МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ГЛАВЕ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ»

КАФЕДРА ФИНАНСОВ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для обучающихся 3 курса
образовательной программы бакалавриата
направления подготовки 38.03.01 Экономика (профили : «Финансы и кредит», «Финансы и кредит» (ускоренное обучение),
«Государственные и муниципальные финансы»)
очной / заочной форм обучения

Утверждено на заседании
Учебно-методического совета
ГОУ ВПО «ДОНАУИГС»
Протокол № __ от __.__.2022 г.

Донецк
2022

УДК 336(075.8)
ББК У052.201.1я73-1
О-75

Рецензенты :

Т. О. Загорная – д-р экон. наук, профессор кафедры бизнес-информатики ГОУ ВПО «ДОННУ»;

О. В. Бондаренко – канд. экон. наук, доцент кафедры учета и аудита ГОУ ВПО «ДОНАУИГС».

О-75 Основы финансовых вычислений : учебно-методическое пособие для обучающихся 3 курса образовательной программы бакалавриата направления подготовки 38.03.01 Экономика (профили : «Финансы и кредит», «Финансы и кредит» (ускоренное обучение), «Государственные и муниципальные финансы») очной / заочной форм обучения / Минобрнауки ДНР, ГОУ ВПО «ДОНАУИГС», Кафедра финансов ; сост. Е. Г. Сподарева. – Донецк : ГОУ ВПО «ДОНАУИГС», 2022. – 150 с.

В учебно-методическом пособии рассматривается общая методика финансовых расчетов и их применение на практике в различных финансовых сферах. Особое внимание уделяется анализу денежных потоков и оценке эффективности финансовых операций.

Обучающимся предоставляется возможность самостоятельной проверки знаний в форме ответов на контрольные вопросы, тестовые и практические задания по темам.

УДК 336(075.8)
ББК У052.201.1я73-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях эффективное управление финансовой деятельностью субъектов хозяйствования основывается на квалифицированной и обоснованной оценке всех возможных результатов финансовых операций. Это предопределяет необходимость наличия у специалистов экономического профиля определенных знаний в области финансовых вычислений, а также математического анализа, теории вероятностей, математической статистики и других специализированных дисциплин.

Основные методы финансовых вычислений применяются в сфере оценки инвестиционных проектов, стоимости ценных бумаг, эффективности кредитных и страховых расчетов, позволяя количественно охарактеризовать рассматриваемые финансово-экономические операции.

Постоянные изменения микро- и макроэкономических параметров, влияющих на состояние финансовой системы, обусловливают необходимость применения математического аппарата для анализа финансово-экономической деятельности хозяйствующих субъектов. Именно этим объясняется актуальность подготовки учебно-методического пособия, целью которого является формирование у будущих специалистов в области экономики представления о методах количественного анализа финансово-экономических операций.

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Основы финансовых вычислений» обеспечивает:

комплексное теоретическое изучение основных методов проведения количественного анализа финансовых и кредитных операций;

приобретение обучающимися теоретических знаний и практических навыков использования финансово-экономических расчетов при решении конкретных задач, в том числе при оценке эффективности краткосрочных инструментов и долгосрочных финансовых операций.

В конце каждой темы приведены теоретические, тестовые и практические задания к самоконтролю качества усвоения материала.

Учебно-методическое пособие предназначено для использования его во время подготовки к лекционным и семинарским занятиям, а также проведения промежуточной аттестации. Кроме того, оно содержит словарь основных терминов, список рекомендованных источников, а также приложения, содержащие дополнительную справочную информацию.

В списке рекомендованных источников указаны учебники, которые можно использовать для углубленного изучения курса.

Учебно-методическое пособие «Основы финансовых вычислений» написано в доступной форме, изложение учебного материала характеризуется четкой логической последовательностью. Объем материала является выверенным и обдуманным.

Материалы учебно-методического пособия рекомендованы для обучающихся бакалавриата направления подготовки 38.03.01 Экономика, а также могут быть полезны магистрантам, аспирантам, преподавателям высших учебных заведений, руководителям и специалистам, которые интересуются вопросами практического применения финансовой математики в своей деятельности.

РАЗДЕЛ 1. ОБЩАЯ МЕТОДИКА ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

Тема 1.1. Логика финансовых расчетов

План

1.1.1. Предмет и методы финансовых расчетов. Факторы, упитывающиеся при финансовых вычислениях

1.1.2. Виды процентов

1.1.3. Наращение и дисконтирование

1.1.1. Предмет и методы финансовых расчетов. Факторы, упитывающиеся при финансовых вычислениях

Основы финансовых вычислений – это дисциплина, изучающая методы и методики определения стоимостных и временных параметров финансовых и инвестиционных операций, процессов и сделок, а также модели управления инвестициями, капиталом и его составляющими.

Объектом дисциплины являются финансовые операции и сделки и их технико-экономическое обоснование, направленное на извлечение прибыли. Предмет дисциплины – финансовые и актуарные оценки показателей эффективности этих операций и сделок, а также доходов отдельно взятых участников этих сделок, определяемых в виде процентных ставок, норм и коэффициентов, скидок, маржи, котировок ценных бумаг, курсов валют.

Финансовая математика охватывает методы вычислений, необходимость в которых возникает, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

1) стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т. д.);

2) временные данные (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов, отсрочки платежей и т. д.);

3) процентные ставки.

Методы финансовых вычислений используются в расчетах параметров, характеристик и свойств инвестиционных операций и стратегий, параметров государственных и негосударственных займов, кредитов, в расчетах амортизации, страховых взносов и премий, пенсионных начислений и выплат, при составлении планов погашения долга, оценке прибыльности финансовых сделок.

Финансовые процессы определяются многими факторами, которые условно делятся на внутренние и внешние.

Внутренние факторы – это те факторы, которые определяют основные и непосредственные характеристики финансового процесса, т.е. структура портфеля активов, контрактные характеристики сделки (способ начисления процентов в кредитных сделках, выбранная схема погашения и т. п.), а также факторы, определяющие начальные условия сделки (величина инвестируемого капитала, начальный момент инвестиций).

Внешние факторы определяют рыночную среду, т.е. условия, в которых протекает финансовый процесс. К ним относятся:

во-первых, инфляционные ожидания, влияющие на уровень процентных ставок. Снижение покупательной способности денег за период кредитования приводит к уменьшению реального размера заемных средств, возвращаемых кредитору. Соответственно кредиторы пытаются компенсировать снижение реальных доходов за счет увеличения процентных ставок по активным операциям. Конкуренция на рынке финансовых ресурсов также оказывает влияние на уровень банковских процентных ставок. Развитие рынка ценных бумаг выступает одним из факторов ценообразования на кредитном рынке. Открытость национальной экономики, международная миграция капиталов, обменный курс валют, состояние платежного баланса страны – факторы, также влияющие на национальную систему процентных ставок;

во-вторых, практически любой финансовой сделке присущ фактор риска. С позиции макроэкономики, риск зависит от экономической, политической и прочих составляющих и часто не поддается управлению;

в-третьих, система налогообложения определяет размер чистой прибыли, остающейся в распоряжении налогоплательщика. Меняя ставки налогообложения, порядок взимания налогов, применяя систему льгот, государство стимулирует определенные экономические процессы.

Задачей внутренних и внешних факторов финансового процесса полностью определяет его динамику. Внешние факторы, как правило, не поддаются управлению, однако при проведении финансово-экономических расчетов их необходимо учитывать. Это относится, прежде всего, к учету влияния инфляции, налоговой системы, финансовых рисков. Внутренние факторы могут рассматриваться двояко: как управляющие параметры, либо как параметры, значение которых необходимо определить в ходе выполнения расчетов.

1.1.2. Виды процентов

Методы финансово-экономических расчетов различны в зависимости от вида применяемых процентов. Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными денежными средствами проценты подразделяются на: обычные (декурсивные) и авансовые (антисипативные).

Рассмотренным двум видам процентов на практике соответствуют определенные процентные ставки. Пусть сумма PV предоставлена в долг условием, что через n лет будет возвращена большая сумма FV.

Обычная годовая ставка процентов i рассчитывается по формуле:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \tag{1.1.1}$$

где FV – будущая стоимость;

PV – настоящая стоимость;

n – число лет.

Учетная годовая ставка процентов d – по формуле:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \tag{1.1.2}$$

Обе ставки взаимосвязаны, т.е. зная один из показателей, можно рассчитать другой по формулам соответственно:

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad \text{и} \qquad d = \frac{i}{1+i} \tag{1.1.3}$$

Пример 1.1.1. Предприниматель получил на два года кредит в размере 100 000 ден. ед. В конце срока он должен возвратить 140 000 ден. ед. Определить доход кредитора в виде процентной и учетной ставок.

Решение. Параметры задачи: $n = 2$ года, $PV = 100\,000$ ден. ед., $FV = 140\,000$ ден. ед.

Тогда обычная процентная ставка равна:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{140\,000 - 100\,000}{100\,000 \cdot 2} = 0{,}2 \text{ или } 20\ \%,$$

учетная:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} = \frac{140\,000 - 100\,000}{140\,000 \cdot 2} = 0{,}167 \text{ или } 16{,}7\ \%.$$

Видно, что при равной величине процентных денег $I = FV - PV = 40\,000$ ден. ед. величина процентной ставки $i = 20$ % выше величины учетной ставки $d = 16{,}7$ %.

В зависимости от условий проведения финансовых операций, начисление процентов может осуществляться с применением простых, либо сложных процентов.

Базой для исчисления простых процентов за каждый период служит первоначальная сумма сделки.

Простые проценты чаще всего используются в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года.

База для начисления сложных процентов меняется за счет присоединения ранее начисленных процентов, т. е. она включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов. Сложные проценты применяются в большей степени в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года.

1.1.3. Наращение и дисконтирование

Процесс, в котором по заданной исходной сумме и процентной ставке необходимо найти ожидаемую в будущем к получению сумму, в финансовых вычислениях называется **процессом наращения**.

Процесс, в котором по заданной ожидаемой в будущем к получению сумме и процентной ставке необходимо найти исходную сумму долга, называется **процессом дисконтирования**.

Наращение позволяет определить будущую величину FV текущей суммы PV через некоторый промежуток времени, исходя из заданной процентной ставки i.

Дисконтирование представляет собой процесс нахождения на заданный момент времени современной величины PV по ее известному или предполагаемому значению FV в будущем, исходя из заданной процентной ставки d.

Логика финансовых операций схематически изображена на рис. 1.1.1.

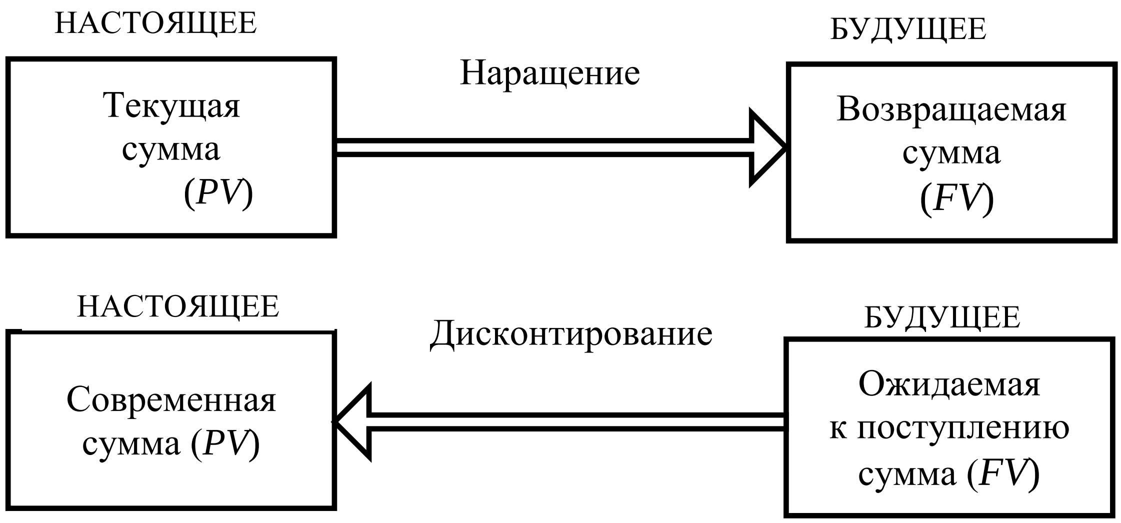

Рис.1.1.1 Логическая схема операций наращения и дисконтирования

Наращение по схеме простых процентов происходит следующим образом.

