1}{sin\,x}$.

### Вариант 2

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(y^2 + xy^2)y' + x^2 = 0$.

**2.** $y' + y\,cos\,x = cos\,x$ при начальных условиях $y(0) = 0$.

**3.** $(x^2 + xy)\,y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

---

[3] Гамоля Л.Н., Ющенко Н.Л. Дифференциальные уравнения : методическое пособие по выполнению расчетно-графической работы. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2014. 56 с.

**4.** $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ при начальных условиях $y(1) = 0$.

**5.** $y'' = x^4 - \frac{1}{x^2} + sin^2 x$.

**6.** $y'' = -\frac{x}{y'}$.

**7.** $(y')^2 - yy'' = y^2 y'$.

**8.** $2y'' = 3y^2$ при начальных условиях $y(-2) = 1;\ y'(-2) = -1$.

**9.** $y'' - 2y' - 3y = 0$ при начальных условиях $y(0) = -1;\ y'(0) = 3$.

**10.** $y'' + 14y' + 49y = 0$.

**11.** $y'' + 12y' + 37y = 0$.

**12.** $2y'' - y' - y = x + 2 + 2e^x - e^{-x}$.

**13.** $y'' - 14y' + 49y = 5e^{7x} + cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}$.

**14.** $y'' - 2y' + 5y = 3e^x + sin2x$.

**15.** $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

## Вариант 3

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0$.

**2.** $y'\sqrt{a^2 + x^2} = y$ при начальных условиях $y(0) = a$.

**3.** $(x^2 - 2xy - y^2)\,y' + y^2 = 0$.

**4.** $y = x\,(y' - x\cos x)$ при начальных условиях $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$.

**5.** $y'' = e^{-4x} + sin2x + 7\sqrt{x}$.

**6.** $(x+1)y'' - (x+2)y' = e^x (x+1)^2$.

**7.** $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

**8.** $2\,(y')^2 = y''(y-1)$ при начальных условиях $y(1) = 2;\ y'(1) = -1$.

**9.** $y'' - 5y' + 4y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y'(0) = 3$.

**10.** $25y'' + 5y' - 4y = 0$.

**11.** $y'' + 4y = 0$.

**12.** $y''-7y'+12y=x^3-2x+4e^{3x}$.

**13.** $y''+14y'+49y=e^{-7x}+3e^{3x}$.

**14.** $y''-y'+y=2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+x-2$.

**15.** $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$.

## Вариант 4

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y'-xy^2=2xy$.

**2.** $y'=(2y+1)\,ctgx$ при начальных условиях $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

**3.** $(x^2+2xy-y^2)\,dx+(y^2+2xy-x^2)\,dy=0$.

**4.** $e^{x^2}y'+2\,xye^{x^2}=x\sin x$ при начальных условиях $y(0)=2$.

**5.** $y''=\cos^2 x+\frac{3}{x^3}-\sqrt{x}$.

**6.** $(1+x^2)y''-12xy'=0$.

**7.** $y''+2y(y')^3=0$.

**8.** $y^4-y^3y''=1$ при начальных условиях $y(0)=\sqrt{2};\ y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**9.** $12y''+5y'=0$ при начальных условиях $y(0)=2;\ y'(0)=2$.

**10.** $16y''+24y'+9y=0$.

**11.** $y''+6y'+13y=0$.

**12.** $y''-2y'=3x+4e^{2x}-10$.

**13.** $y''-16y'+64y=6e^{8x}-x^2-7x$.

**14.** $y''+4y'+13y=\cos 3x-e^{2x}$.

**15.** $y'+4y=2tgx$.

## Вариант 5

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $e^x\sin^3 y+y'\,(1+e^{2x})\cos y=0$.

**2.** $y'\,x^3=2y$ при начальных условиях $y(1)=1$.

**3.** $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$.

**4.** $y' - \frac{2x+1}{x^2+x+1}y = -\frac{x^2+x+1}{x-1}$ при начальных условиях $y(0)=3$.

**5.** $y'' = \frac{2x}{e^{4x} - 3x^5 + sin\frac{x}{2}}$.

**6.** $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$.

**7.** $y'' tgy = 2\,(y')^2$.

**8.** $y'' = xy' + x$ при начальных условиях $y(0)=2;\ y'(0)=0$.

**9.** $2y'' + 5y' = 0$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=4$.

**10.** $25y'' + 30y' + 9y = 0$.

**11.** $y'' + 4y' + 29y = 0$.

**12.** $4y'' + 16y' + 15y = e^{-10x} + x^2 + x$.

**13.** $y'' + 16y' + 64y = 3e^{-8x} + 3 - 2x$.

**14.** $y'' - 4y' + 5y = x + sin\,x - cos\,x$.

**15.** $y'' + y = 2sec^3 x$.

## Вариант 6

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $3y^2y' + 16x = 2xy^3$.

**2.** $xy' + y = y^2$ при начальных условиях $y(1)=0,5$.

**3.** $y^2dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

**4.** $xy' + (x+1)\,y = 3x^2e^{-x}$ при начальных условиях $y(1) = \frac{1}{e}$.

**5.** $y'' = \frac{5}{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} + cos\,4x$.

**6.** $y'' = \frac{1}{2y'}$.

**7.** $y'' = 1 - (y')^2$.

**8.** $xy'' + y' + x = 0$ при начальных условиях $y(1)=0;\ y'(1)=0$.

**9.** $2y'' + y' - y = 0$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=-1$.

**10.** $y'' + 12y' + 36y = 0$.

**11.** $y'' + 2y' + 5y = 0$.

**12.** $y'' - y' = x^2 + 6 - e^x$.

**13.** $y''+4y'+4y=7e^{-2x}+x^2$.

**14.** $4y''+25y=\cos 5x-3\sin\frac{5x}{2}$.

**15.** $y''+y=tgx$.

## Вариант 7

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $2x\sqrt{1-y^2}=y'\,(1+x^2)$.

**2.** $x^2dy+(x-a)\,dx=0$ при начальных условиях $y(1)=2$.

**3.** $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

**4.** $y'-ye^x=2xe^{e^x}$ при начальных условиях $y(0)=e$.

**5.** $y''=(x+1)\,e^x-\frac{4}{x^2}$.

**6.** $y''+y'\,tgx=\sin 2x$.

**7.** $y'\,(1+(y')^2)=ay''$.

**8.** $yy''-(y')^2=y^4$ при начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

**9.** $y''-7y'+6y=0$ при начальных условиях $y(0)=2$; $y'(0)=-1$.

**10.** $16y''+8y'+y=0$.

**11.** $5y''-6y'+5y=0$.

**12.** $y''-3y'+2y=6x+\sin 3x+e^{2x}$.

**13.** $y''+6y'+9y=-e^{-3x}+5x+7$.

**14.** $9y''+4y=x-3+3\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}$.

**15.** $y''+y=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

## Вариант 8

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $e^y(1+x^2)\,dy-2x\,(1+e^y)\,dx=0$.

**2.** $y'=2\sqrt{y}\,\ln x$ при начальных условиях $y(e)=1$.

**3.** $(y-x)ydx+x^2dy=0$.

**4.** $y'+y=x^2$ при начальных условиях $y(0)=1$.

**5.** $y'' = sin^3 x - \sqrt{x}$.

**6.** $y'' = x - \dfrac{y}{x}$.

**7.** $yy'' = y^2 y' + (y')^2$.

**8.** $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0;\ y'(0) = 3$.

**9.** $y'' - 4y' + 3y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 6;\ y'(0) = 10$.

**10.** $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

**11.** $y'' - 4y' + 5y = 0$.

**12.** $y'' - 4y' = x + 4e^{4x}$.

**13.** $y'' + 8y' + 16y = x^2 + 5 - e^{-4x}$.

**14.** $9y'' + y = e^{3x} - sin\dfrac{x}{3}$.

**15.** $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

## Вариант 9

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $x^3 y' \sin y = 2$.

**2.** $dy + ytgxdx = 0$ при начальных условиях $y(\pi) = 2$.

**3.** $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2 y)\,dy = 0$.

**4.** $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$ при начальных условиях $y(0) = 2e$.

**5.** $y'' = x^{\frac{4}{5}} - cos^3 x$.

**6.** $y'' + y'\,tgx = sin\,x\,cos\,x$.

**7.** $2yy'' = 1 + (y')^2$.

**8.** $1 + (y')^2 = 2yy''$ при начальных условиях $y(1) = 1;\ y'(1) = 1$.

**9.** $3y'' - 2y' - 8y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1;\ y'(0) = 1$.

**10.** $9y'' + 6y' + y = 0$.

**11.** $y'' - y' + y = 0$.

**12.** $y'' - 9y = xe^{3x} + x^2 - 3$.

**13.** $y'' - 8y' + 16y = sin3x + 2cos3x - e^{4x}$.

**14.** $4y'' + y = 2\cos\frac{x}{2} - x + 5.$

**15.** $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$

## Вариант 10

Решите дифференциальное уравнение.