Пусть $t = 0$ — момент размещения суммы PV на банковский счет под ставку простых процентов i сроком на n лет. Проценты за первый год вклада равны $PV \cdot i$. Следовательно, в конце первого процентного периода, $t = 1$, сумма денег составит $PV + i \cdot PV = PV(1 + i)$. В конце второго процентного периода, $t = 2$, сумма увеличится еще на $PV \cdot i$ и составит $PV + 2 \cdot i \cdot PV = PV(1 + 2i)$. И так далее. В конце n-го процентного периода наращенная сумма составит $PV \cdot [1 + (n-1) \cdot i] + PV \cdot i = PV(1 + ni)$. Таким образом, наращенная сумма вклада через n лет равна:

$$FV = PV(1 + n \cdot i) \qquad (1.1.4)$$

Если срок проведения финансовой операции меньше года, то $n = t/T$. Здесь t — число дней проведения операции, T — временная база (число дней в году 360 или 365 (366)). Тогда формула для определения наращенной суммы примет вид:

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T} \cdot i\right) \qquad (1.1.5)$$

Сумма наращенных процентов равна $I = FV — PV = PV·(i·t/T)$.

При определении продолжительности финансовой операции дата выдачи и дата погашения считаются за один день.

Если срок финансовой операции выражен в днях, то расчет простых процентов может быть произведен согласно одной из трех возможных практик:

1) *германская практика расчета* или *обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды* (**360/360**), когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца — за 30 дней. Обычно используется в Германии, Дании, Швеции;

2) *французская практика расчета* или *банковский метод* (**365/360**), когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность финансовой операции рассчитывается точно по календарю. Имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии;

3) *английская практика расчета* или *точные проценты* (**365/365**), когда продолжительность года и продолжительность финансовой операции берутся точно по календарю. Применяется в России, Великобритании, Португалии, США.

Коммерческие банки могут самостоятельно выбирать методику расчета продолжительности финансовой операции. Причем в одном и том же банке для различных типов операций применяются разные практики. При этом в кредитных операциях обычно используется германская практика, в депозитных — английская.

Пример 1.1.2. Сумма 2 000 000 ден. ед. размещена на депозит 18 февраля 2021 года и востребована 25 декабря того же года. Ставка банка составляет 35 % годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

Решение. Параметры задачи: $PV = 2\,000\,000$ ден. ед., $t_{нач} =$ 18.02.2021, $t_{ок} = 25.12.2021$, $i = 35$ %.

1 Германская практика начисления простых процентов, 360/360.

Количество дней финансовой операции равно t = 11 (февраль) + 30 (март) + 30 (апрель) + 30 (май) + 30 (июнь) + 30 (июль) + 30 (август) + 30 (сентябрь) + 30 (октябрь) + 30 (ноябрь) + 25 (декабрь) — 1 = 305 дней.

Сумма начисленных процентов равна

$$I = PV \cdot \frac{t}{T} \cdot i = 2\,000\,000 \cdot \frac{305}{360} \cdot 0{,}35 = 593\,056 \text{ ден. ед.}$$

2 Французская практика начисления процентов, 365/360. Количество дней финансовой операции равно t = 11 (февраль) + 31 (март) + 30 (апрель) + 31 (май) + 30 (июнь) + 31 (июль) + 31 (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) + 30 (ноябрь) + 25 (декабрь) — 1 = 310 дней.

По таблицам порядковых номеров дней в году (Приложение А) можно также определить точное число дней финансовой операции:

$$t = 359 - 49 = 310 \text{ дней.}$$

Сумма начисленных процентов равна $I = 2\,000\,000 \cdot \frac{310}{360} \cdot 0{,}35 =$ 602 778 ден. ед.

3 Английская практика начисления процентов, 365/365. Количество дней финансовой операции равно t = 310 дней.

Сумма начисленных процентов равна $I = 2\,000\,000 \cdot \frac{310}{365} \cdot 0{,}35 =$ 594 521 ден. ед.

Как видно, результат финансовой операции во многом зависит от выбора способа начисления простых процентов. Поскольку точное число дней в большинстве случаев больше приближенного числа дней, то и проценты с точным числом дней ссуды обычно получаются выше процентов с приближенным числом дней ссуды.

В условиях финансовой операции иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки.

Процентная ставка называется **переменной**, если она изменяет свое значение в течение срока финансовой операции. Пусть в течение периода n_1 процентная ставка равна i_1, в течение периода n_2 — i_2 и т. д., в течение периода n_k — i_k. Тогда наращенная сумма за период $n = n_1 + + n_2 + \ldots + n_k$ в схеме простых процентов равна:

$$FV = PV + PV \cdot n_1 \cdot i_1 + PV \cdot n_2 \cdot i_2 + \ldots + PV \cdot n_m \cdot i_m =$$
$$= PV(1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \ldots + n_m \cdot i_m) \qquad (1.1.6)$$

При наращении по простой процентной ставке с использованием реинвестирования осуществляется наращение и на проценты, начисленные в предыдущих периодах.

Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1, тогда к концу этого периода наращенная сумма составит $PV\,(1+n_1 i_1)$. Затем эта сумма будет помещена на следующий срок n_2 под i_2 простых процентов. К концу периода n_2 наращенная сумма будет равна величине $PV\,(1+n_1 \cdot i_1)(1+n_2 \cdot i_2)$. И так далее. Итоговая наращенная сумма определится по формуле:

$$FV = PV(1 + n_1 \cdot i_1)(1 + n_2 \cdot i_2)\ldots(1 + n_t \cdot i_k) \qquad (1.1.7)$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — продолжительность периодов наращения;

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ — ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 1.1.3. Вкладчик поместил в банк 15 000 ден. ед. на следующих условиях: в первый год процентная ставка составляет 20 % годовых, а в каждые последующие полгода ставка повышается на 3 %. Найти наращенную за 2 года сумму вклада, если:

а) используется переменная процентная ставка;

б) проценты начисляются с одновременной капитализацией процентного дохода.

Решение. Параметры задачи: $PV = 15\,000$ ден. ед., $i_1 = 20$ %, $n_1 = 1$ год, $i_2 = 23$ %, $n_2 = 1/2$ года, $i_2 = 26$ %, $n_3 = 1/2$ года. Наращенная сумма равна:

а) $FV = 15\,000 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}2 + 1/2 \cdot 0{,}23 + 1/2 \cdot 0{,}26) = 21\,675$ ден. ед.;

б) $FV = 15\,000 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}2) \cdot (1 + 1/2 \cdot 0{,}23) \cdot (1 + 1/2 \cdot 0{,}26) = 22\,679$ ден. ед.

Таким образом, реинвестирование дает больший финансовый результат, чем переменная ставка процентов.

Наращение по схеме сложных процентов происходит следующим образом.

Пусть в момент $t = 0$ сумма PV размещена на банковский счет под сложную годовую процентную ставку i сроком на n лет. Проценты начисляются один раз в конце года. Через один период наращения (через год) на счете будет сумма, равная $PV + i \cdot PV = PV(1 + i)$. Полученная сумма вновь инвестирована под процентную ставку i на следующий процентный период. Тогда к концу второго процентного периода на его счете будет сумма, которая исчислена следующим образом: $PV(1 + i) + i \cdot PV(1 + i) = PV(1 + i)^2$. И так далее. Наращенная сумма к концу n-го периода суммы PV определяется по формуле:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \tag{1.1.8}$$

В данном случае имеет место так называемая капитализация процентов. Величина $(1 + i)^n$ называется множителем наращения в схеме сложных процентов.

Пример 1.1.4. Сумма в размере 2 000 000 ден. ед. дана в долг на 2 года по ставке сложного процента равной 35 % годовых. Определить сумму, подлежащую возврату, и процентные деньги.

Решение. Параметры задачи: $PV = 2\,000\,000$ ден. ед., $n = 2$ года, $i = 35$ %. Тогда наращенная сумма равна:

$$FV = 2\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}35)^2 = 3\,645\,000 \text{ ден. ед.}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = FV — PV = 3\ 645\ 000 — 2\ 000\ 000 = 1\ 645\ 000$$ ден. ед.

Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 3 645 000 ден. ед., из которой 2 000 000 ден. ед. составляет долг, а 1 645 000 ден. ед. — «цена долга».

Применяя формулу наращения сложных процентов последовательно для каждого периода наращения n_1, n_2, … , n_k, когда использовались сложные ставки i_1, i_2, …, i_k соответственно, получаем наращенную сумму:

$$FV = PV(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}....(1+i_k)^{n_k} \qquad (1.1.9)$$

Пример 1.1.5. Фирма получила кредит в банке на сумму 100 000 ден. ед. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10 % для 1-го года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,5 %, для последующих лет 1 % за три года. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока.

Решение. Параметры задачи: $PV = 100\ 000$ ден. ед., $i_1 = 10$ %, $n_1 = 1$ год, $i_2 = 11{,}5$ %, $n_2 = 1$ год, $i_3 = 12{,}5$ %, $n_3 = 3$ года. Используя формулу переменных процентных ставок, получаем:

$$FV = 100\ 000 \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}115) \cdot (1 + 0{,}125)^3 = 174\ 633$$ ден. ед.

Таким образом, сумма, подлежащая погашению в конце срока займа, составит 174 633 ден. ед., из которых 100 000 ден. ед. являются непосредственно суммой долга, а 74 633 ден. ед. – проценты по долгу.

В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет $n = a + b$, a – целое число лет; b – дробная часть года, $0 < b < 1$, начисление процентов возможно с использованием общего и смешанного методов.

Общий метод расчета заключается в прямом расчете по формуле сложных процентов: $FV = PV\,(1 + i)^{a+b}$.

Смешанный метод расчета предполагает для целого числа лет периода начисления процентов использовать формулу сложных процентов, а для дробной части года – формулу простых процентов: $FV = PV \cdot (1 + i)^a \cdot (1 + b \cdot i)$.

Поскольку $b < 1$, то $1 + b \cdot i > (1 + i)^b$, то наращенная сумма будет больше при использовании смешанного метода.

Пример 1.1.6. В банке получен кредит под 9,5 % годовых в размере 250 000 ден. ед. со сроком погашения через 2 года и 9 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть, двумя методами, учитывая, что банк использует германскую практику начисления процентов.

Решение. Параметры задачи: $PV = 250\,000$ ден. ед., $n = 2$ года и 9 месяцев, $i = 9{,}5$ %.

Общий метод:

$$FV = 250\,000 \cdot (1 + 0{,}095)^{2+9/12} = 320\,870 \text{ ден. ед.}$$

Смешанный метод:

$$FV = 250\,000 \cdot (1 + 0{,}095)^2 \cdot (1 + 270/360 \cdot 0{,}095) = 321\,114 \text{ ден. ед.}$$

Видно, смешанная схема более выгодна кредитору.

Иногда в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а полугодие, квартал, месяц или другой период времени, т. е. проценты начисляются m раз в году. Тогда в контрактах фиксируется не ставка за процентный период, а годовая ставка процентов, которая называется *номинальной*.

Пусть годовая ставка равна j, срок финансовой операции n лет, а число периодов начисления процентов в году равно m. Тогда в каждом периоде длиной $1/m$ часть года проценты начисляются по ставке j/m, количество начислений при этом составит $N = m \cdot n$. Наращенная сумма равна:

$$FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}, \; m \geq 1 \qquad (1.1.10)$$

Пример 1.1.7. Сумма в размере 2 000 ден. ед. дана в долг на 2 года под 10 % годовых. Определить сумму, подлежащую возврату, если проценты начисляются: а) 1 раз в году; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

Решение. Параметры задачи: PV = 2 000 ден. ед., i = 10 %, n = 2 года.

а) при $m = 1$ наращенная сумма равна

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 2\,420 \text{ ден. ед.,}$$

Сумма начисленных процентов равна

$$I = FV — PV = 2\,420 — 2\,000 = 420 \text{ ден. ед.;}$$

б) при $m = 4$ количество периодов начисления равно $N = m \cdot n = 4 \cdot 2 = 8$. Наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot (1 + j\,/\,m)^{m \cdot n} = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1\,/\,4\,)^8 = 2\,437 \text{ ден. ед.,}$$

Сумма процентов равна $I = FV — PV = 2\,437 — 2\,000 = 437$ ден. ед.

в) при $m = 12$ количество периодов начисления $N = m \cdot n = 4 \cdot 12 = 24$. Наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot (1 + j\,/\,m)^{m \cdot n} = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1\,/\,12\,)^{24} = 2\,441 \text{ ден. ед.}$$

Сумма процентов равна $I = FV — PV = 2\,441 — 2\,000 = 441$ ден. ед.

Видно, что чем больше раз в году начисляются проценты, тем больше наращенная сумма и, как следствие, процентные деньги.

Наряду с номинальной ставкой существует эффективная ставка, измеряющая тот реальный относительный доход, который получен в целом за год с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в году по ставке j/m. Эффективная ставка определяется по формуле:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \qquad (1.1.11)$$

Пример 1.1.8. Определить эффективную ставку финансовой операции при:

а) ежеквартальном,

б) ежемесячном начислении процентов по годовой ставке 10%.

Решение. Параметры задачи: j = 10 %.