**1.** $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0.$

**2.** $xydx + (x+1)\,dy = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1.$

**3.** $(x^2 + y^2)\,dx = xydy.$

**4.** $y + xy' = a\,(1 + xy)$ при начальных условиях $y\left(\frac{1}{a}\right) = -a.$

**5.** $y'' = \frac{x}{e^x} - 5x^3 + \cos x.$

**6.** $xy'' - xy' = x^2e^{2x}.$

**7.** $y'' = e^{2y}.$

**8.** $yy'' + (y')^2 = (y')^3$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 1.$

**9.** $y'' + y' - 2y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 3.$

**10.** $y'' - 6y' + 9y = 0.$

**11.** $y'' + 16y = 0.$

**12.** $y'' - 4y' - 5y = x^2 + 3e^{5x}.$

**13.** $y'' + 10y' + 25y = x + 4 - 7e^{-5x}.$

**14.** $y'' - 2y' + 10y = x^2 - 7x + \cos 5x - \sin 5x.$

**15.** $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2 + 1}.$

## Вариант 11

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y\,(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2.$

**2.** $y'\,(x^2 - 4) = 2xy$ при начальных условиях $y(3) = 2.$

**3.** $x^2y' = x^2 + xy + y^2.$

**4.** $(1 - x^2)y' + xy = 1$ при начальных условиях $y(1) = 1.$

**5.** $y'' = \cos 3x - \sin 5x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

**6.** $y'' = \dfrac{1-(y')^2}{2x}$.

**7.** $2yy'' = (y')^2$.

**8.** $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$ при начальных условиях $y(1) = 0;\ y'(1) = 0$.

**9.** $y'' - 2y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1;\ y'(0) = 5$.

**10.** $y'' + 2y' + y = 0$.

**11.** $9y'' + y = 0$.

**12.** $y'' - 5y' + 6y = 7 - 3x - 2e^{3x}$.

**13.** $4y'' + 4y' + y = 7 - 2x + 3e^{-\frac{x}{2}}$.

**14.** $5y'' - 6y' + 5y = 2e^{\frac{3x}{5}} - 7\cos 3x$.

**15.** $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

## Вариант 12

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $x^2y^2y' + 1 = y$.

**2.** $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$.

**3.** $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

**4.** $y' - y = -2e^{-x}$ при начальных условиях $y(0) = 2$.

**5.** $y'' = 4\sin 7x + 3\cos x - \dfrac{1}{x^4}$.

**6.** $y'' = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)y'$.

**7.** $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

**8.** $(y'')^2 = y'$ при начальных условиях $y(0) = 3;\ y'(0) = \dfrac{1}{4}$.

**9.** $y'' - 7y' + 12y = 0$ при начальных условиях $y(0) = -2;\ y'(0) = 8$.

**10.** $y''+6y'+9y=0$.

**11.** $4y''+25y=0$.

**12.** $y''-6y'+8y=x^2+4x-e^{4x}$.

**13.** $4y''-4y'+y=3x^2-x+2e^{\frac{x}{2}}$.

**14.** $y''-2y'+2y=2e^x-sin3x$.

**15.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$.

## Вариант 13

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $3e^x tgydx+(1-e^x)sec^2 ydy=0$.

**2.** $x^2y'+cos2y=1$ при начальных условиях $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

**3.** $y'=\dfrac{y}{x}\left(ln y-ln x\right)$.

**4.** $y'cosx-ysinx=sin2x$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

**5.** $y''=x+sinx$.

**6.** $y''=\dfrac{y'}{x}+1$.

**7.** $yy''=1+(y')^2$.

**8.** $y''=\dfrac{y'}{x}\left(1+ln\dfrac{y'}{x}\right)$ при начальных условиях $y(1)=\dfrac{1}{2}$; $y'(1)=1$.

**9.** $2y''-y'-y=0$ при начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=-7$.

**10.** $y''-8y'+16y=0$.

**11.** $y''+25y=0$.

**12.** $y''+2y'=x-3+e^{-2x}$.

**13.** $y''-10y'+25y=4-x^2+3e^{5x}$.

**14.** $y''+2y'+5y=3e^{-x}+cos7x$.

**15.** $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

## Вариант 14

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $xy\,(1+x^2)\,\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$.

**2.** $xy'=\dfrac{y}{ln\,x}$ при начальных условиях $y(e)=1$.

**3.** $(1+e^{\frac{y}{x}})\,dy+e^{\frac{y}{x}}(1-\dfrac{y}{x})\,dx=0$.

**4.** $y'+2y=e^{-x}$ при начальных условиях $y(0)=3$.

**5.** $y''=e^x+3x^2$.

**6.** $y''\,x\,ln\,x=y'$.

**7.** $y''=2yy'$.

**8.** $(y''\,x-y')=x^3$ при начальных условиях $y(1)=1$; $y'(1)=0$.

**9.** $y''+3y'+2y=0$ при начальных условиях $y(0)=7$; $y'(0)=-7$.

**10.** $y''-10y'+25y=0$.

**11.** $y''-2y'+10y=0$.

**12.** $y''-4y=x-x^2+2e^{2x}$.

**13.** $32y''-36y'+4y=sin\dfrac{x}{2}+3e^{2x}$.

**14.** $y''+a^2y=3\,cos\,ax-2\,sin\,ax+e^{ax}$.

**15.** $y''+4y=ctg\,2x$.

## Вариант 15

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(1+e^x)yy'=e^x$.

**2.** $y'\,tgx-y=1$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

**3.** $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$.

**4.** $(xy'-1)\,ln\,x=2y$ при начальных условиях $y(e)=2$.

**5.** $y''=4\,cos\,x-sin\,x$.

**6.** $(1-x^2)\,y''-xy'=0$.

**7.** $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$.

**8.** $(1 + x^2)y'' - [(y')^2 + 1] = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

**9.** $y'' + 3y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -2$.

**10.** $4y'' + 4y' + y = 0$.

**11.** $y'' - 6y' + 13y = 0$.

**12.** $y'' - 3y' - 4y = 7x + e^{-x} + 5e^{2x}$.

**13.** $9y'' + 6y' + y = cos\,3x - 7e^{-\frac{x}{3}}$.

**14.** $y'' + 4y' + 29y = e^{-2x} + cos\,3x$.

**15.** $y''cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}cos\frac{x}{2} = 1$.

## Вариант 16

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$.

**2.** $\dfrac{dx}{cos^2 x\,cos\,y} = -ctgx\,sin\,ydy$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \pi$.

**3.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

**4.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{1 + x} + x^2 = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$.

**5.** $y'' = x + e^{-x}$.

**6.** $x(y'' + 1) + y' = 0$.

**7.** $(y')^2 + yy'' = 0$.

**8.** $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$ при начальных условиях $y(2) = 2$; $y'(2) = 1$.

**9.** $y'' - 4y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

**10.** $y'' - 2y' + y = 0$.

**11.** $y'' - 6y' + 10y = 0$.

**12.** $y'' - 2y' - 8y = e^{-2x} + x^3 + 2$.

**13.** $9y'' - 6y' + y = x - 5 + 2e^{\frac{x}{3}}$.

**14.** $4y''-20y'+25y=2e^{\frac{5x}{2}}-\sin\frac{5}{2}x$.

**15.** $y''+2y'+y=xe^{x}+\frac{1}{xe^{x}}$.

## Вариант 17

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y'=a^{x+y}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

**2.** $y\ln y dx+xdy=0$ при начальных условиях $y(1)=1$.

**3.** $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

**4.** $y'+y\cos x=\sin x\cos x$ при начальных условиях $y(0)=2$.

**5.** $y''=\frac{3}{x^{2}}+xe^{x}$.

**6.** $(y'')^{2}=y'$.

**7.** $yy''-(y')^{2}=0$.

**8.** $y^{3}y''=-1$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=1$.

**9.** $y''-8y'+7y=0$ при начальных условиях $y(0)=3;\ y'(0)=-4$.

**10.** $y''-4y'+4y=0$.

**11.** $16y''+9y=0$.

**12.** $y''-5y'+4y=x+2e^{x}-3e^{4x}$.

**13.** $y''+2y'+y=4e^{-x}+\sin 2x$.

**14.** $y''+6y'+13y=e^{-3x}+6\sin 2x$.

**15.** $y''+2y'+5y=e^{-x}(\cos^{2}x+tgx)$.

## Вариант 18

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $e^{y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=1$.