а) при m = 4 эффективная ставка равна:

$$i_{eff} = (1 + j / m)^m — 1 = (1 + 0,1 / 4)^4 — 1 = 0,103\ 8 \text{ или } 10,38\%,$$

б) при m = 12 эффективная ставка равна:

$$i_{eff} = (1 + j / m)^m — 1 = (1 + 0,1 / 12)^{12} — 1 = 0,104\ 7 \text{ или } 10,47\%,$$

Таким образом, годовая ставка, эквивалентная номинальной ставке 10% годовых при ежемесячном начислении процентов, составит 10,47% против 10,38% с ежеквартальным начислением процентов. Очевидно, что чем больше периодов начисления, тем быстрее идет процесс наращения.

Расчет эффективной ставки является мощным инструментом финансового анализа, поскольку ее значение позволяет сравнивать между собой финансовые операции, имеющие различные условия: чем выше эффективная ставка финансовой операции, тем (при прочих равных условиях) она выгоднее для кредитора.

Если известна эффективность i_{eff} финансовой операции, то номинальная ставка определяется по формуле:

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1\right) \tag{1.1.12}$$

Пример 1.1.9. Какая номинальная ставка процентов при ежемесячном начислении процентов даст эффективность финансовой операции 10 %?

Решение. Параметры задачи: i_{eff} = 10 %. Номинальная ставка равна:

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1\right) = 12 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + 0,1} - 1\right) = 0,0957 \text{ или } 9,57\ \%,$$

Таким образом, номинальная ставка 9,57 % обеспечивает годовую доходность 10 %.

В любой простейшей финансовой операции всегда присутствуют четыре величины: первоначальная сумма PV, наращенная сумма FV, процентная ставка *i* и время *n*. Как правило, в финансовых контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периоды начисления процентов, поскольку фактор времени в финансово-коммерческих расчетах играет важную роль. Однако бывают ситуации, когда срок финансовой операции прямо в условиях финансовой сделки не оговорен, или когда неизвестна процентная ставка. В таких случаях неизвестный параметр находится из соответствующего соотношения.

В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме FV следует определить неизвестную первоначальную сумму долга PV. Такой расчет называется дисконтированием или приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величина PV называется современной (приведенной или текущей) величиной FV.

Таким образом, **дисконтирование** — это приведение будущих денег к текущему моменту времени. При этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция, а также можно ли считать дисконтируемую сумму буквально наращенной.

Исходя из методики начисления процентов, используются два вида дисконтирования:

математическое дисконтирование по обычной процентной ставке

$$i = \frac{FV - PV}{PV} \tag{1.1.13}$$

банковский учет по учетной ставке

$$d = \frac{FV - PV}{FV} \tag{1.1.14}$$

Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называется учетом, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга называются дисконтом: $D = FV — PV$.

Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче кредита.

Математическое дисконтирование – это формальное решение задачи, обратной задаче о наращении суммы долга. В зависимости от способа применения процентной ставки i в течение n периодов из формул наращенных сумм получается:

а) простая процентная ставка $PV = FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1}$;

б) сложная процентная ставка $PV = FV \cdot (1 + i)^{-n}$;

в) номинальная ставка процентов с m разовым начислением процентов в году $PV = FV \cdot (1 + \frac{j}{m})^{-mn}$;

г) непрерывная ставка процентов $PV = FV \cdot e^{-n\delta}$.

Пример 1.1.10. Через 150 дней с момента подписания контракта необходимо уплатить 310 000 ден. ед., исходя из 28 % годовых (простые проценты) и временной базы 360 дней. Определить первоначальную сумму долга.

Решение. Параметры задачи: FV = 310 000 ден. ед., t = 150 дней, T = 360, i = 28 %. Получается:

$$PV = FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1} = \frac{310\,000}{1 + 0{,}28 \cdot \frac{150}{360}} = 277\,612 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, первоначальная сумма долга составила 277 612 ден. ед., а проценты за 150 дней равны 310 000 — 277 612 = 32 388 ден. ед.

Пример 1.1.11. Фирме потребуется 50 000 ден. ед. через 3 года. В настоящее время фирма располагает деньгами и готова разместить их на депозит единым вкладом, чтобы через 3 года он достиг 50 000 ден. ед.

Определить необходимую сумму текущего вклада, если ставка процентов по нему 8 % годовых и проценты начисляются ежемесячно.

Решение. Параметры задачи: FV = 50 000 ден. ед., i = 8 %, n = 3 года, m = 12. Таким образом:, получается:

$$PV = \frac{50\,000}{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12\cdot 3}} = 39\,363 \text{ ден. ед.,}$$

Таким образом, первоначальное вложение составляет 39 363 ден. ед.

Банковское дисконтирование происходит по следующей схеме. По заданной сумме FV, которая будет выплачена через время n лет, требуется определить сумму долга PV в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент $t = 0$ предоставления денег в долг. Для начисления и удержания процентов применяется простая учетная ставка d.

Пусть $t = n$ — момент погашения суммы FV. Согласно определению простой учетной ставки, сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, равна $FV - d \cdot FV = FV(1-d)$. Величина дисконта за n — й период дисконтирования есть $d{\cdot}FV$. Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 2$, равна $FV(1-d) - d \cdot FV = FV(1-2d)$, дисконт — $d{\cdot}FV$ и т. д. Аналогично, в начальный момент времени $t = 0$ современная величина суммы FV равна $PV = FV(1-(n-1)d) - FV \cdot d = FV(1-n \cdot d)$.

Таким образом, формула банковского учета имеет вид:

$$PV = FV(1-n \cdot d) \qquad (1.1.15)$$

Данное соотношение означает, что в обмен на выплату суммы FV через время n кредитор даст взаймы сумму $FV(1-nd)$ в начале этого срока.

Если срок финансовой операции меньше года, то для вычисления современной величины используется формула:

$$PV = FV\left(1 - \frac{t}{T} \cdot d\right) \qquad (1.1.16)$$

где t — число дней проведения операции;

T — временная база (число дней в году — 360 или 365 (366)).

Пример 1.1.12. Вексель выдан на 5 000 ден. ед. с уплатой 17 ноября невисокосного года, а владелец учел его в банке 19 августа того же года по учетной ставке 8 %. Определить сумму, полученную предъявителем векселя, и доход банка при реализации дисконта.

Решение. Параметры задачи: FV = 5 000 ден. ед., $t_{упл}$ = 17.11.20хх, $t_{учет}$ = 19.11.20хх, d = 8 %, T = 360.

Для определения суммы при учете векселя рассчитываем число дней, оставшихся до погашения обязательств:

t = 13 (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) + 17 (ноябрь) — 1 = 90 дней.

Отсюда:

$$PV = 5\,000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}08\right) = 4\,900 \text{ ден. ед.}$$

Тогда дисконт составит D = FV — PV = 100 ден. ед. Следовательно, предъявитель векселя получит сумму 4 900 ден. ед., а банк при наступлении срока векселя реализует дисконт в размере 100 ден. ед.

Рассмотрим процесс дисконтирования суммы FV по периодам, начиная с n-го. Такой порядок рассмотрения периодов означает, что n-й период дисконтирования является предыдущим по отношению к (n — 1)-му, (n — 1)-й период является предыдущим по отношению к (n — 2)-му и т. д.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n$ — 1, т. е. за единицу времени до погашения суммы FV, есть $FV - d \cdot FV = FV(1-d)$.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n$ — 2, за два периода до погашения суммы FV, есть $FV(1-d) - d \cdot FV(1-d) = FV(1-d)^2$ И так далее. Приведенная к моменту t = 0 величина суммы FV — это сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t=0$ за n периодов до погашения суммы FV, и она равна:

$$FV(1-d)^{n-1} - d \cdot FV(1-d)^{n-1} = FV(1-d)^{n} \qquad (1.1.17)$$

Таким образом, современная величина суммы FV при банковском учете ее сложными процентами по ставке d в течение n периодов имеет вид:

$$PV = FV(1-d)^{n} \qquad (1.1.18)$$

Величина $(1-d)^n$ называется множителем дисконтирования по сложной учетной ставке.

Пример 1.1.13. Определить величину суммы, выдаваемую заемщику, если он обязуется вернуть ее через 2 года в размере 55 000 ден. ед. Банк определяет свой доход с использованием годовой учетной ставки 30 %.

Решение. Параметры задачи: FV = 55 000 ден. ед., n = 2 года, d = 30 %. По формуле дисконтирования по сложной учетной ставке, определяем:

$$PV = 55\,000 \cdot (1-0{,}3)^2 = \text{ден. ед.}$$

Заемщик может получить ссуду в размере 26 950 ден. ед., а через 2 года вернет 55 000 ден. ед.

Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а m раз в году, то годовая учетная ставка называется номинальной и обозначается через f. При дисконтировании по сложной учетной ставке через равные промежутки времени m раз в году в начале каждого периода длиной $1/m$ начисляются и удерживаются проценты по ставке f/m. Если срок долга n лет, то $N = m{\cdot}n$ — число периодов применения ставки f/m в сроке долга. Тогда современная величина равна:

$$PV = FV\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}, \; m \geq 1 \qquad (1.1.19)$$

Эффективная учетная ставка d_{eff} – это годовая учетная ставка сложных процентов, удерживаемых один раз в начале года, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m-разовое дисконтирование в году по ставке f / m. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует:

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \qquad (1.1.20)$$

Годовая эффективная учетная ставка d_{eff} измеряет реальный относительный доход, получаемый за год при m-разовом дисконтировании в году.

Пример 1.1.14. Какой годовой эффективной учетной ставкой можно заменить в контракте годовую номинальную учетную ставку 5 % при поквартальном учете суммы погашаемого долга?

Решение. Параметры задачи: $m = 4$, $f = 0{,}05$. Тогда имеем:

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \frac{0{,}05}{4}\right)^4 = 0{,}049\,07 \text{ или } 4{,}907\ \%.$$

Для участников сделки безразлично, производить дисконтирование 4 раза в году в начале каждого квартала по ставке 5 %/4 = 1,25 % или 1 раз в начале года по ставке 4,907 %. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

Если требуется определить годовую номинальную учетную ставку f при заданных d_{eff} и m, то получаем:

$$f = m \cdot \left(1 - (1 - d_{eff})^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (1.1.21)$$

Пример 1.1.15. Какой должна быть годовая номинальная учетная ставка, соответствующая эффективной учетной ставке 5 % при:

а) поквартальном;

б) ежемесячном учете суммы погашаемого долга?

Решение. Параметры задачи: $d_{eff} = 0{,}05$.

а) при m = 4 имеем:

$$f = 4 \cdot \left(1 - (1 - 0{,}05)^{\frac{1}{4}}\right) = 0{,}050\,9 \text{ или } 5{,}09\ \%;$$

б) при m = 12 имеем:

$$f = 12 \cdot \left(1 - (1 - 0{,}05)^{\frac{1}{12}}\right) = 0{,}051\,2 \text{ или } 5{,}12\ \%.$$

Видно, что увеличение периодов дисконтирования в году увеличивает номинальную учетную ставку. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

Вопросы для самоконтроля

1. Наращение по простым процентам
2. Наращение по схеме сложных процентов
3. Эффективная учетная ставка
4. Практики начисления простых процентов
5. Определение числа дней ссуды
6. Переменные процентные ставки
7. Реинвестирование по простым ставкам
8. Дисконтирование по простым процентным ставкам
9. Капитализация по учетной ставке
10. Определение срока величины процентной ставки

Задачи для самостоятельного решения

1. Кредит в размере 5 000 000 ден. ед. выдан 15 января до 17 октября не високосного года включительно под 15% годовых. Определите сумму долга в конце срока? Найдите решение тремя практиками расчета.

2. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие — процентная ставка 10 % годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определите

наращенную сумму за год, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 500 000 ден. ед.

3. Вкладчик разместил в банк депозит в размере 600 000 ден. ед. Какова будет наращенная сумма вклада за 5 месяцев, если за первый месяц начисляются простые проценты в размере 8 % годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5 % с одновременной капитализацией процентного дохода?

4. Какой величины достигнет долг, равный 1 000 000 ден. ед., через 5 лет при росте по сложной ставке 15 % годовых:

а) один раз в году, б) ежеквартально, в) ежемесячно, г) непрерывно?

5. Какой капитал нужно вложить сегодня, чтобы он вместе с 8 % годовых в течение 10 лет и 8 месяцев увеличился на 60 000 ден. ед.?

6. Договор вклада заключен сроком на 2 года и предусматривает начисление и капитализацию процентов по полугодиям. Сумма вклада 15 000 руб., годовая ставка 16 %. Рассчитать сумму на счете клиента к концу срока.

7. Кредит в размере 30 000 ден. ед. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5 % сложных годовых. Найдите сумму долга на конец срока двумя методами.

8. Найдите эффективную ставку процента, если номинальная ставка равна 24 % при ежемесячном начислении процентов.

9. Какой капитал был внесен в банк, если он, вложенный на 7 лет под процентную ставку 8 % и 3-месячную капитализацию, увеличился на 30 000 ден. ед. при вычислении сложных процентов?

10. Какую сумму следует поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 300 000 ден. ед., если проценты начисляются непрерывно по ставке 18 %?