**2.** $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$ при начальных условиях $y(\pi)=\frac{\pi}{2}$.

**3.** $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

**4.** $y'\cos x - y\sin x = 2x$ при начальных условиях $y(0) = 0$.

**5.** $y'' = 3\ln x + \sin 3x$.

**6.** $xy'' = y'$.

**7.** $y^3 y'' = 1$.

**8.** $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ при начальных условиях $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ; $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**9.** $y'' - y = 0$ при начальных условиях $y(0) = -6$; $y'(0) = 2$.

**10.** $y'' + 4y' + 4y = 0$.

**11.** $16y'' + y = 0$.

**12.** $12y'' + 5y' = 3 - x^2 + 2e^{-3x}$.

**13.** $y'' - 6y' + 9y = 7e^{3x} + x^2 - 7$.

**14.** $y'' - 8y' + 17y = 2\cos x - e^{3x}$.

**15.** $y'' + y = ctgx$.

## Вариант 19

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y - x\frac{dy}{dx} = 1 + x^2\frac{dy}{dx}$.

**2.** $y'ctgx + y = 2$ при начальных условиях $y(0) = -1$.

**3.** $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

**4.** $xy' + 2y = x^2$ при начальных условиях $y(1) = 1$.

**5.** $y'' = \cos^2 x + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

**6.** $xy'' = (1 + x^2)y'$.

**7.** $y'' = 2 - y$.

**8.** $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

**9.** $y'' + y' - 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -5$.

**10.** $y'' + 8y' + 16y = 0$.

**11.** $9y'' + 4y = 0$.

**12.** $2y'' + 5y' = x + 2 - 7e^{2x}$.

13. $y''-2y'+y=5e^{x}+3x-5$.

14. $y''+4y=2\sin 2x-x^{2}+2x$.

15. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$.

## Вариант 20

Решите дифференциальные уравнения.

1. $e^{x}(1-x)\,dx+e^{y}\sin y dy=tgy dy$.

2. $x^{2}y'+y^{2}=0$ при начальных условиях $y(-1)=1$.

3. $\dfrac{xy'-y}{2}=tg\dfrac{y}{x}$.

4. $y'x\ln x-y=3x^{2}\ln^{2}x$ при начальных условиях $y(2)=1$.

5. $y''=\sin^{2}x+4x^{\frac{2}{3}}$.

6. $xy''=y'+x^{2}$.

7. $y''=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

8. $y''=e^{2y}$ при начальных условиях $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

9. $y''+y'=0$ при начальных условиях $y(0)=3$; $y'(0)=-6$.

10. $y''+10y'+25y=0$.

11. $4y''+y=0$.

12. $y''+3y'=x+2+4e^{-3x}$.

13. $y''-4y'+4y=\cos 5x+3e^{2x}$.

14. $y''-4y'+13y=\cos 3x-7\sin 3x+x-5$.

15. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

## Вариант 21

Решить дифференциальные уравнения.

1. $y^{2}\sin x dx+\cos^{2}x\ln y dy=0$.

2. $2x^{2}yy'+y^{2}=2$ при начальных условиях $y(1)=1$.

3. $x^{2}-y^{2}=-2xyy'$.

**4.** $x^2 + xy' = y$ при начальных условиях $y(1) = 0$.

**5.** $y'' = \dfrac{5}{x} + 7\sin 5x$.

**6.** $y''\, x\ln x = y'$.

**7.** $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$.

**8.** $y'' = 2yy'$ при начальных условиях $y(0) = 1;\ y'(0) = 1$.

**9.** $y'' - 4y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y'(0) = 5$.

**10.** $4y'' - 4y' + y = 0$.

**11.** $y'' - 2y' + 5y = 0$

**12.** $y'' - 4y = x^2 + 3 + e^{2x}$.

**13.** $32y'' + 36y' + 4y = \cos 3x + 2e^{-\frac{1}{4}x}$.

**14.** $y'' + 12y' + 37y = \sin x + x^2 + 2x$.

**15.** $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

## Вариант 22

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(1 + y^2)\, dx - (2y + \sqrt{1 + y^2})(1 + x)^{\frac{3}{2}} dy = 0$.

**2.** $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0$ при начальных условиях $y(\sqrt{8}) = 1$.

**3.** $ydx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0$.

**4.** $(x^2 + x)\, y' = 2y + 1$ при начальных условиях $y(0) = 3$.

**5.** $y'' = \sqrt[3]{x} + 7\cos 3x + 4x$.

**6.** $xy'' = y'\ln \dfrac{y}{x}$.

**7.** $2yy'' + (y')^2 = 0$.

**8.** $y^3 y'' = -1$ при начальных условиях $y(1) = 1;\ y'(1) = 0$.

**9.** $y'' + 2y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1;\ y'(0) = 3$.

**10.** $9y'' - 6y' + y = 0$.

**11.** $y'' + 4y' + 13y = 0$

**12.** $y'' - 8y' + 7y = x^2 + 3x + 2e^{7x}$.

**13.** $16y'' - 8y' + y = \sin 2x + 3e^{\frac{x}{4}}$.

**14.** $y''+9y=7\cos 3x-5\sin 2x$.

**15.** $y''+2y'+2y=\dfrac{1}{e^x \sin x}$.

## Вариант 23

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y'y=\dfrac{1-2x}{y}$.

**2.** $(1+e^x)\,yy'=e^x$ при начальных условиях $y(0)=1$.

**3.** $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

**4.** $\dfrac{dy}{dx}\cos x=y\sin x+\cos^2 x$ при начальных условиях $y(0)=5$.

**5.** $y''=x\sin 2x+e^{3x}+5x^2$.

**6.** $xy''+y'=0$.

**7.** $y''=a^2 y$.

**8.** $yy''=(y')^2-(y')^3$ при начальных условиях $y(1)=1$; $y'(1)=-1$.

**9.** $y''-6y'+8y=0$ при начальных условиях $y(0)=2$; $y'(0)=-4$.

**10.** $9y''-12y'+4y=0$.

**11.** $y''+y=0$.

**12.** $y''-y=3x^2+e^x-2e^{3x}$.

**13.** $16y''+8y'+y=x-3+2e^{-\frac{x}{4}}$.

**14.** $4y''-8y'+5y=3\sin\dfrac{x}{2}+5\cos 3x$.

**15.** $y''-y'=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

## Вариант 24

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0$.

**2.** $y'=2x\,(e+y)$ при начальных условиях $y(0)=0$.

**3.** $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$.

**4.** $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ при начальных условиях $y(0) = 3$.

**5.** $y'' = x^3 + \sqrt[3]{x} + \sin x$.

**6.** $x^2 y'' = (y')^2$.

**7.** $y'' = \dfrac{a}{y^3}$.

**8.** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$ при начальных условиях $y(2) = 0$ ; $y'(2) = 4$.

**9.** $y'' - 5y' + 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$.

**10.** $16y'' - 8y' + y = 0$.

**11.** $y'' + 9y = 0$.

**12.** $y'' + y' - 6y = x - 2e^{-3x} + e^x$.

**13.** $y'' - 12y' + 36y = 3e^{2x} - e^{6x}$.

**14.** $y'' + y = 5\sin x - 3\cos 2x$.

**15.** $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$.

## Вариант 25

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y(1 - x^2)\,dy - x\,(1 - y^2)\,dx = 0$.

**2.** $y'\sin x - y\cos x = 0$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

**3.** $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

**4.** $(xy + e^x)\,dx - xdy = 0$ при начальных условиях $y(1) = e$.

**5.** $y'' = 4x^2 - \dfrac{1}{x}$.

**6.** $y''\,(e^x + 1)\,y' = 0$.

**7.** $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

**8.** $y'' = 1 + (y')^2$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

**9.** $y''-4y'-9y=0$ при начальных условиях $y(0)=2$; $y'(0)=-3$.
**10.** $y''-12y'+36y=0$.
**11.** $y''-4y'+13y=0$.
**12.** $y''+y'=x^2+2-3e^{-x}+2e^x$.
**13.** $y''+12y'+36y=\sin\frac{x}{2}-e^{-6x}$.
**14.** $16y''+y=\sin 2x-3\cos\frac{x}{4}$.
**15.** $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$.

## Вариант 26

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $y-xy'=a(1+x^2y')$.
**2.** $\sin y\cos x dy=\cos y\sin x dx$ при начальных условиях $y(0)=\frac{\pi}{4}$.
**3.** $(4x-3y)\,dx+(2y-3x)\,dy=0$.
**4.** $xy'-2y=x^3\cos x$ при начальных условиях $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.
**5.** $y''=x\ln x+\sin x$.
**6.** $y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$.
**7.** $(y'')^2+(y')^2=a^2$.
**8.** $y''=2y^3$ при начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=1$.
**9.** $y''-9y=0$ при начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=-3$.
**10.** $25y''-30y'+9y=0$.
**11.** $y''-8y'+17y=0$.
**12.** $y''+y'-2y=2x^2+3e^{-2x}$.
**13.** $25y''-30y'+9y=x-2+3e^{\frac{3x}{5}}$.
**14.** $y''+25y=7\sin x-\cos 5x$.
**15.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$.

## Вариант 27

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(1+y^2)\,dx + xydy = 0$.

**2.** $(1+e^x)\,yy' = e^x$ при начальных условиях $y(0)=1$.

**3.** $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx$.

**4.** $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$ при начальных условиях $y(1) = e$.

**5.** $y'' = 4\sin 3x + \dfrac{1}{x^2} + 3$.

**6.** $2xy'' = y'$.

**7.** $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

**8.** $xy'' = y'$ при начальных условиях $y(1)=1$; $y'(1)=0$.

**9.** $y'' - 4y' = 0$ при начальных условиях $y(0)=7$; $y'(0)=5$.

**10.** $16y'' - 24y' + 9y = 0$.

**11.** $4y'' - 12y' + 25y = 0$.

**12.** $3y'' - 2y' - 8y = x + 2 + 7e^{-\frac{4}{3}x}$.

**13.** $25y'' + 30y' + 9y = x^2 - 1 + 2e^{\frac{-3x}{5}}$.

**14.** $16y'' + 9y = 3e^x + \cos\dfrac{3x}{4}$.

**15.** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

## Вариант 28

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $(1+y^2)\,dx = xdy$.

**2.** $y'\sin x = y\ln y$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

**3.** $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$.

**4.** $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ при начальных условиях $y(0)=0$.

**5.** $y''=e^{x}+3e^{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

**6.** $2xy'\,y''=(y')^{2}-1$.

**7.** $y''+\sqrt{1-(y')^{2}}=0$.

**8.** $2yy''-3\,(y')^{2}=4y^{2}$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=0$.

**9.** $y''-3y'+2y=0$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=6$.

**10.** $25y''-5y'-4y=0$.

**11.** $y''+a^{2}y=0$

**12.** $y''-4y'+3y=1-x^{2}+e^{x}$.

**13.** $16y''-24y'+9y=2x+e^{\frac{3x}{4}}$.

**14.** $y''-2y'+8y=sin\,2x-3cos\,2x-e^{-x}$.

**15.** $y''+y=\dfrac{1}{cos^{3}x}$.

## Вариант 29

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $yy'+x=1$.

**2.** $y'=(2y+1)\,ctgx$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$.

**3.** $xy'-y=(x+y)\,ln\dfrac{x+y}{x}$.

**4.** $y'+y=cos\,x$ при начальных условиях $y(0)=1$.

**5.** $y''=x\,sin\,x+e^{-3x}+2x$.

**6.** $xy''-y'=e^{x}x^{2}$.

**7.** $y''+(y')^{2}=2\,e^{-y}$.

**8.** $xy''=y'$ при начальных условиях $y(1)=\dfrac{1}{2};\ \ y'(1)=1$.

**9.** $y''-y'=0$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y'(0)=-5$.

**10.** $y''-14y'+49y=0$.

**11.** $y''-2y'+2y=0$.

**12.** $y''-7y'+6y=3-2x+7e^{6x}$.

**13.** $16y''+24y'+9y=sin3x-8e^{-\frac{3x}{4}}$.

**14.** $y''-6y'+10y=2cos\,x-x^2+1$.

**15.** $y''+y=-ctg^2x$.

## Вариант 30

Решите дифференциальные уравнения.

**1.** $e^y(1+x^2)\,dy-2x^2(1+e^y)\,dx=0$.

**2.** $y'\,3\sqrt[3]{y^2}=2$ при начальных условиях $y(2)=0$.

**3.** $(y^2-2xy)\,dx=x^2dy$.

**4.** $y'-ytgx=\dfrac{1}{cos\,x}$ при начальных условиях $y(0)=1$.

**5.** $y''=x^2-xcosx$.

**6.** $xy''=(1+x^2)\,y'$.

**7.** $y''2yy''-3(y')^2=4y^2$.

**8.** $xy''-y'=e^xx^2$ при начальных условиях $y(1)=2;\ y'(1)=e$.

**9.** $4y''+16y'+15y=0$ при начальных условиях $y(0)=2;\ \ y'(0)=-3$.

**10.** $y''-16y'+64y=0$.

**11.** $y''-2y'+10y=0$.

**12.** $2y''+y'-y=4-3x+2e^{-x}$.

**13.** $25y''-5y'-2y=2e^{\frac{2x}{5}}-3+x$.

**14.** $y''-6y'+13y=e^{2x}-3sin2x$.

**15.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

## АУДИТОРНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

**Контрольная работа для получения оценки «зачтено»**

1. Решите уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x\,dy+2y\,dx=0$;  б) $(1+x^3)\,dy=3x^2y\,dx,$ если $y(0)=2$.

2. Решите однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $y'=\frac{y}{x}-1$;  б) $(x-y)y\,dx-x^2\,dy=0$.

3. Решите линейные дифференциальные уравнения первого порядка методом Бернулли:

а) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$; б) $y' - y = e^x$.

4. Решите однородные дифференциальные уравнения второго пjрядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 2y' + y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

г) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y = 2$, $y' = 1$ при $x = 0$;

д) $y'' + 4y' + 7y = 0$, если $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

5. Решите неоднородные дифференциальные уравнения второго прядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 8y' + 7y = 21$; б) $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2$.

**Варианты контрольной работы для получения оценки «отлично»**

**Вариант 1**

1) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$;

2) $2x^2y' = y^3 + xy$;

3) $yy' = 2y - x$;

4) $y'' - y = 2x$.

**Вариант 2**

1) $y'\sqrt{a^2 + x^2} = 2$;

2) $x^3(y' - x) = y^2$;

3) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;

4) $y'' + y' = 1$.

**Вариант 3**

1) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$;

2) $ydx + x(2xy + 1)\,dy = 0$;

3) $xy' + y = \ln x + 1$;

4) $y'' + y = 2x - \pi$.

**Вариант 4**

1) $y'(x^2 - 4) = 2xy$;

2) $2y' + x = 4\sqrt{y}$;

3) $(2x + 1)y' + y = x$;

4) $y'' - y = 1$.

**Вариант 5**

1) $y' + y\operatorname{tg} x = 0$;

2) $(x + 2y)\,dx - xdy = 0$;

3) $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

4) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

**Вариант 6**

1) $xydx = -(x + 1)\,dy$;

2) $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$;

3) $y' + xy = xy^2$;

4) $y'' - y = 2e^x$.

**Вариант 7**

1) $xydy = \sqrt{y^2 + 1}\,dx$;

2) $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2dy = 0$;

3) $y' + 2y = y^2e^x$;

4) $y'' - 3y' + y = \sin x$.

**Вариант 8**

1) $(x^2-1)\,y'+2xy^2=0;$

2) $2x^3y'=y\,(2x^2-y^2);$

3) $(2x+1)\,y'=4x+2y;$

4) $y''+2y'-3y=x^2e^x.$

**Вариант 9**

1) $y'\mathrm{ctg}\,x+y=2; y(0)=-1;$

2) $y^2+x^2y'=xyy';$

3) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x};$

4) $y''+4y'+4y=xe^{2x}.$

**Вариант 10**

1) $y'=3\sqrt[3]{y^2}; y(2)=0;$

2) $2xy=(x^2+y^2)\,y';$

3) $(xy+e^x)\,dx=xdy;$

4) $y''-2y'+y=6xe^x.$

**Вариант 11**

1) $xy'+y=y^2; y(1)=0,5;$

2) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x};$

3) $x^2y'+xy+1=0;$

4) $y''-5y'=\sin 5x.$

**Вариант 12**

1) $2x^2yy'+y^2=2;$

2) $xy'=y-xe^{y/x};$

3) $y=x\,(y'-x\cos x);$

4) $y''+y=x\sin x.$

**Вариант 13**

1. $y'-xy^2=2xy;$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2e^{-x/y}}{x^2};$

3. $y'=2x(x^2+y);$

4. $y''-9y=e^{3x}\cos x;$

**Вариант 14**

1) $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1;$

2) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(x\cos\dfrac{y}{x}\right)dy=0;$

3) $(xy'-1)\ln x=2y;$

4) $y''-4y'+8y=e^{2x}.$

**Вариант 15**

1) $y'=\cos\,(y-x);$

2) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x};$

3) $xy'+(x+1)\,y=3x^2e^{-x};$

4) $y''-4y'+8y=\sin 2x.$

**Вариант 16**

1) $y'-y=2x-3;$

2) $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x};$

3) $(2e^y-x)\,y'=1;$

4) $y''+2y'-3y=x^2e^x.$

**Вариант 17**

1) $y' = xy^2 + 2xy$;

2) $\left(y + \sqrt{xy}\right) dx = xdy$;

3) $(x + y^2)\ y' = y$;

4) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$.