Тема 1.2. Финансовая эквивалентность обязательств

План

1.2.1. Общие принципы финансовой эквивалентности

1.2.2. Финансовая эквивалентность процентных ставок

1.2.3. Замена и консолидация платежей

1.2.1. Общие принципы финансовой эквивалентности

В финансовой практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно обязательство другим, например, с более отдаленным сроком платежа, досрочно погасить задолженность, объединить несколько платежей в один, изменить схему начисления процентов и т. п.

Изменение условий контракта основывается на принципе финансовой эквивалентности обязательств, который позволяет сохранить баланс интересов сторон контракта. Этот принцип предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта.

При изменении способов начисления процентов необходимо учитывать взаимозаменяемость между различными видами процентных ставок.

Эквивалентными процентными ставками называются процентные ставки, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т. е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции. При изменении условий платежей также необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения.

Эквивалентными платежами считаются такие платежи, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

1.2.2. Эквивалентность процентных ставок

Для нахождения значений эквивалентных процентных ставок следует составлять уравнение эквивалентности.

1. *Эквивалентность простой процентной и простой учетной ставок.* Исходные уравнения для вывода эквивалентности $FV = PV\,(1 + n \cdot i)$ и $FV = PV\,(1 — n \cdot d)^{—1}$. Если результаты наращения равны, то получаем уравнение $PV\,(1 + n \cdot i) = PV\,(1 — n \cdot d)^{—1}$. Отсюда:

$$i = d/(1 — n \cdot d)^{—1} \tag{1.2.1}$$

$$d = i/(1 + n \cdot i)^{—1} \tag{1.2.2}$$

Для одних и тех же параметров ссуды условие эквивалентности приводит к тому, что $d < i$. При этом с ростом срока финансовой операции различие между ставками увеличивается.

Пример 1.2.1. Определить простую учетную ставку, эквивалентную ставке обычных процентов 12 % годовых, при наращении за 2 года.

Решение. Параметры задачи: $n = 2$ года, $i = 12$ %. Тогда $d = 0{,}12/(1 + 2 \cdot 0{,}12i)^{—1} = 0{,}096\,8$ или 9,7 %.

Следовательно, операция, в которой принята учетная ставка 9,7 %, дает тот же финансовый результат для 2-годичного периода, что и простая ставка 12 % годовых.

2. *Эквивалентность простой и сложной процентных ставок.* Наращенные суммы по простой и сложной процентным ставкам равны $FV = PV(1+n\cdot i_{п})$ и $FV = PV(1+i_c)^n$. Если равны результаты наращения, то уравнение эквивалентности $1+n\cdot i_{п}=(1+i_c)^n$. Отсюда:

$$i_{п} = ((1+i_c)^n - 1)/n \tag{1.2.3}$$

$$i_c = \sqrt[n]{1 + i_п} - 1 \qquad (1.2.4)$$

При начислении процентов m раз в году аналогично рассуждая, получим:

$$i_п = \frac{1}{n}\left(\left(1 + \frac{j_c}{m}\right)^{m\,n} - 1\right) \qquad (1.2.5)$$

$$i_c = m\left(\sqrt[m\,n]{1 + \frac{j_c}{m}} - 1\right) \qquad (1.2.6)$$

Пример 1.2.2. Предполагается поместить капитал на 4 года либо под сложную процентную ставку 20 % годовых с полугодовым начислением процентов, либо под простую процентную ставку 26 % годовых. Найти оптимальный вариант.

Решение. Параметры задачи: n = 4 года, m = 2, $i_с$ = 20 %, $i_п$ = 26 %.

Находим для сложной процентной ставки эквивалентную простую ставку:

$$i_п = \frac{1}{4}\left(\left(1 + \frac{0{,}2}{2}\right)^{2\cdot 4} - 1\right) = 0{,}285\,9 \text{ или } 28{,}59\ \%.$$

Таким образом, эквивалентная сложной ставке, по первому варианту, простая процентная ставка составляет 28,59 % годовых, что выше предлагаемой простой ставки в 26 % годовых по второму варианту.

Пример 1.2.3. По трёхмесячному депозиту назначена ставка 10,2 % годовых. Какую ставку годовых процентов следует назначить на ежемесячные депозиты, чтобы последовательное переоформление этих депозитов привело к такому же результату, что и использование трёхмесячного депозита, если пренебречь двумя днями, которые теряются при переоформлении депозитов (T = 360)?

Решение. Приравняем соответствующие множители наращения:

$$1 + 0{,}102/4 = (1 + i/12)^3.$$

Отсюда получаем, что i = 0,101 1 или 10,11 %.

3. *Эквивалентность сложной процентов и сложной учетной ставок.* Исходные соотношения есть $FV = PV(1+i_c)^n$ и $FV = PV(1-d_c)^{-n}$. Аналогично рассуждая, получим $i_c = d_c(1-d_c)^{-1}$ и $d_c = i_c(1+i_c)^{-1}$.

1.2.3. Замена и консолидация платежей

Наиболее распространенным способом изменения условий контрактов является консолидация (объединение) и пролонгация (продление) финансовых обязательств. Соответственно решаются две задачи:

1) при известных суммах платежей и их сроках, известном сроке консолидированного платежа, находится его сумма;

2) при известных суммах платежей и их сроках, известной сумме консолидированного платежа, находится срок его выплаты.

Простая процентная ставка. Для краткосрочных контрактов консолидация осуществляется на основе простых ставок. В случае консолидирования нескольких платежей в один сумма заменяемых платежей, приведенных к одной и той же дате, приравнивается к новому обязательству:

$$FV_0 = \sum_m FV_m\big(1+(n_0-n_m)\cdot i\big)+\sum_q FV_q\big(1+(n_q-n_0)\cdot i\big)^{-1}, \qquad (1.2.7)$$

где FV_0, n_0 – сумма и срок консолидированного платежа;

FV_m – сумма объединенных платежей, сроки погашения которых меньше нового срока $n_m < n_0$;

FV_q – сумма объединенных платежей, сроки погашения которых превышают новый срок $n_q > n_0$.

Пример 1.2.4. Фирма в погашение задолженности банку за предоставленный кредит 1 января 2021 под 15 % годовых (простые проценты), должна произвести три платежа — 200 ден. ед., 270 ден. ед, 330 ден. ед. в сроки 20.04.21, 25.05.21, 15.06.21. Фирма предложила объединить все платежи в один и погасить его 01.06.21. Определить величину консолидированного платежа.

Решение. С учетом порядковых дней года (Приложение А) имеем:

$$FV_0 = 200\cdot\left(1+\frac{152-110}{365}\cdot 0{,}15\right)+270\cdot\left(1+\frac{152-145}{365}\cdot 0{,}15\right)+$$

$$+330\cdot\left(1+\frac{166-152}{365}\cdot 0{,}15\right)^{-1} = 802 \text{ ден. ед.}$$

Итак, величина консолидированного платежа равна 802 ден. ед.

Простая учетная ставка. При консолидации векселей по простой учетной ставке d консолидированный платеж FV_0 находится по формуле:

$$FV_0 = \sum_m FV_m\bigl(1-(n_0-n_m)\cdot d\bigr)^{-1} + \sum_q FV_q\bigl(1-(n_q-n_0)\cdot d\bigr) \qquad (1.2.8)$$

Пример 1.2.5. Три векселя со сроками уплаты 15.03.21 (500 ден. ед.), 10.04.21 (88 ден. ед.) и 01.06.21 (900 ден. ед.) заменяются одним со сроком погашения 15.05.21. При консолидации используется простая учетная ставка 9 %. Определить величину консолидированного векселя.

Решение. Имеем

$$FV_0 = 500\cdot\left(1-\frac{135-74}{360}\cdot 0{,}09\right)^{-1}+800\cdot\left(1+\frac{135-100}{360}\cdot 0{,}09\right)^{-1}+$$

$$+900\cdot\left(1+\frac{152-135}{360}\cdot 0{,}09\right)= 2\ 211 \text{ ден. ед.}$$

Величина консолидированного векселя равна 2 211 ден. ед.

Сложная процентная ставка. При консолидации векселей в расчетах по сложной процентной ставке расчет консолидированного платежа производится по формуле:

$$FV_0 = \sum_m FV_m(1+i)^{n_0-n_m} + \sum_q FV_q(1+i)^{-(n_q-n_0)} \qquad (1.2.9)$$

Сложная учетная ставка. При консолидации векселей в расчетах по сложной учетной ставке d консолидированный платеж FV_0 находится по формуле:

$$FV_0 = \sum_m FV_m (1-d)^{-(n_0-n_m)} + \sum_q FV_q (1-d)^{n_q-n_0} \qquad (1.2.10)$$

Есть различные возможности изменения условий финансового соглашения, и в соответствии с этим существует многообразие уравнений эквивалентности. Готовыми формулами невозможно охватить все случаи, возникающие в практической деятельности, но в каждой конкретной ситуации при замене платежей уравнение эквивалентности составляется аналогичным образом.

Вопросы для самоконтроля

1. Сущность понятия «эквивалентность».
2. Сущность понятия «финансовая эквивалентность обязательств».
3. Принцип финансовой эквивалентности обязательств.
4. Какие платежи могут считаться эквивалентными?
5. Сущность применения принципа эквивалентности при изменении условий выплат денежных сумм.
6. Уравнение эквивалентности для определения суммы консолидированного платежа при применении простых процентных ставок.
7. Уравнение эквивалентности для определения суммы консолидированного платежа при применении учетных ставок.
8. Уравнение эквивалентности для определения суммы консолидированного платежа при применении сложных ставок процентов.
9. Процесс замены платежей.
10. Процесс консолидации платежей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 17 % (T год = 365), не изменяя финансовых последствий. Срок операции 560 дней.

2. При составлении контракта стороны договорились, что все начисления процентов будут проводиться по простой ставке, равной 60 % годовых. Определить значение эквивалентной учетной ставки при выдаче кредита.

3. Два платежа – 10 и 15 млн. руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Стороны согласились на применение простой ставки процентов, равной 36 % годовых. Определить сумму объединенного платежа.

4. Платежи в 10 и 25 млн. руб. со сроками уплаты два и три года объединяются в один платеж – 35 млн. руб. Определить срок консолидированного платежа при условии, что используется сложная ставка процентов, равная 24 % годовых.

5. Существует обязательство уплатить 100 млн. руб. через пять лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через два года выплачивается 40 млн. руб., а оставшийся долг спустя три года после первой выплаты. Определить сумму окончательного платежа при условии, что проценты начисляются по сложной ставке, равной 30 % годовых.

6. Вкладчик хотел бы за 7 лет утроить сумму, помещаемую в банк на депозит. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка при начислении сложных процентов каждый месяц?

7. Гражданин Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 2 000 рублей каждый квартал в течение трех лет. Через год, сделав четыре платежа, гражданин Иванов пожелал сразу погасить оставшийся долг. Какую сумму он должен заплатить, если на деньги начисляются 8 % годовых (простых)?

8. На какую годовую ставку процентов нужно заменить номинальную ставку годовых сложных процентов i=12%, если начислять сложные проценты ежеквартально по 3 %?

9. Два платежа 3 и 4,5 млн. руб. со сроками уплаты соответственно 130 и 170 дней объединяются в один со сроком 150 дней. Стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 30%. Чему будет равна консолидированная сумма долга?

10. Существует обязательство произвести платежи через 7 лет. Первоначальная сумма долга 9 млн. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 12 %. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено следующим образом:

через 3 года производится выплата 1500 тыс. руб.,

через следующие три года выплата 3800 тыс. руб.;

остальной долг гасится через 9 лет после начала обязательства.

Необходимо определить сумму окончательного платежа.

Тема 1.3. Анализ денежных потоков

План

1.3.1. Виды денежных потоков

1.3.2. Определение наращенной стоимости годовой финансовой ренты

1.3.3. Определение современной стоимости годовой финансовой ренты

1.3.4. Переменные финансовые ренты

1.3.5. Конверсия рент

1.3.1. Виды денежных потоков

Проведение любой финансовой операции порождает движение денежных средств (возникновение отдельных платежей, множество выплат, поступления в различные временные моменты).

В предыдущих темах были детально рассмотрены финансовые операции, предусматривающие отдельные разовые платежи в разные периоды времени. Однако часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серия платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты в целях погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр.

Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоками финансовых платежей**. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления – положительными.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

Наращенная сумма потока платежей – это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них к концу срока процентами.

Современная величина потока платежей – это сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

Выделяют 2 типа потоков:

нерегулярный поток платежей – поток, в котором временные интервалы имеют разную величину**;**

регулярный поток платежей – поток, в котором временные промежутки между соседними членами имеют одинаковую длину, а члены потока имеют одинаковый знак (например, положительны). Такие потоки также называются **финансовыми рентами («аннуитетами»)**.

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами постоянны, называют **финансовой рентой (аннуитетом).**

Аннуитет – поток равных платежей, вносимых или получаемых через равные промежутки времени в течение определенного периода времени.