**Вариант 18**

1) $(x + 2y)y' = 1$; $y(0) = -1$;

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

3) $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$;

4) $y'' - y = -x^2$.

**Вариант 19**

1) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$;

2) $y' = -\dfrac{x + y}{x}$;

3) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$;

4) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

**Вариант 20**

1) $x^2 y' - \cos 2y = 1$;

2) $(2x - 4y + 6)\ dx + (x + y - 3)\ dy = 0$;

3) $(1 - 2xy)\ y' = y\ (y - 1)$;

4) $y'' - 5y' + 4y = 4x^x e^{2x}$.

**Вариант 21**

1) $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$;

2) $(2x + y + 1)\ dx - (4x + 2y - 3)\ dy = 0$;

3) $y' + 2y = y^2 e^x$;

4) $y'' + y = 4\sin x$.

**Вариант 22**

1) $xydy = \left(x^2 + y^2\right) dx$;

2) $x - y - 1 + (y - x + 2)\ y' = 0$;

3) $(x + 1)\ (y' + y^2) = -y$;

4) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

**Вариант 23**

1) $y' = \left(8x + 2y + 1\right)^2$;

2) $(x + 4y)\ y' = 2x + 3y - 5$;

3) $xy^2 y' = x^2 + y^3$;

4) $y'' - 5y' = 3x^2$.

**Вариант 24**

1) $y'\sin x = y\ln y$; $y(\pi / 2) = 1$;

2) $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$;

3) $xydy = (y^2 + x)dx$;

4) $y'' + y = 4xe^x$.

**Вариант 25**

1) $(1 + e^x)yy' = e^x$; $y(0) = 1$;

2) $x^3(y' - x) = y^2$;

3) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$;

4) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

**Вариант 26**

1) $(xy^2+x)\,dx+(x^2y-y)\,dy=0;\ y(0)=1;$

2) $2x^2y'=y^3+xy;$

3) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x};$

4) $y''+y=2\operatorname{tg}x.$

**Вариант 27**

1) $y-xy'=a\,(1+x^2y');$

2) $2xdy+(x^2y^4+1)\,ydx=0;$

3) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x;$

4) $y''+y=4e^x.$

**Вариант 28**

1) $\operatorname{tg}x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\operatorname{ctg}y\,dy=0;$

2) $2y'+xy=4\sqrt{y};$

3) $y'x+y=-xy^2;$

4) $y''-2y'=2e^x.$

**Вариант 29**

1) $\sqrt{1+x^2}dy=xydx;$

2) $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2};$

3) $xy'+y=\ln x+1;$

4) $y''+2y'+2y=xe^{-x}.$

**Вариант 30**

1) $y^2-1+2x^2yy'=0;$

2) $2xy'+y=y^2\sqrt{x-x^2y^2};$

3) $x^2y^2y'+yx^3=1;$

4) $y''-3y'-2y=9e^{2x}.$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Обыкновенные дифференциальные уравнения и способы их решения» написано автором для эффективной организации учебного процесса с целью создания и успешного функционирования рейтинговой системы обучения, а также организации самостоятельной работы студентов, в том числе при дистанционном способе обучения.

В данном пособии освещены вопросы, указанные в программе технических и экономических направлений подготовки специалистов по данной теме, и не затрагивающие вопросов изучения дифференциальных уравнений в частных производных, линейных дифференциальных уравнений $n$-го порядка, уравнений Эйлера, решения систем линейных дифференциальных уравнений и других. Это связано с тем, что объём изучаемого материала, освещённый в пособии, несколько превышает тот, который возможно изучить, без потери качества обучения, т.е. изучить за нормативное время, выделяемое на изучение дисциплины «Математика» выше указанных направлений подготовки специалистов. Дидактическая и методическая задача пособия – помочь самообучающимся студентам усвоить тот объём знаний, которым традиционно должен обладать специалист с высшим образованием.

Автор выражает надежду, что пособие будет способствовать выработке у студентов прочных знаний, умений и навыков, которые помогут ему сформировать необходимый набор общекультурных и профессиональных компетенций и связанных с ними решений профессиональных задач. Более подробное изложение некоторых вопросов можно найти в учебной и специальной литературе, указанной в библиографическом списке, а также в других изданиях.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для втузов. В 2 ч. Ч. II / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва : ОНИКС, Мир образования, 2003. – 304 с.

2. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – Москва : ООО «Изд-во АСТ» 2003. – 654 с.

3. Ильин, В.А. Высшая математика : учебник / В.А. Ильин, А.В. Куркина. – Москва : ТК Велби, Проспект, 2006. – 592 с.

4. Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов : учебное пособие для бакалавриата и специалитета / В.Л. Клюшин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2019. – 412 с.

5. Высшая математика для экономических специальностей : учебник и практикум. Ч. I, II / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – Москва : Высшее образование, 2008. – 893 с.

6. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2006. – 288 с.

7. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для втузов. В 2 т. Т. II, гл. XIII. – Москва : Интеграл-Пресс, 2007. – 544 с.

8. Стеклов, В.А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие для вузов / В.А. Стеклов. – Москва : Юрайт, 2019. – 427 с.

9. Шипачёв, В.С. Высшая математика : учебник / В.С. Шипачёв. – Москва : ИНФРА-М, 2020. – 479 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

# СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБОВ ИХ РЕШЕНИЯ

| Название уравнения | Вид уравнения | Способ решения |
|---|---|---|
| **1. ДУ первого порядка $\mathbf{y' = f(x; y)}$** | | |
| 1.1. Неполные ДУ первого порядка | | |
| 1.1.1. Функция зависит только от $x$ | $y' = f(x)$ | $y = \int f(x)dx = F(x) + C$ |
| 1.1.2. Функция зависит только от $y$ | $y' = f(y)$ | $x = \int \frac{dy}{f(y)} = F(y) + C$ |
| 1.2. Полные ДУ первого порядка | | |
| 1.2.1. Уравнения с разделёнными переменными | $f(x)dx + g(y)dy = 0$ | $\int f(x)dx = -\int g(y)dy$; $F(x) = -G(y) + C.$<br>Уравнение сразу интегрируется |
| 1.2.2. Уравнения с разделяющимися переменными | $f(x)\,g(y)\,dx +$<br>$+ p(x)\,q(y)\,dy = 0$ | Разделить уравнение почленно на произведение «лишних» множителей каждого слагаемого $g(y)p(x)$ и свести к уравнению с разделёнными переменными |
| 1.2.3. Однородные уравнения | $y' = f(x; y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ | Вводится новая переменная $z = y/x$, тогда $y = zx$, находится производная функции: $y' = z'x + z$ и подставляется в исходное уравнение $z'x + z = \varphi(z)$. Решается уравнение с разделяющимися переменными |
| 1.3. Линейные ДУ первого порядка | | |
| 1.3.1. Однородные уравнения | $y' + f(x)y = 0$ | Относятся к уравнениям с *разделяющимися переменными* и решаются разделением переменных. Но возможно при решении использовать общий вид решения этого уравнения: $y = Ce^{-F(x)}$, где $F(x)$ – это первообразная функции $f(x)$ |
| 1.3.2. Неоднородные уравнения | $y' + f(x)y = g(x)$ | Метод Бернулли: заменить $y = u \cdot v$, найти $y' = u'v + uv'$, подставить в данное уравнение $(u'v + uv') + f(x) \cdot uv = g(x)$. Далее решать по алгоритму из п. 2.5.2 данного пособия |
| 1.3.3. Уравнения Бернулли | $y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n$ | Разделить обе части равенства на $y^n$ и умножить на $(1 - n)$, чтобы ввести новую функцию $z = y^{1-n}$ и $z' = (1 - n)\frac{y'}{y^n}$. Такая замена сводит данное уравнение к линейному неоднородному уравнению первого порядка, которое решается методом Бернулли |

**Окончание прил. 1**

| Название уравнения | Вид уравнения | Способ решения |
|---|---|---|
| **2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка** | | |
| 2.1. Уравнения, содержащие только $x$ и $y''$ | $y'' = f(x)$ | Двукратное интегрирование понижает порядок уравнения дважды и находится $y$ |
| 2.2. Уравнения, содержащие $x, y', y''$ | $y'' = f(x, y')$ | Понижается порядок уравнения за счёт замены $y' = z(x),\ z' = y''$ и сведения этого уравнения к линейному уравнению первого порядка вида $y' + f(x)y = g(x)$ или $y' + f(x)y = 0$ |
| 2.3. Уравнения, содержащие $y, y', y''$ | $y'' = f(y, y')$ | Понижается порядок уравнения за счёт замены сложной функции $z(y)$ и её производной $\boldsymbol{y' = z = z(y)},\ \boldsymbol{y'' = z' \cdot z}$ и сведения этого уравнения к линейному уравнению первого порядка вида $y' + f(x)y = g(x)$ или $y' + f(x)y = 0$ |
| **3. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами** | | |
| 3.1. Однородные | $y'' + py' + qy = 0$ | Составляете характеристическое уравнение: $k^2 + p \cdot k + q = 0$. Заменой $\boldsymbol{y''}$ на $\boldsymbol{k^2}$, $\boldsymbol{y'}$ на $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{y}$ на $\mathbf{1}$. Решается квадратное уравнение и в зависимости от значения дискриминанта записывается общее решение (прил. 2, разд. 3) |
| 3.2. Неоднородные | $y'' + py' + qy = f(x)$ | Общее решение состоит из суммы его частного решения $y^*$ и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и имеет вид: $\boldsymbol{y = \bar{y} + y^*}$. Способ нахождения $\bar{y}$ – смотри решение уравнения 3.1 данной таблицы. Способ нахождения $y^*$ – смотри прил. 2, разд. 4 данного пособия |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

# 1. СВЕДЕНИЯ ИЗ РАЗДЕЛА «НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

## 1.1. Основные определения и понятия

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для $f(x)$, если ее производная равна $f(x)$, для любого $x$ из области определения $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Задача отыскания первообразной для данной функции не имеет однозначного решения, так как $(F(x)+C)' = f(x)$.

Для конкретной функции $f(x)$ всегда найдется множество первообразных, отличающихся друг от друга постоянной величиной С. Геометрически это выражается совокупностью кривых, располагающихся в системе координат параллельно друг другу. Эти кривые называются ***интегральными кривыми.***

***Неопределенным интегралом*** называется совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ и обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

***Геометрический смысл*** неопределённого интеграла – это совокупность всех интегральных кривых (рис. П2.1).

Операция нахождения первообразной или операция нахождения неопределенного интеграла, называется ***интегрированием функции***. Интегрирование является операцией обратной дифференцированию.

Для проверки результата интегрирования надо взять производную полученной функции и получить подынтегральную функцию.

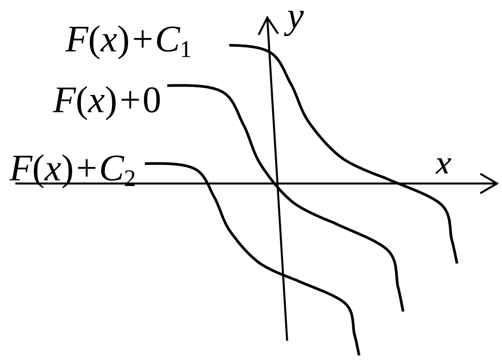


Рис. П2.1. Геометрический смысл неопределённого интеграла

## 1.2. Арифметические свойства неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл обладает несколькими свойствами:

1) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C;$$

2) неопределенный интеграл суммы (разности) двух или нескольких функций равен сумме или разности интегралов этих функций

$$\int (f(x) \pm q(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int q(x)\,dx + C;$$

3) интеграл от сложной функции $f(u)$, где $u = kx+b$ (линейная функция) равен произведению

$$\frac{1}{k}F\,(kx+b),\text{ т.е. } \int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

### 1.3. Основные методы интегрирования

Существует несколько методов интегрирования:

1) *нахождение неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования.*

С помощью этого метода вычисляются интегралы с применением таблицы основных интегралов, свойств интегралов и правил интегрирования;

2) *метод разложения подынтегральной функции на слагаемые.*

Этот метод применяется тогда, когда нужно преобразовать подынтегральную функцию до состояния берущегося интеграла или свести её к табличному интегралу;

3) *нахождение неопределенного интеграла методом замены переменной (методом подстановки)*

Способ подстановки заключается в том, чтобы заменить новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения, не считая постоянного множителя;

4) *нахождение неопределенного интеграла методом интегрирования по частям по формуле:* $\int udv = u \cdot v - \int vdu$.

**I группа**

Интегралы вида:

$$\int P(x)arctgxdx; \int P(x)arcctgxdx;$$
$$\int P(x)\arcsin xdx; \int P(x)\arccos xdx;$$

где $P(x)$ – многочлен $n$-й степени, $P(x) = a_o + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Для таких интегралов возможна следующая замена: $\boldsymbol{u}$ – *arc*-функция, $\boldsymbol{dv} = P(x)dx$.

**II группа**

Интегралы вида:

$$\int P(x)\cos kxdx, \int P(x)\sin kxdx;$$
$$\int P(x)a^{kx}dx; \int P(x)e^{kx}dx$$

где $k$ − число; $P(x)$ − многочлен $n$-й степени.

Для таких интегралов возможна следующая замена:

$$u = P(x), dv = e^{kx}dx; dv = a^{kx}dx; dv = \sin kxdx; dv = \cos kxdx.$$

**III группа**

Интегралы вида:

$$\int e^{ax}\cos bxdx; \int e^{ax}\sin bxdx,$$

где $a$, $b$ – числа, вычисляют двукратным интегрированием по частям.

Обозначим: $u = e^{ax}$; $dv = cosbxdx$; $dv = sinbxdx$.

**IV группа**

Интегралы вида:

$$\int x^n \cdot lnxdx, \text{ где } n \neq -1, n \in Z.$$

Для таких интегралов возможна следующая замена:

$$u = lnx, dv = x^n dx \;\; \Rightarrow \;\; v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

## 1.4. Таблица основных неопределенных интегралов

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int odx = C$ | 14. | $\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ |
| 2. | $\int kdx = kx + C$ | 15. | $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ |
| 3. | $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ | 16. | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \cos^2 x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ |
| 4. | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | 17. | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \sin^2 x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$ |
| 5. | $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ | 18. | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C$ |
| 6. | $\int \sqrt{x}dx = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + C$ | 19. | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ |
| 7. | $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ где $x \neq 0, x > 0$ | 20. | $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$ |
| 8. | $\int \frac{dx}{x \pm b} = \ln\lvert x \pm b\rvert + C$ | 21. | $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C$ |
| 9. | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$ | 22. | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ |
| 10. | $\int e^x dx = e^x + C$ | 23. | $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. | $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 24. | $\int \frac{xdx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\|ax^2+b\right\| + C$ |
| 12. | $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 25. | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C$ |
| 13. | $\int \frac{ln\, x}{x} dx = \frac{ln^2 x}{2} + C$ | 26. | $\int ln\, x\, dx = x(\ln x - 1) + C$ |

### 1.5. Дифференциал функции

*Дифференциалом функции* одной переменной называется главная линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной $dy = f'(x)\Delta x$. Если $y = x$, то $dy = dx = x' \cdot \Delta x$, откуда $dx = \Delta x$, т.е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.* Поэтому формулу для дифференциала функции можно записать в виде: $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ или $y' = \frac{dy}{dx}$.

## 2. СВЕДЕНИЯ ИЗ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

### 2.1. Логарифм

*Логарифмом* числа $b$ по основанию $a$ называется такой показатель степени $x$, в которую надо возвести основание $a$, чтобы получить $b$:

$$\log_a b = x \iff a^x = b,$$

если $a \neq 1, a > 0, b > 0$.

$a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$e^{ln\, b} = b$ – частный случай основного логарифмического тождества.

*Свойства логарифма*

1) $\log_a a = 1$;
2) $\log_a 1 = 0$;
3) $\log_a b^p = p \log_a b$
4) $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c\,, c > 0$;
5) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
6) $\log_{a^k} b^p = \frac{p}{k} \log_a b$, при $k \neq 0$;
7) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c b}$, при $\log_c b \neq 0, b \neq 1$;
8) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

## 2.2. Свойства степени

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ , $a \neq 0$;
3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.
5) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;
6) $a^0 = 1$.