Рента описывается следующими параметрами:

член ренты – размер отдельного платежа,

период ренты – временной интервал между двумя последовательными платежами,

срок ренты – время от начала первого периода ренты до конца последнего,

процентная ставка – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

При характеристике некоторых видов рент необходимо указать дополнительные условия и параметры. Например, число платежей в году, способ и частота начислений процентов, параметры, характеризующие закономерность изменения размеров члена ренты во времени.

Классификация рент может быть произведена по различным признакам:

в зависимости от продолжительности периода ренты делят на годовые и р-срочные, где p - число выплат в году;

по числу начислений процентов различают ренты с начислением один раз в году, m раз и непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей;

по величине членов различают постоянные (с равными членами) и переменные ренты. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты;

по вероятности выплаты членов различают ренты верные и условные. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера;

по числу членов различают ренты с конечным числом членов (или ограниченные) и бесконечные (или вечные). В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками;

члены финансовой ренты могут быть либо одинаковыми (тогда говорят о постоянной ренте), либо различаться по размеру (переменная финансовая рента). Различия могут подчиняться какой-нибудь закономерности или быть не систематическими;

в зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на немедленные и отложенные (или отсроченные). Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает;

по моменту выплаты платежей — если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются обычными, или постнумерандо. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются пренумерандо. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Таким образом, поток платежей содержит ряд последовательных выплат и поступлений. Выплаты представляются отрицательными величинами, поступления – положительными. Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма потока платежей и современная величина, которые зависят от продолжительности периода ренты, величины ренты, срока ренты, момента выплаты ренты и т.д.

1.3.2. Определение наращенной стоимости годовой финансовой ренты

Более детально на примерах рассмотрим классификацию финансовой ренты по времени осуществления платежей: постнумерандо и пренумерандо.

За счет раннего поступления денежных средств и удлиненного на один период срока начисления процентов в случае пренумерандо можно достигнуть больших финансовых результатов по сравнению с потоком платежей, вносимых в конце периода (постнумерандо).

Пусть задан регулярный финансовый поток *постнумерандо*. Суммарный годовой платеж обозначим R. Предположим, что начисление процентов и осуществление платежей производится один раз в год.

Наращенные отдельные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $(1+i)$, где i – процентная ставка.

Определим наращенную стоимость ренты FV_f, как сумму геометрической прогрессии:

$$FV_f = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad (1.3.1)$$

Выражение $f_{n.i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ называют коэффициентом или множителем наращения финансовой ренты. Он представляет собой стоимость регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице к моменту окончания всех платежей.

Рассмотрим финансовую ренту *пренумерандо*, т.е. платежи осуществляются вначале каждого периода. Следовательно, число раз наращения каждого платежа на один раз больше, что дает увеличение каждого платежа в $(1+i)$ раз. Поэтому множитель наращения будет выглядеть следующим образом: $f_{(n,i)} \cdot (1+i)$, следовательно, в этом случае:

$$FV_f = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \tag{1.3.2}$$

Пример 1.3.1. В течение 4 лет ежегодно в конце года на специальный счет поступает 50 тыс. руб. Определить наращенную стоимость начисления сложных процентов по ставке 10 %.

Решение: рента постнумерандо;

R= 50 тыс. руб., n= 4, i= 0,1

$$FV_f = 50 \cdot \frac{(1+0{,}1)^4 - 1}{0{,}1} = 50 \cdot \frac{0{,}4641}{0{,}1} = 232{,}05 \textit{тыс.руб.}$$

Пример 1.3.2. Создается целевой фонд для обеспечения инвестиций в сумме 10 млн. руб. сроком на 5 лет, процентная ставка 20 %. Определить ежегодные платежи пренумерандо.

Решение:

$FV_f^{pre} = 10 \textit{млн.руб.}; n = 5; i = 0{,}2.$

Найти R.

$$FV_f^{pre} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i); \quad 10 = R \cdot \frac{1{,}2^5 - 1}{0{,}2} \cdot 1{,}2;$$

$$10 = R \frac{1{,}48832}{0{,}2} \cdot 1{,}2; 2 \qquad 10 = R \cdot 8{,}93; \qquad R = \frac{10}{8{,}93} = 1{,}1198 \quad \textit{млн.руб.}$$

Рассмотрим случай, когда капитализация процентов осуществляется чаще, чем один раз в год. Предположим, проценты начисляются m раз в год. В этом случае их каждый раз начисляют по ставке $\frac{i}{m}$, где i – номинальная ставка процентов. Срок ренты n лет. Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$.

Наращенная сумма такой ренты определяется по формуле:

$$FV_f = R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1}, \tag{1.3.3}$$

где R — размер годового платежа.

Пример 1.3.3. На банковский счет ежегодно в конце года поступает 10 000 рублей в течение 7 лет. На эти средства ежеквартально начисляют проценты по номинальной ставке 15 % годовых. Определить, какая сумма будет на банковском счете к концу срока.

Решение: R=10 000 руб.; m = 4 раза в год; n =7 лет; i = 0, 15.

$$FV_f^{post} = R\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1} = 10000\cdot\frac{\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^{4\cdot 7}-1}{\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^4-1} = 10000\cdot 11{,}366392 = 113663{,}92\,руб.$$

Предположим, что вложение средств и капитализация процентов осуществляются чаще, чем один раз в год.

Пусть R – размер годового платежа;

n – срок финансовой операции (лет);

i – годовая процентная ставка;

p – число платежей в год;

m – количество начислений процентов.

Тогда платеж за период $\frac{R}{p}$.

Число процентных периодов $m\cdot n$, по ставке $\frac{i}{m}$.Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{R}{p}$ и знаменателем прогрессии $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$. Количество членов ренты равно p·n. Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (1.3.4)$$

Для ренты пренумерандо:

$$FV_f^{pre}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right). \qquad (1.3.5)$$

Пример 1.3.4. Страховая компания принимает платежи по полугодиям равными частями по 250 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты ежеквартально из расчета 10% годовых. Определить, какую сумму получит страховая компания по истечению срока договора.

Решение: $\frac{R}{p}$=250 тыс. руб., R=500 тыс. руб.; i=0,1; p=2 раза; m=4 раза; n=3 года.

$$FV_f=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=250\cdot\frac{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{4\cdot3}-1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1}=250\cdot\frac{0,344}{0,0506}=250\cdot6,798=1699,5\ \text{\textit{тыс.руб.}}$$

1.3.3. Определение современной стоимости годовой ренты

Под **современной стоимостью регулярных финансовых потоков** понимают сумму всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.

Дисконтированные отдельные платежи $\frac{R}{1+i};\frac{R}{(1+i)^2};\frac{R}{(1+i)^3};...;\frac{R}{(1+i)^n}$ представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{R}{1+i}$ и знаменателем $\frac{1}{1+i}$. Ее сумма имеет вид:

$$PV_f^{\ post} = \frac{R}{1+i}\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n-1}{\frac{1}{1+i}-1} = R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} \qquad (1.3.6)$$

Величина $\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ называется коэффициентом современной стоимости срочного аннуитета или коэффициентом приведения годовой ренты и характеризует современную величину обычного регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице.

Каждый член полученной геометрической прогрессии в (1+i) раз больше, чем в случае с рентой постнумерандо, следовательно:

$$PV_f^{pre} = R\cdot(1+i)\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} \qquad (1.3.7)$$

Пример 1.3.5. В начале первого периода фирме предложено вложить 8 млн. руб. Доходы от инвестирования ожидаются в конце четырех последующих периодов по 2,2 млн. руб. Определить чистую приведенную стоимость, исходя из ставки сравнения 10% за период.

Решение: Поскольку деньги имеют различную ценность в разные моменты времени, приведем все суммы к началу первого периода. Определим приведенную стоимость финансовой ренты постнумерандо, состоящей из четырех выплат по 2,2 млн. рублей (R=2,2 млн. руб.; i=0,1; n=4 года):

$$PV_f = R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2{,}2\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}1)^4}}{0{,}1} = 2{,}2\cdot 3{,}1699 = 6{,}974\textit{млн.руб.}$$

Общая сумма приведенных поступлений на начало финансовой операции равна - 8+ 6,974 = - 1,026 млн. рублей < 0.

Следовательно, если поступления от инвестирования ограничиваются указанными, то проект убыточен.

Если начисление процентов производится m раз в год, то есть за весь срок ренты $m \cdot n$ раз. Годовой платеж равен R. Для определения современной стоимости ренты определим дисконтные множители каждого платежа:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m};\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{2m}};...;\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

Современная стоимость ренты может быть определена, как сумма геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$ и знаменателем $\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$.

Следовательно:

$$PV_f = \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} - 1}{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} - 1} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}. \tag{1.3.8}$$

Пример 1.3.6. В течение семи лет ежегодно в конце года в фонд поступают по 10000 рублей. На них ежеквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определите современную стоимость фонда.

Решение: R=10 000 руб.; i=0,15; m=12; n=7.

$$PV_f = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} = 10000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4\bullet 7} - 1}{1-\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^4} = 10000 \cdot 4,054672 = 40546,72\,руб.$$

Предположим, что начисление процентов производится m раз в год в течение n лет по номинальной ставке i. Каждый раз проценты начисляются по ставке $\frac{i}{m}$. Количество начислений — mn.

В общем случае современная стоимость финансовой ренты может быть определена по формуле:

$$PV_f = \frac{FV_f}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} : \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (1.3.9)$$

Пример 1.3.7. Ежеквартально в течение 2 лет на специальный счет поступает 100 тыс. руб. Определить современную стоимость финансовой ренты, если проценты по ставке 12% годовых начисляются ежемесячно.

Решение: $\frac{R}{p}$ = 100 тыс. руб.; p = 4; i = 0,12; n = 2; m =12.

$$PV_f = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 100000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{-2\cdot 12}}{\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1} = 100000\cdot\frac{0{,}212434}{0{,}030301} = 701079{,}17\,руб.$$

Таким образом, современная стоимость данной финансовой ренты 701 079 руб.

Для удобства рассмотренные формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости постоянной ренты сведены в Приложении Б.

1.3.4. Переменные финансовые ренты

Наряду с постоянными рентами, в последние годы, в финансовой практике часто встречаются ренты, параметры которых изменяются во времени. Такие ренты носят называние переменных во времени.

В общем случае современную стоимость финансовой ренты постнумерандо можно представить таким образом:

$$PV_f^{post}=\frac{R_1}{1+i}+\frac{R_2}{(1+i)^2}...+\frac{R_n}{(1+i)^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+i)^k} \qquad (1.3.10)$$

Здесь R_k ожидаемые поступления в момент времени k; n- временной горизонт.

Расчет современной стоимости регулярных финансовых потоков используют при выборе наилучшего варианта инвестирования и возврата долга.

Пример 1.3.8. Имеется переменный финансовый поток постнумерандо 20,12,8,45,30 (тыс. руб.). Рассчитайте приведенную стоимость финансового потока, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 25 % годовых, т.е. равен одному году. Как изменяется оценка финансового потока, если он представляет собой поток пренумерандо?

Решение: $n=5; R_1=20; R_2=12; R_3=8; R_4=45; R_5=30 \textit{тыс.руб.}$

$$PV_f^{post}=\frac{R_1}{1+i}+\frac{R_2}{(1+i)^2}+\frac{R_3}{(1+i)^3}+\frac{R_4}{(1+i)^4}+\frac{R_5}{(1+i)^5}=\frac{20}{1{,}25}+\frac{12}{1{,}25^2}+\frac{8}{1{,}25^3}+\frac{45}{1{,}25^4}+\frac{30}{1{,}25^5}=$$
$$=56{,}039 \quad \textit{тыс.руб.}$$

Для определения стоимости финансового потока пренумерандо необходимо умножить полученный результат на $1+i=1+0{,}25=1{,}25$.

$$PV_f^{pre}=PV_f^{post}\cdot(1+i)=56{,}039\cdot 1{,}25=70{,}049 \textit{тыс.руб.}$$

Таким образом, сделаем вывод о том, что суть расчета при определении переменной финансовой ренты сводится к тому, что, если процесс изменения переменной ренты носит не систематический характер, и соответственно его нельзя описать аналитически, то величину будущей и современной стоимостей таких потоков следует определять прямым счетом, наращивая и дисконтируя к требуемому моменту времени отдельные платежи и затем суммируя полученные величины.

1.3.5. Конверсия рент

Процесс, связанный с изменением условий ренты, называется **конверсией ренты**.

В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты. Иначе говоря, речь идет о конвертировании условий, предусматриваемых при выплате финансовой ренты.

Простейшим случаем конверсии является замена ренты разовым платежом – выкуп ренты. К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну – консолидация рент.

Общий случай конверсии – замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например, немедленной ренты на отложенную, годовой – на ежеквартальную и т.д. Ясно, что все перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности.

Виды конверсий:

Выкуп ренты – этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы здесь очень простое. Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. Естественно, что применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

Пример 1.3.9. Годовую ренту пренумерандо со сроком 5 лет, разовым платежом R=2000 руб. и процентной ставкой i =6% необходимо заменить рентой сроком 8 лет. Определите параметры ренты.