## 2.3. Решение квадратных уравнений на множестве действительных чисел

Квадратные уравнения имеют вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a$, $b$, $c$ –некоторые числа, причём $a \neq 0$. Чтобы решить такое уравнение, надо вычислить дискриминант по формуле: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 различных действительных корня $x_1 \neq x_2$, которые находятся по формуле: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то уравнение имеет 1 действительный корень или 2 одинаковых (двукратных) корня: $x = x_1 = x_2$, которые находятся по формуле $x = \frac{-b}{2a}$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

*Замечание.* Квадратные уравнения можно решать по теореме Виета или с использованием формулы дискриминанта для чётного второго коэффициента $b$:

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

## 2.4. Комплексные числа

Основным понятием комплексных чисел является ***мнимая единица,*** которая равна $\boldsymbol{\sqrt{-1} = i}$. Необходимость введения в обиход мнимой единицы возникает в связи с решением квадратного уравнения, например, $x^2 + 1 = 0$, у которого не существует действительных корней. Применяя мнимую единицу, можно получить мнимые корни данного уравнения: $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Покажем на примере извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Например,

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36\,(-1)} = \sqrt{36}\,\sqrt{-1} = 6i$$

или

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}(-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{-1} = \frac{1}{2}i.$$

После введения понятия мнимой единицы стало возможным решение всех квадратных уравнений, что позволило математикам преодолеть затруднения в решении многих дифференциальных уравнений, связать показательные и тригонометрические функции, вычислять некоторые виды интегралов и т.д.

Покажем на примере решение квадратных уравнений: $ax^2 + bx + c = 0$, если дискриминант меньше нуля.

**Пример.** Решить квадратное уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0$.

Р е ш е н и е. Вычислим дискриминант по формуле: $D = b^2 - 4ac$.

$D = 2^2 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$; $D < 0$, действительных корней нет.

Но есть комплексные (мнимые) корни. Найдём их:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2n} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12 \cdot (-1)}}{2} =$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = \frac{-2}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

О т в е т: $x_1 = -1 + \sqrt{3}i$; $x_2 = -1 - \sqrt{3}i$.

***Комплексными числами*** **C** называется множество чисел, которые представимы в *алгебраической форме*

$$z = a + bi, \tag{П2.1}$$

где $z$ – комплексное число; $a$ и $b$ – действительные числа; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $a = Re(z)$ – действительная часть комплексного числа (от фр. reele действительный, реальный); $b = Im(z)$ – мнимая часть комплексного числа (от фр. imaginaire мнимый).

Каждой точке z комплексной плоскости соответствует число $z = a + bi$, где $a$ и $b$ – координаты этой точки. Ей соответствует радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OZ}$, модуль которого равен $\sqrt{a^2 + b^2} = |z| = r$. Аргументом этого числа является угол

$$\varphi = Arg\, z = arg\, z + 2\pi k, k \in Z,\ \varphi \in [0; 2\pi]$$

между радиус-вектором $\vec{r}$ и положительным направлением действительной оси $oa$ комплексной плоскости (рис. П2.2).

Рассмотрим прямоугольный треугольник (рис. П2.2), где один катет равен $a$, другой – $b$. Тогда в этом треугольнике выразим катеты $a$ и $b$ через синус и косинус острого угла $\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r};\;\; b = r\sin\varphi\,;\; \cos\varphi = \frac{a}{r};\;\; a = r\cos\varphi.$$

Подставим полученные выражения для $a$ и $b$ в формулу: $z = a + bi$ и получим выражение

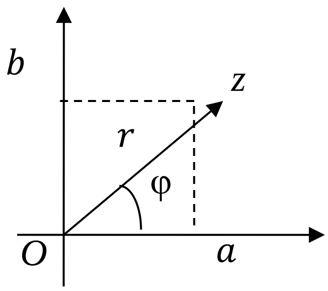


Рис. П2.2. Расположение комплексного числа в комплексной плоскости

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi), \qquad (П2.2)$$

которое и является *тригонометрической формой* комплексного числа.

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi, \qquad (П2.3)$$

где $e$ – это трансцендентное число, $e \approx 2{,}718281828\ldots$, можно получить выражение для комплексного числа в *показательной форме*:

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (П2.4)$$

где $a = r\cos\varphi$ – действительная часть комплексного числа; $b = r\sin\varphi$ – мнимая часть комплексного числа; $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа; $\varphi = arg\, z + 2\pi k, k \in Z$ – угол, образованный радиусом-вектором комплексного числа в комплексной плоскости и положительным направлением оси $oa$.

## 3. ТАБЛИЦА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

| ДУ | $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ | | |
|---|---|---|---|
| Характеристическое уравнение | $k^2 + p \cdot k + q = 0$ | | |
| Дискриминант | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
| Корни характеристического уравнения | $k_1 \neq k_2$<br>$k_1, k_2 \in R$ | $k = k_1 = k_2$<br>$k \in R$ | $k_1 = a + bi,$<br>$k_2 = a - bi$<br>$k_1, k_2 \in C$ |
| Общее решение | $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ | $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$ | $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ |

## 4. ТАБЛИЦА РЕШЕНИЙ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x). \qquad (\text{П}2.5)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0. \qquad (\text{П}2.6)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0. \qquad (\text{П}2.7)$$

| Вид правой части $f(x)$ уравнения (П2.5) | Коэффициенты уравнения и корни характеристического уравнения (П2.7) | Вид частного решения $y^*$ (П2.5) |
|---|---|---|
| Многочлен $n$-го порядка $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ | $a_o \neq 0$ | $y^* = Q_n(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Dx^n$, где $A$, $B$, $C\dots D$ – неизвестные числа |
| | $a_o = 0,\ \ a_1 \neq 0$ | $y^* = xQ_n(x)$ |
| | $a_o = 0,\ \ a_1 = 0, a_2 \neq 0$ | $y^* = x^2Q_n(x)$ |
| | … | … |
| $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha$ – действительное число | $\alpha$ – **не является** корнем соответствующего характеристического уравнения | $y^* = e^{\alpha x}Q_n(x)$ |
| | $\alpha$ – **является** корнем соответствующего характеристического уравнения кратности $\tau$ | $y^* = x^{\tau}e^{\alpha x}Q_n(x)$ |
| $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ | $(\alpha + \beta i)$ – **не является** корнем соответствующего характеристического уравнения | $y^* = e^{\alpha x}\,(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$; $s = \max\ (n; m)$ |
| | $(\alpha + \beta i)$ – **является** корнем соответствующего характеристического уравнения | $y^* = \boldsymbol{x}e^{\alpha x}\,(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$; $s = \max\ (n; m)$ |

**Окончание прил. 2**

| Вид правой части $f(x)$ уравнения (П2.5) | Коэффициенты уравнения и корни характеристического уравнения (П2.7) | Вид частного решения $y^*$ (П2.5) |
|---|---|---|
| $f(x) =$ <br> $= P_n(x)\cos\beta x +$ <br> $+Q_m(x)\sin\beta x$ | $\beta i$ **не является** корнем характеристического уравнения | $y^* = U_s(x)\cos\beta x +$ <br> $+V_s(x)\sin\beta x;$ <br> $s = \max\ (n; m)$ |
| | $\beta i$ **является** корнем характеристического уравнения | $y^* = \boldsymbol{x}\,(U_s(x)\cos\beta x +$ <br> $+V_s(x)\sin\beta x);$ <br> $s = \max\ (n; m)$ |
| $f(x) = \mathrm{M}\cos\beta x +$ <br> $+N\sin\beta x,$ <br> где M и N – неизвестные числа | $\beta i$ **не является** корнем характеристического уравнения | $y^* = \mathrm{A}\cos\beta x + \mathrm{B}\sin\beta x,$ <br> где A и B – неизвестные числа |
| | $\beta i$ **является** корнем характеристического уравнения | $y^* = \boldsymbol{x}(\mathrm{A}\cos\beta x + \mathrm{B}\sin\beta x)$ |

## ОТВЕТЫ

**Упражнения № 1**

**1.** 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) да.

**2.** 1) первый; 2) второй; 3) первый; 4) второй; 5) второй; 6) третий; 7) второй.

**3.** 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) да.

**4.** а) $y = \frac{x^2}{2} - 2x + C, y = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}$;

б) $y = 2x^3 + 2.5x^2 + C,\ y = 2x^3 + 2.5x^2 + 10$;

в) $y = -\frac{5}{4}x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + C, y = -\frac{5}{4}x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3$.

**5.** а) $y = \frac{x^4}{12} + \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2, y = \frac{x^4}{12} + \frac{3x^2}{2} - x - 2$;

б) $y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3, y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + 2x + 3$.

**6.** $y = sinx + 1$. **7.** $y = x^2 - 3x + 5$. **8.** да. **9.** да. **10.** нет. **11.** да. **12.** – 2.

**Упражнения № 2**

**1)** $x = \frac{1}{6}arctg\frac{3y}{2} + C$; $x = \frac{1}{6}arctg\frac{3y}{2} + 1$; **2)** $y = Ce^x$; $y = 3e^{x-2}$;

**3)** $y = x^3 - \cos x - 14\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 17$; **4)** $y = -\cos x + \frac{cos^3x}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

**Упражнения № 3**

**1.** а) $y\ = \pm\sqrt{x^3 + C}$; б) $4y^3 - 9x^2 = C$;

в) $y = \pm\sqrt{x - x^3 + C}$; г) $y = \pm\sqrt{2e^x + C}$; д) $y = Cx$; е) $|y + 1| = C|x - 1|$.

**2.** а) $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$; б) $s = t^3 - 2t + 1$.

**3.** а) $y = C(1 + x^2)$; б) $y = \frac{C-1-x}{1+x}$; в) $y = e^{x+C} - 1$; г) $x = \frac{C}{y-1}$;

д) $(y - 1)\sqrt{2x^2 + 1} = C$.

**4.** а) $y = -\frac{1}{2}x$; б) $y = 5e^x - 2$; в) $\sqrt{y^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}$.

**Упражнения № 4**

**1.** а) $y = x(Cx - 1)$; б) $y = \frac{x}{ln|Cx|} - x$; **2.** а) $y = x(Cx + 1)$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3y}{x}}} = Cx$;

**3.** а) $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = Cx$; $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = x$ или после упрощения $y = \frac{x^2-1}{2}$;

б) $\frac{1}{2}arctg\frac{y}{2x} - ln|x| = C$; $\frac{1}{2}arctg\frac{y}{2x} - ln|x| = \frac{\pi}{8}$.

**Упражнения № 5**

**1.** 1) линейное неоднородное; 2) нет; 3) нет; 4) линейное однородное; 5) линейное неоднородное; 6) линейное неоднородное.

*Замечание.* Прежде, чем установить вид данных уравнений, надо преобразовать их к виду (2.12) или (2.13).

**2.** а) $y = \pm\sqrt{2x - x^2 + C}$; б) $y = \frac{C}{\sqrt{\cos x}}$; в) $y = Ce^{8x}$; г) $y = -\frac{1}{7x+C}$.

**3.** а) $y = \sin x + \cos x \cdot C$ ; б) $y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$; в) $y = cosx(sinx + C)$, $y = cosx(sinx - 3)$; г) $y = e^x(ln|x| + C)$, $y = e^x(ln|x| + 1)$.

**4.** а) $y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{2x}+x+0.5}}$; б) $= \frac{1}{xlnCx}$; в) $y = \frac{1}{e^{x^2}(-x+C)}$, $y = \frac{1}{e^{x^2}(-x+0.2)}$.

**Упражнения № 6**

**1.** а) $y = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$; б) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$;
в) $y = -2ln|x|+C_1x + C_2$; г) $y = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2$, $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sin 3x$.

**2.** а) $y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$; б) $y = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^4}{4} + C_2$;
в) $y = C_1(x+1)^2 + x + C_2$ или $y = C_1\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + x + C_2$.

**3.** а) $y = C_2e^{C_1x}$ ; б) $y = \frac{C_1(x+C_2)^2}{4} + \frac{1}{C_1}$; в) $y^3 - 3C_1y = 3x + 3C_2$,
$y^3 - y = 3x$.

**Упражнения № 7**

**1.** а) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$; б) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$; в) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ – общее решение, $y = 2e^{3x}$ – частное решение.

**2.** а) $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$; б) $y = e^{5x}(C_1 + C_2x)$; в) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$ – общее решение, $y = e^{-2x}(3 + 5x)$ – частное решение.

**3.** а) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; б) $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$;
в) $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ – общее решение,
$y = e^{-x}(\cos x + C_2\sin x)$ – частное решение.

**4.** а) $y = e^x(C_1 + C_2x) + 2$; б) $y = e^x(C_1 + C_2x) + x - 2$;
в) $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$; г) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$;
д) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + (x^2 + 2)$.

**Задания для самоконтроля**

**Тест 1 (теория). Основные понятия и определения.** 1вг, 2вг, 3б, 4б, 5в, 6г, 7а, 8ав, 9а, 10в. $p = 13$.

**Тест 2 (практика). Некоторые приёмы решения ДУ. Задача Коши**

**1.** 1) $y' = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$; 2) $dy = y' \cdot dx$; 3) $\frac{dy}{dx}$; 4) $\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)dx$; 5) $y + C_1 = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + C_2$; 6) $y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + C$; 7) 1; 8) 0; 9) $-\frac{3}{8}$; 10) $y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + \frac{3}{8}$; 11) парабол; 12) $y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$. **2.** 1) $y'' = 3x + \frac{1}{3} - e^x$; 2) $y' = \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{3}x - e^x + C_1$; 3) $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{6}x^2 - e^x + C_1 x + C_2$; 4) 0; 5) 8; 6) 7; 7) 8; 8) 9; 9) $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{6}x^2 - e^x + 8x + 9$. **3.** 1) $y' = \sin x - \cos x + e^{2x}$; 2) $y = -\cos x -$

$-\sin x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$; 3) общим; 4) частное; 5) начальные; 6) общее; 7) –2,5; 8) $y=-\cos x-\sin x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$; 9) $y=-\cos x-\sin x+\frac{1}{2}e^{2x}-2{,}5$.

**Тест 3 (теория). ДУ первого прядка**. 1бв, 2г, 3а, 4в, 5б, 6аб, 7ав, 8б, 9в, 10в. $p$ = 13.

**Тест 4 (практика). ДУ первого порядка**

**1.** 1) $dx$; 2) проинтегрируем; 3) $dx$; 4) –3; 5) $\sqrt{x}$; 6) $e^{-x}$; 7) $y$; 8) $-\frac{3}{5}sin5x$; 9) $\frac{4x\sqrt{x}}{3}$; 10) $-e^{-x}$.

**2.** 1) $\frac{dy}{dx}$; 2) $\frac{dy}{y^2+9}$; 3) $y^2+9$; 4) $\int dx=\int\frac{dy}{y^2+9}$; 5) $x$; 6) 3; 7) arctg; 8) 3; 9) C; 10) $x$.

**3.** 1) $(x+1)$; 2) $-(1-y)$; 3) $\frac{x^2}{2}$; 4) $x$; 5) $C_1$; 6) $-y$; 7) $\frac{y^2}{2}$; 8) $C_2$; 9) C; 10) $\frac{x^2}{2}+x=-y+\frac{y^2}{2}+C$.

**4.** 1) $\sqrt{1-y^2}$; 2) $\sqrt{1-x^2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; 5) 17; 6) $arcsin\,x$; 7) $arcsin\,y$; 8) C; 9) $arcsin\,x$; 10) $arcsin\,y$.

**5.** 1) $\frac{dy}{dx}$; 2) $y'$; 3) $\frac{x^2-2y^2}{-2xy}$; 4) $\frac{x}{2y}$; 5) $\frac{y}{x}$; 6) $z=\frac{y}{x}$; 7) $zx$; 8) $z'x+z$; 9) $z'x+z$; 10) $\frac{1}{2z}$; 11) $z'x$; 12) $x$; 13) $-2zdz$; 14) z; 15) $\frac{dx}{x}$; 16) $ln|x|$; 17) $lnC$; 18) $ln|Cx|$; 19) $\frac{y}{x}$; 20) $\frac{y^2}{x^2}$; 21) $-x^2ln|Cx|$; 22) $\pm\sqrt{x^2ln\left|\frac{1}{Cx}\right|}$.

**6.** 1) $uv$; 2) $u'v+uv'$; 3) $u'v$; 4) $uv'$; 5) $uv$; 6) $uv'+\frac{1}{x}uv$; 7) разделёнными; 8) $v'+\frac{1}{x}v$; 9) $\frac{dv}{dx}$; 10) $\frac{dx}{x}$; 11) $\frac{dv}{v}$; 12) $ln|x|$; 13) $ln|v|$; 14) $\frac{1}{x}$; 15) $u'v$; 16) $\sin x$; 17) $sin\,x$; 18) $-\cos x+C$; 19) $u\cdot v$; 20) $\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.

**Тест 5 (теория). ДУ второго порядка.** 1аб, 2с, 3г, 4вг, 5бв, 6ав, 7а, 8б, 9г, 10бвг. $p$ = 16

**Тест 7 (теория). Линейные ДУ второго порядка.** 1. 1в, 2б, 3г, 4а; 2. в; 3. в; 4. а; 5. б; 6. в; 7. 1б, 2а; 8. б; 9. аг; 10. ав; 11. аг; 12. аб; 13. в; 14. в; 15. 1с, 2а, 3б. $p$ = 27.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

**Квашко** Людмила Павловна

**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Учебное пособие

Редактор *Г.Ф. Иванова*
Технический редактор *Н.В. Ларионова*

---

План 2021 г. Поз. 11.5. Подписано в печать 01.07.2021.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,0. Зак. 119. Тираж 55 экз. Цена 737 р.

---

Отпечатано в Издательстве ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.