Решение: R1=2 000 руб.; i=0,06; n_1=5;n_2=8.

1).Определим современную стоимость такой ренты.

$$1) PV_f^{pre} = R_1 \cdot (1+i) \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2000 \cdot (1+0{,}06) \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+0{,}06)^5}}{0{,}06} = 8930{,}21 руб.$$

2). Найдем разовый платеж восьмилетней ренты с такой же современной стоимостью. Для этого составим уравнение эквивалентности:

$$R_2 \cdot (1+0{,}06) \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+0{,}06)^8}}{0{,}06} = 8930{,}21.$$

3). Решим это уравнение относительно R_2 :

$$R_2 \cdot 6{,}582381 = 8930{,}21;$$

$$R_2 = \frac{8930{,}21}{6{,}582381} = 1356{,}68 руб.$$

Объединение (консолидация) рент – это объединение рент, очевидно, заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент.

Предположим, несколько рент необходимо заменить одной. Правило объединения рент:

находят современные величины рент-слагаемых и суммируют их;

приравнивают полученную сумму современной стоимости заменяющей ренты;

задав все параметры заменяющей ренты, кроме одного, из уравнения эквивалентности определяют недостающий параметр.

Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и р-срочными и т.д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий, необходимо рассчитать размер неизвестного параметра. Обычно в качестве неизвестного параметра принимается размер платежа или ее срок.

В свою очередь, если задается сумма платежа (размер члена заменяющей ренты) и его периодичность, то отыскивается срок новой ренты.

Пример 1.3.10. Найти ренту-сумму для двух годовых рент постнумерандо: одна – длительностью 5 лет с годовым платежом 1000 $, а другая – 8 лет с годовым платежом 800 $. Годовая ставка процента равна 8 %.

Решение: $R_1 = 1000\$; n_1 = 5 лет; R_2 = 800\$; n_2 = 8 лет.$

$$1) PV^1{}_f = R_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n_1}}}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,08)^5}}{0,08} = 1000 \cdot 3,9927 = 3992,7\$$$ -

современная величина первой ренты.

$$2) PV_f^2 = R_2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n_2}}}{i} = 800 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,08)^8}}{0,08} = 800 \cdot 5,7466 = 4597,28\$$$ -

современная величина второй ренты.

3) Определим современную величину ренты-суммы:

3992,7+4597,28=8590,02=8589,98 $.

Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем определить второй из этих параметров.

Предположим, что рента – это сумма имеет длительность 6 лет, тогда уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_3 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,08^6}}{0,08} = 8589,98; \qquad или \qquad R_3 \cdot 4,6229 = 8589,98;$$

Отсюда: $R_3 = \frac{8589,98}{4,6229} = 1858,14\$$.

Таким образом, при конверсии рент предполагается, что данный процесс не приводит к изменению финансовых последствий для каждого из участвующих в соглашении сторон, то есть она должна основываться на принципе финансовой эквивалентности платежей. При этом находят современную величину данной ренты, а затем подбирают ренту с такой же современной величиной и нужными параметрами.

Вопросы для самоконтроля

1. Суть операций наращения и дисконтирования для финансового потока.
2. Классификация денежных потоков.
3. Дайте определение понятию «аннуитет».
4. Основные параметры ренты.
5. В чем различия проведения финансовых расчетов при денежном потоке постнумерандо и пренумерандо?
6. Особенности расчетов при учете денежного потока с неравными денежными поступлениями.
7. Характеристика расчетов денежными платежами в конце каждого периода.
8. Характеристика расчетов денежными платежами в начале каждого периода.
9. Конверсия ренты.
10. Виды конверсии рент.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пенсионный фонд ежегодно в конце года вносится сумма 15 тыс. рублей, на которую начисляются сложные проценты по ставке 11% годовых. Определить суммы, накопленные в фонде в течение:

а) 5 лет; б) 10 лет; в) 15 лет.

2. В пенсионный фонд в конце каждого квартала вносится сумма 13 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по номинальной ставке 10 % годовых. Определить сумму, накопленную в фонде за 20 лет.

3. В пенсионном фонде на взносы, вносимые в конце года, начисляются сложные проценты по ставке 9 % годовых. Определить размер ежегодных взносов, необходимых для накопления суммы 500 тыс. руб. через 10 лет.

4. На депозитный счет в течение четырех лет ежегодно вносится сумма 50 тыс. руб. Схема постнумерандо. Проценты начисляются по сложной ставке 8% годовых. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

5. Взят кредит 120000 рублей для приобретения жилья. Срок погашения кредита – 2 года. Процентная ставка – 25% годовых при ежемесячном начислении процентов. Каковы должны быть ежемесячные платежи, если по условию кредитного соглашения они должны быть одинаковыми?

6. Заменить ренту с выплатами по 140 тыс. руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по кварталам по ставке 10% годовых простой рентой с поквартальными выплатами.

7. Найти наращенное значение обычной ренты с выплатами по 95 тыс. рублей в конце каждого года при квартальном начислении процентов по ставке 8% годовых. Срок ренты – 3 года.

8. Найти сумму, необходимую для основания Фонда, который обеспечивает выплаты 10 тыс. рублей в конце каждого месяца, если деньги могут быть инвестированы по номинальной ставке 6 % годовых при ежемесячном начислении.

9. Рента с выплатами по 50 тыс. рублей в конце каждого месяца и начислением процентов по кварталам по ставке 6 % годовых заменяется простой рентой с поквартальными выплатами. Найти величину платежа в конце каждого квартала.

10. Найти текущее значение ренты с выплатами по 60 тыс. руб. в конце каждого квартала при ежемесячном начислении процентов по номинальной ставке 12 % годовых. Срок ренты – 1,5 года.

РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

Тема 2.1. Оценка эффективности финансовых операций

План

2.1.1. Доходность финансовых операций

В качестве показателя эффективности финансовой операции, как правило, выбирают показатель доходности, рассчитанный на основе сопоставления дохода, полученного за определенный промежуток времени, с произведенными затратами.

Предположим, что некоторая сумма PV предоставлена в долг с условием, что через n лет будет возвращена большая сумма FV.

В качестве показателя доходности может служить:

а) обычная годовая ставка процентов, рассчитанная по формуле:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n}, \tag{2.1.1}$$

б) сложная годовая ставка процентов, определенная из формулы наращения по сложным процентам $FV = PV(1+i)^n$:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \tag{2.1.2}$$

в) эффективная ставка процентов, если известна номинальная ставка процентов i, и проценты начисляются m раз в год:

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1. \tag{2.1.3}$$

Пример 2.1.1 Ссуда в размере 2,5 млн. рублей выдана под простые проценты на 2 года, с условием возвратить в конце срока 3,5 млн. руб. Определить доходность этой операции на основе простой и сложной процентных ставок.

Решение: $PV = 2{,}5 млн.руб.; FV = 3{,}5 млн.руб.; n = 2 года.$

$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{3{,}5 - 2{,}5}{2{,}5 \cdot 2} = 0{,}2$ или 20%.

$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt{\frac{3{,}5}{2{,}5}} - 1 = 0{,}183$ или 18,3%.

Пример 2.1.2. На вклад, помещенный в банк под 16% годовых, проценты начисляются ежеквартально. Оцените доходность этой операции на основе эффективной процентной ставки.

Решение: i=0,16; m=4.

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0{,}16}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}1699 \quad \textit{или} \quad 16{,}99\%.$$

Таким образом, в общем случае оценка доходности сводится к определению расчетной процентной ставки, отражающей общую доходность на вложенный капитал.

Пример 2.1.3. Ссуда 100 тыс. рублей выдана на 240 дней под 12% годовых. Проценты простые обыкновенные. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 1тыс. рублей. Определить полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки.

Решение: PV=100 тыс. руб.; t = 240 дней; Y = 360 дней.

Сумма долга с процентами составит:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{240}{360} \cdot 0{,}12\right) = 108 \;\; \textit{тыс.рублей}$$

Затраты составили 99 тыс. руб. (100-1). Срок финансовой операции $n = \frac{240}{360} = 0{,}66667\,\textit{года}$.

Определим полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки из равенства: $i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[\frac{240}{360}]{\frac{108}{99}} - 1 = 1{,}0909^{1{,}5} - 1 = 0{,}1394$.

Следовательно, полная доходность этой финансовой операции составляет 13,94%.

2.1.2. Расчет средней процентной ставки

В условиях нестабильности финансового рынка процентные ставки могут быть непостоянны во времени. В связи с этим возникает задача определения такого значения процентной ставки, которое определяло бы уровень доходности за весь период финансовой операции. Для решения этой задачи определяют среднюю процентную ставку с помощью уравнения эквивалентности, которое ставит в соответствие коэффициенту наращения, определенному на основе годовой процентной ставки последовательность коэффициентов наращения, задающих схему проведения данной финансовой операции.

Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1, в течение периода времени n_2 действует ставка простых процентов i_2 и т.д. Всего число периодов начисления процентов - m. В этом случае срок финансовой операции определяется суммой:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$$

Обозначим процентную ставку ссудных процентов, характеризующую среднюю доходность за конверсионный период, символом $\bar{i}$.

Тогда уравнение эквивалентности для ее определения будет иметь вид:

$$1 + N \cdot \bar{i} = 1 + \sum_{k=1}^{m} n_k \cdot i_k$$

Отсюда:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N} \qquad (2.1.4)$$

Аналогично для простых учетных ставок $d_1; d_2; ...; d_m$ их средняя определяется из равенства:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot d_k}{N}. \qquad (2.1.5)$$

Средняя ставка $\bar{i}$ (равно как и $\bar{d}$) – это взвешенная средняя арифметическая величина, при расчете которой каждому значению процентной ставки ставится в соответствие интервал, в течение которого данное значение ставки использовалось.

В общем виде определение средней ставки может быть сформулировано следующим образом.

Средняя процентная ставка – это ставка, дающая такое наращение, которое эквивалентно наращению с применением ряда разных по значению процентных ставок, применяемых на различных интервалах времени.

Пример 2.1.4. На долг в 400 000 рублей согласно контракту предусматривается начислить годовые простые точные проценты по схеме, определенной следующей таблицей.

Требуется оценить доходность этой кредитной операции в виде простой годовой процентной ставки и найти сумму долга с процентами.

Решение:

$$PV = 400000\ \textit{рублей}; \quad n_1 = 0{,}75; i_1 = 0{,}12; n_2 = 2{,}0; i_2 = 0{,}11; n_3 = 1{,}25; i_3 = 0{,}08.$$

Срок финансовой операции:

$N = n_1 + n_2 + n_3 = 0{,}75 + 2{,}0 + 1{,}25 = 4{,}0.$

Средняя процентная ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N} = \frac{0{,}41}{4{,}0} = 0{,}1025$$ или 10,25 % годовых.

Сумма долга с процентами:

$$FV = 400000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}1025) = 564000\,\textit{рублей}.$$

Допустим, что доходность операции с плавающей процентной ставкой на каждом интервале начисления была выражена через сложный процент.

В этом случае средняя процентная ставка, которая равноценна последовательности ставок за весь период финансовой операции, может быть получена из следующего уравнения эквивалентности:

$$\left(1 + \bar{i}\right)^N = (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{n_m}.$$

Отсюда:

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{n_m}} - 1, \qquad (2.1.6)$$

где

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k.$$

Следовательно, сложная средняя процентная ставка рассчитывается по формуле средней геометрической взвешенной.

Пример 2.1.5. Сложная процентная ставка по ссуде определена на уровне 8,5 % плюс маржа 0,5 % в первые 2 года и 0,75 % в последующие 3 года. Требуется определить среднюю ставку сложных процентов.

Решение:

$$n_1 = 2; i_1 = 0{,}085 + 0{,}005 = 0{,}09; n_2 = 3; i_2 = 0{,}085 + 0{,}0075 = 0{,}0925.$$

Срок финансовой операции: $N = 2 + 3 = 5.$

Средняя ставка сложных процентов:

$\bar{i} = \sqrt[5]{(1 + 0{,}09)^2 \cdot (1 + 0{,}0925)^3} - 1 = 0{,}0915$ или 9,15% годовых.

2.1.3. Учет инфляции при финансовых расчетах

Инфляция возникает в результате изменения баланса между денежной массой и объемом созданных в стране благ и услуг. В результате повышается общий уровень цен в экономике, что влечет к снижению покупательной способности денег. Поскольку инфляционные процессы оказывают значительное влияние на реальную доходность финансовых операций, необходимо учитывать их влияние в финансовых вычислениях. В связи с этим наряду с номинальной процентной ставкой, оценивающей доходность финансовой операции без поправки на инфляцию, следует определять реальную процентную ставку. Последняя позволяет оценить доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег.

Падение покупательной способности денег за период характеризуется с помощью индекса покупательной способностью денег. Этот индекс принимают равным обратной величине индекса цен за тот же период.

Пример 2.1.6. Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5%. Как изменилась покупательная способность денег?

Решение: Индекс цен равен 1+ 0,05=1,05

Тогда индекс покупательной способности денег

$$i_{п.с} = \frac{1}{1,05} = 0,952 \qquad \textit{или} \quad 95,2\%.$$

Реально наращенная сумма денег с учетом инфляции (S) может быть рассчитана, исходя из номинально наращенной суммы денег FV по формуле:

$$S = FV \cdot i_{п.с.}, \tag{2.1.7}$$

где FV - номинально наращенная сумма денег.

Пример 2.1.7. Два вклада в размере 100000 руб. были размещены на три года под 12% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой — под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 30%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

Решение:

$$PV = 100000 руб.; i = 0{,}12; n = 3\_года; i_ц = 1{,}3 \quad (1 + 0{,}3).$$

Определим номинальные наращенные суммы денег по простым процентам:

$$FV_1 = PV(1 + ni) = 100000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}12) = 136000 руб.$$

Номинальные наращенные суммы денег по сложным процентам:

$$FV_2 = PV(1 + i)^n = 100000 \cdot (1 + 0{,}12)^3 = 100000 \cdot 1{,}40493 = 140493 руб.$$

Найдем индекс покупательной способности:

$$i_{п.с} = \frac{1}{i_ц} = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}77$$

После этого рассчитаем реально наращенные суммы денег.

$$S_1 = FV_1 \cdot i_{п.с.} = 136000 \cdot 0{,}77 = 104720 руб.;$$
$$S_2 = FV_2 \cdot i_{п.с.} = 140493 \cdot 0{,}77 = 108180 руб.$$

Оценим реальную доходность финансовых операций с помощью реальной сложной процентной ставки. Обозначим показатели реальной доходности по первому вкладу i_1, а по второму - i_2.

$$i_1 = \sqrt[n]{\frac{S_1}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{104720}{100000}} - 1 = 0{,}01549 \qquad i_1 = 0{,}01549$$

$$i_2 = \sqrt[n]{\frac{S_2}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{108180}{100000}} - 1 = 0{,}02656 \qquad i_2 = 0{,}02656$$

Таким образом, реальная доходность по первому вкладу составила 1,5% годовых, а по второму – 2,7% .

Реально наращенная сумма денег может быть рассчитана на основе наращения первоначальной суммы денег PV, скорректированной с учетом инфляции. При этом формулы наращения выбирают разные, в зависимости от применяемого процента (простой или сложный), а инфляционное влияние следует оценивать по сложному проценту, т.к. обесцениваются уже обесцененные деньги. Так, если наращение производится по простым процентам, то процесс наращения при наличии инфляции описывается формулой:

$$S = \frac{1+ni}{(1+\gamma)^n}\,. \tag{2.1.8}$$

Если наращение производится по сложным процентам — по формуле:

$$S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma}\right)^n \tag{2.1.9}$$

где PV - первоначальная сумма денег, размещенная на вкладе;

i- годовая декурсивная ставка процента по вкладу;

γ - средний годовой темп инфляции;

n- срок вклада.

Формула $S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma}\right)^n = PV \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+\gamma)^n}$, характеризует процесс наращения в условиях инфляции: ставка доходности является фактором роста денег и находится в числителе, а показатель инфляции является фактором их обесценивания и находится в знаменателе.

При сравнении годовой ставки процента по вкладу и среднего годового темпа инфляции возможны три случая:

1) i > γ , тогда S > PV, т.е. только часть наращенной суммы денег «поглощается» инфляцией. Это наиболее оптимальный результат.

Темпы наращения денег по ставке процента опередили темп их обесценивания, в связи с этим, первоначальная сумма денег сохранила свою покупательную способность, и даже был получен некоторый прирост денег по вкладу.

2) i = γ, тогда S = PV, т.е. все наращение по вкладу «поглощено» инфляцией. Следовательно, роста реальной суммы нет. В этом случае ставка процента по вкладу позволила лишь сохранить покупательную способность первоначальной суммы вклада от инфляции.

3) $i < \gamma$, тогда $S < PV$. Т.е. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы денег, размещенной на вкладе. Такое положение называют «эрозией капитала». В этом случае темпы роста инфляции опередили темпы роста наращения денег по ставке процента. Это наихудший результат, при котором не удается спасти вложенные деньги от обесценивания в условиях инфляции.

Пример 2.1.8. Первоначальная сумма вклада составляет 6000 руб. Вклад размещен на 3 года под 4,5% годовых. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7%. Требуется определить наращенную сумму денег с учетом инфляции.

Решение: $PV = 6000 руб.; n = 3 \quad года; i = 0{,}045; \gamma = 0{,}07.$

$$S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma}\right)^n = 6000 \cdot \left(\frac{1+0{,}045}{1+0{,}07}\right)^3 = 6000 \cdot 0{,}93153 = 5589{,}2 \, руб.$$

Таким образом, инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы вклада. Данная финансовая операция не позволила сохранить деньги от инфляции. По истечении срока вкладчик по покупательной способности получил сумму денег меньшую, чем та, которую он разместил на вкладе. Иначе говоря, произошла «эрозия капитала». Это стало возможно потому, что среднегодовой темп роста инфляции опередил наращение денег по декурсивной ставке процента.

Пример 2.1.9. Ежемесячный уровень инфляции составляет 7% (по отношению к предыдущему месяцу). Исчислить реально наращенную стоимость вклада в 200 тыс. руб., хранящегося на счете до востребования в сбербанке в течение 7 месяцев по ставке 10% годовых. Проценты простые.

Решение:

$$S = PV \frac{\left(1+\frac{t}{Y}\cdot i\right)}{(1+\gamma)^n} = 200 \frac{\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0{,}1\right)}{(1+0{,}07)^7} = 200 \cdot \frac{1{,}058333}{1{,}60578} = 131{,}1815 \quad тыс.руб.$$

Отметим, что в проектном анализе часто не вычисляют S, довольствуются сравнением i и γ путем вычисления i_γ – реальной процентной ставки или нетто-ставки – ставки доходности уменьшенной под влиянием инфляции. Ее находят из соотношения:

$$\left(1+i_\gamma\right)^n = \frac{\left(1+i\right)^n}{\left(1+\gamma\right)^n}$$

Выразив из этого равенства i_γ, получим:

$$i_\gamma = \frac{i-\gamma}{1+\gamma}. \qquad (2.1.10)$$

Пример 2.1.10. Определить целесообразность помещения средств на год под 20% годовых, если прогнозируемый уровень инфляции 15%.

Решение: i = 0,2; γ = 0,15.

$$i_\gamma = \frac{0{,}2-0{,}15}{1+0{,}15} = \frac{0{,}05}{1{,}15} = 0{,}0435$$

Реальная положительная ставка – 4,35%, т.е. реальный доход по операции будет 4,35% от каждой единицы вложенных средств, обесцененной за год на 13% ($\frac{1}{1{,}15} = 0{,}87$ или 87%   100-87=13%).

Инфляция уменьшает реальную ставку процента. В результате реальная ставка процентов составит $i_\gamma = \frac{i-\gamma}{1+\gamma}$. При достаточно большой инфляции, когда $\gamma > i$ ставка процентов i_γ может стать отрицательной. В случае если кредитор не отреагирует на инфляцию достаточным увеличением ставки по кредитам, он будет работать себе в убыток. Увеличение процентной ставки должно компенсировать обесценивающее влияние инфляции. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке j, которая определяется из соотношения $1+j = (1+i)\cdot(1+\gamma)$. Следовательно,

$$j = i + \gamma + i\gamma\,. \qquad (2.1.11)$$

Пример 2.1.11. Кредит в 300000 рублей выдается на 2 года. Прогнозируемый уровень инфляции на этот период 8% в год. Проценты сложные. Какую процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 10% годовых. Определите наращенную сумму долга.

Решение: $PV = 300000 руб.; n = 2 \quad года; \gamma = 0{,}08; i = 0{,}1.$

$j = i + \gamma + i \cdot \gamma = 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}1 \cdot 0{,}08 = 0{,}188;$

Следовательно, для того чтобы обеспечить требуемый уровень доходности, банк должен назначить процентную ставку 18,8%.

В этом случае сумма долга с процентами может быть определена таким образом:

$$FV = 300000(1 + 0{,}188)^2 = 423403{,}2\, рубля.$$

Дисконт банка при этом составит 123403,2 рубля.

Вопросы для самоконтроля

1. Покупательная способность денег.
2. Инфляционные процессы.
3. Индекс цен.
4. Доходность финансовых операций.
5. Показатели эффективности доходности финансовых операций.
6. Определение эффективной процентной ставки для финансовых расчетов.
7. Расчет средней процентной ставки.
8. Учет фактора инфляции при финансовых расчетах.
9. Сущность понятия «эрозия капитала».
10. Определение реальной доходности финансовой операции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Цена товара увеличилась на 25%. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную сумму?

2. Два вклада по 120 000 ден. ед. были размещены на 4 года под 10% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период цены на товары и услуги вследствие

инфляции выросли на 5%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

3. Первоначальная сумма вклада составляет 6 000 ден. ед. Вклад размещен на 3 года под 14 % годовых с ежемесячной капитализацией. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7 %. Определите наращенную сумму денег с учетом инфляции.

4. Ежемесячный темп инфляции составляет 2%. Определите реально наращенную стоимость вклада в 200 000 ден. ед., хранящегося на счете до востребования в банке в течение 7 месяцев по ставке 10% простых процентов. Определите брутто-ставку, обеспечивающую заданную доходность.

5. Определено, что доходность коммерческого банка по вкладам «до востребования» должна быть 5% годовых. Известно, что годовой темп инфляции составляет 11% годовых. Определите процентную ставку по данным вкладам.

6. Банк выдал кредит на 3 месяца в размере 6 000 ден. ед. Ожидаемый месячный темп инфляции – 2%, требуемая реальная доходность операции – 12 % годовых. Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, величину наращенной суммы.

7. Ссуда в размере 1 000 ден. ед. получена предприятием на срок 5 лет. Проценты начисляются по сложной ставке, равной 18 % годовых.

Расчетный темп инфляции 11 % в год. Определите реальную доходность инвестора по данной операции, а также его реальный доход.

8. Определить, какой реальной доходностью обладает финансовая операция, если при уровне инфляции 20% в год деньги вкладываются на 2 года под 15% годовых при ежемесячном начислении процентов.

9. Определите реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 20% в год кредит выдается на 2 года по номинальной ставке сложных процентов в размере 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

10. Кредит в размере 40000 рублей выдан на два года. Реальная доходность должна составить 10% годовых, начисляемых ежеквартально. Ожидаемый уровень инфляции 20% в год. Определить сложную ставку процентов кредита, компенсирующую инфляционные потери, и вычислить наращенную сумму.

11. Под какую простую учетную ставку нужно выдать кредит на 6 месяцев, чтобы реальность доходность операции составила 10% при уровне инфляции 20% в год?

12. Кредит выдан на 2 года под 30% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Оценить реальную доходность данной финансовой операции с точки зрения кредитора. Уровень инфляции равен 25% в год.

13. Уровень инфляции 23%. Найти индекс инфляции за 7 месяцев.

14. Кредит 50000 рублей выдан на 6 месяцев. Какова должна быть простая процентная ставка, если кредитор желает получить 10% реальной доходности, начисляемых по простой процентной ставке при уровне инфляции 20% в год? Вычислить наращенную сумму.

15. Ссуда дана по учетной ставке 30% годовых на 6 месяцев. Какова реальная доходность операции с точки зрения кредитора при уровне инфляции 25%.

16. Найти средний месячный уровень инфляции, если годовой уровень инфляции составил 12 % годовых.

Тема 2.2. Финансовые решения в условиях риска и неопределенности

План

2.2.1. Понятие риска и неопределенности

Кредитный риск – это риск того, что любое обязанное перед предприятием (организацией, учреждением) лицо (контрагент, эмитент, банк) не исполнит свои обязательства в полной мере либо на требуемую дату, либо в любое время после этой даты.

Рыночный риск – это риск возникновения у Фонда убытков от инвестирования пенсионных активов в финансовые инструменты вследствие изменения рыночной стоимости данных инструментов.

Риск ликвидности – это риск убытков вследствие неспособности Фонда или его инвестиционного контрагента обеспечить исполнение обязательств в полном объеме.

Риски производных финансовых инструментов – это отдельный класс в силу потенциальной сложности (комплексности) взаимосвязей факторов риска. Могут включать фондовый, процентный, валютный, кредитные риски в качестве составных частей.

Риски прямых инвестиций и инвестиций в недвижимость – выделяются в отдельный класс рисков в силу специфики природы рисков и особенностей применяемых механизмов управления рисками.

Показатель уровня риска является по своей природе комплексной величиной и включает две составляющие:

объем риска – это величина потерь, которую понесет предприятие в случае реализации риска;

вероятность реализации риска – это вероятностная оценка опасности наступления рискового события.

Риск может быть выражен одной интегральной величиной, значение которой зависит от значений составляющих риска.

Каждая из составляющих может оцениваться с использованием:

качественного подхода;

количественного подхода.

Пример 2.2.1. Имеются два варианта вложения капитала. Установлено, что при вложении капитала в мероприятие А получение прибыли в сумме 15 тыс. руб. – вероятность 0,6; в мероприятие Б получение прибыли в сумме 20 тыс. руб. – вероятность 0,4. Найти размер ожидаемой прибыли.

Решение: ожидаемое получение прибыли от вложения капитала (т.е. математическое ожидание) составит:

по мероприятию А: 15 0,6 = 9 тыс. руб.;

по мероприятию Б: 20 0,4 = 8 тыс. руб.

2.2.2. Методы расчета влияния риска на финансовые результаты

Оценка риска представляет собой важнейший этап процесса управления рисками, имеющий целью определить его количественные характеристики: вероятность наступления неблагоприятных событий и возможный размер ущерба.

Способ оценки риска определяется видом оцениваемого риска и объемом информации, которой обладаем субъект управления. В соответствии с этим оценка риска может быть произведена на основе финансовых показателей деятельности организации (источником информации служат, в основном, бухгалтерский баланс и отчет о прибылях и убытках), на основе статистических данных о хозяйственной деятельности организации или на основе субъективных предположений о вероятности и величине убытков.

Для оценки риска с использованием финансовых показателей разработаны специальные методики, позволяющие определить величину конкретного вида риска. Например, широко используются специальные методики оценки рисков ликвидности, потери платежеспособности, финансовой устойчивости и независимости, риски снижения деловой активности и рентабельности организации и др. Например, методика оценки риска ликвидности имеет следующий вид.

Методика оценки риска ликвидности состоит в расчете и оценке соотношения групп активов, выделенных по степени их ликвидности (А1,А2,А3,А4) (рис. 2.2.1.).

Рис. 2.2.1. Методика оценки риска ликвидности

В качестве шкалы оценки риска структуры активов по их ликвидности принимают отклонение фактической структуры от рекомендуемой. Рекомендуемая структура соотношения различных групп активов различается для различных отраслей и форм предприятий.

Фактором риска является недостаточность или избыток средств по определенным группам активов, а его последствиями — потери во времени и в первоначальной стоимости превращения активов в наличные денежные средства. Это может привести к ограничению возможностей организации по выполнению обязательств.

Для оценки риска с помощью статистических данных о рисковых ситуациях используют вероятностные и статистические показатели.

Вероятностные оценки показателей риска основаны на расчете частоты и частости. Так, если установлено, что некоторый i-тый результат происходит в ni случаях из N, то его частота равна:

$$P = \frac{n_i}{N} \tag{2.2.1}$$

Частость равна:

$$P = \frac{n_i}{N} \times 100\% \tag{2.2.2}$$

Если число наблюдений велико, что частость результата при первом приближении может быть принята за его вероятность. Естественно, что сумма вероятностей равна единице.

На практике оценка риска по статистическим данным предполагает построение кривой риска по статистическим данным и определение характерных точек, что требует достаточно объемного массива статистических данных.

Например, данные расчета вероятности норм прибыли могут быть представлены следующим образом (таблица 2.2.1):

Таблица 2.2.1

Статистические данные о норме прибыльности проекта

Норма прибыли на капиталовложения, %	Частота результатов	Частость результатов, %	Кумулятивная величина вероятностей
30-40	5	5	5
20-30	19	19	24
10-20	33	33	57
0-10	21	21	78
-10-0	14	14	92
-20-10	8	8	100
Всего	100	100	-

Распределение вероятностей можно представить графически в виде гистограммы (рис. 2.2.2).

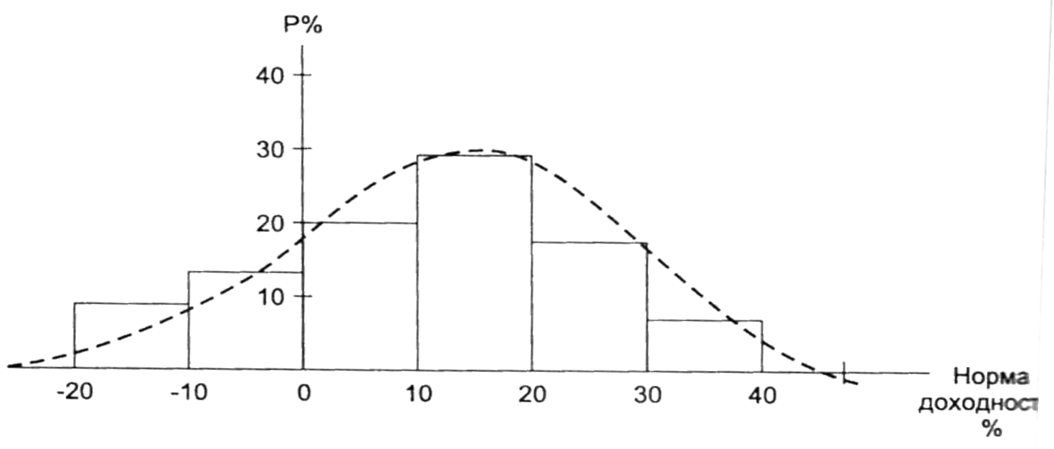

Рис. 2.2.2. Гистограмма распределения по нормам прибыли

На гистограмме видно, что наиболее часто (наиболее вероятно) выпадение значений нормы прибыли в пределах от 10% до 20%. Таким образом, прогнозируя результаты деятельности и связанный с ними риск, можно предполагать, что величина возможных убытков составит 20%, и произойти это может приблизительно в 18% случаев.

На основе данных о распределении возможных значений результатов деятельности возможно также построение кривой риска (обычно в другой системе координат), которая дает наглядное представление о возможностях получения прибыли и опасности возникновения потерь (рис. 2.2.3).

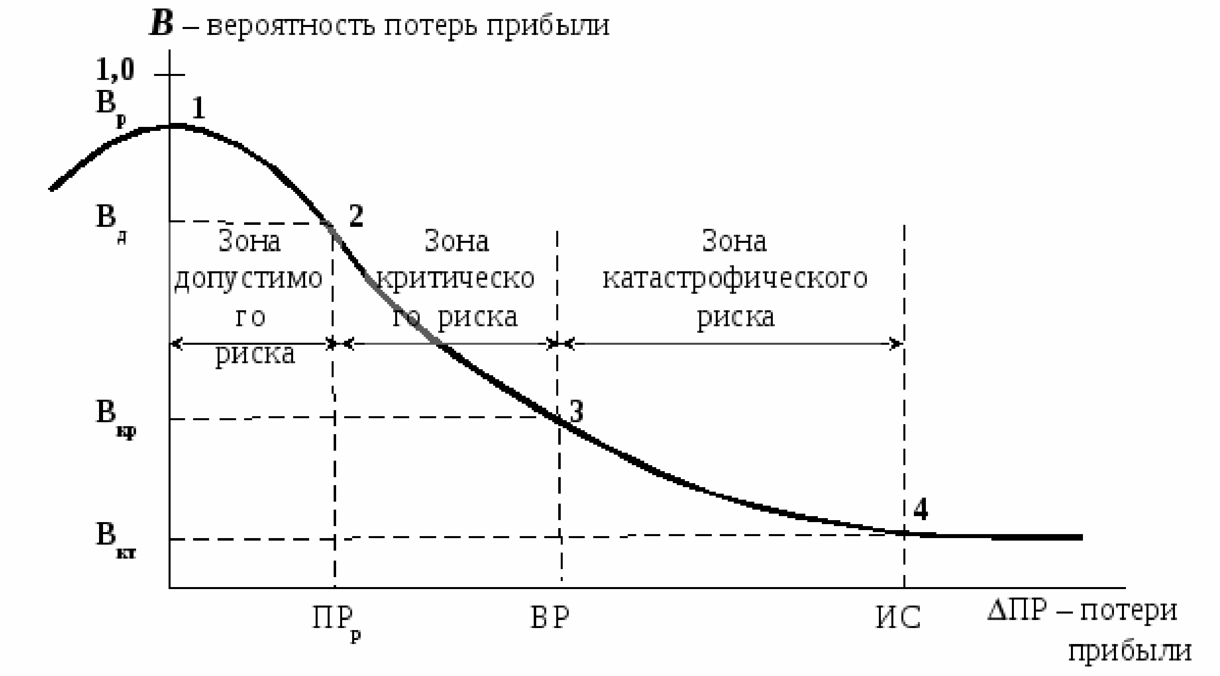

Рис. 2.2.3. Кривая предпринимательского риска

Эта кривая имеет 4 характерные точки, каждой из которых соответствует определенное значение вероятности потерь, и определенные области, или зоны риска.

Точка 1 определяет вероятность $В_р$ нулевых потерь — отсутствие отклонения полученных значений результата от расчетного.

Точка 2 характеризует потери, равные ожидаемой прибыли, вероятность которых равна $В_д$.

Точка 3 соответствует величине потерь, равных расчетной выручке, величина которых равна $В_{кр}$.

Точка 4 характеризуется потерями, равными имущественному состоянию предприятия, вероятность которых $В_{кт}$.

Точка 2 определяет границу зоны допустимого риска, точка 3 – границу зоны критического риска, точка 4 – границу зоны катастрофического риска.

Кривая риска предполагает установление предельных значений вероятностей потерь, выше которых они не должны подниматься (т.е. диапазон их изменения). Предельные значения вероятностей возникновения допустимого, критического, катастрофического рисков соответственно обозначаются $К_д$, $К_{кр}$, $К_{кт}$, чаще всего ориентируются на следующие предельные значения $К_д = 0,1$ (10,0%), $К_{кр} = 0,01$ (1,0%), $К_{кт} = 0,001$ (0,1%). Это означает, что не следует идти на риск, если в десяти случаях из ста можно потерять всю прибыль от реализации, а в одном из тысячи — имущество.

Статистические показатели оценки риска по своей информативности несколько уступают вероятностным, но требуют меньшего объема исходной информации для оценки уровня риска. В качестве статистических показателей используют средние показатели значения результатов деятельности и показатели колеблемости полученного результата.

Средние значения результатов деятельности:

Средние значения результатов деятельности

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i , \qquad (2.2.3)$$

$\bar{x}$ – абсолютное значение i-того события или результата,

P_i – вероятность наступления i-того события или результата,

n – число вариантов исходов события.

В реальной экономической действительности чаще всего приходится иметь дело со статистическими аналогами случайных величин, которые определяются выборочным путем. Тогда определяется выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \qquad (2.2.4)$$

Принятие рискового решения предполагает также оценку колеблемости результата варианта относительно среднего значения. Для этого используют показатели вариации уровня риска. В настоящее время распространена точка зрения, согласно которой мерой риска результата решения следует считать дисперсию, среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение), коэффициент вариации.

Показатели вариации уровня риска:

1. Показатель размаха вариации – учитывает отклонение крайних значений результата от среднего.

$$R = X_{\max} - X_{\min}, \qquad (2.2.5)$$

где Xmax, Xmin – соответственно наибольшее и наименьшее значения результата в выборочном наблюдении.

2. Дисперсия как показатель степени риска для дискретных случайных величин представляет собой средневзвешенную величину из квадратных отклонений действительных результатов от средних ожидаемых:

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_{i,} \qquad (2.2.6)$$

где $\bar{x}$ – i-тое значение случайной величины;

P_i – вероятность того, что случайная величина примет значение $\bar{x}$.

3. Среднее квадратическое отклонение является именованной величиной и указывается в тех же единицах, в каких изменяется варьирующий признак:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2}\ , \qquad (2.2.7)$$

Таким образом, поскольку риск обусловлен случайностью принятого решения, то чем меньше разброс (дисперсия) результата решения, тем более он предсказуем и тем меньше его величина. Если дисперсия равна нулю, риск полностью отсутствует.

4. Если необходимо сравнить варианты решений с разными средними

значениями результата и разными средними квадратическими отклонениями, используется коэффициент вариации (Vr).

$$V_R = \frac{\sigma_R}{\bar{x}} \tag{2.2.8}$$

По физическому смыслу коэффициент вариации отражает количество риска на единицу доходности, те есть по степени охвата деятельности он является комплексным.

Диапазон коэффициента вариации 0 – 100%. Чем выше показатель, тем сильнее колеблемость и риск предпринимательской деятельности.

Шкала оценки показателя коэффициента вариации выглядит следующим образом:

До 10% – слабая колеблемость;

10 – 25% – умеренная колеблемость;

Свыше 25% – высокая колеблемость.

2.2.3. Методы сглаживания уровня неопределенности

В финансовой практике существуют следующие механизмы уменьшения рисков и сглаживания неопределенности:

непринятие риска – предполагает отказ от рискованной стратегии управления активами или от рискованных финансовых инструментов; Такой отказ предполагает выбор альтернативных, менее рискованных, финансовых инструментов и способов управления портфелем;

лимитирование – ограничение объема обязательств перед НПФ, приходящихся на один объект риска или тип объектов риска. Например, могут лимитироваться обязательства одного заемщика (эмитента долговых ценных бумаг, банк) или обязательства инвестиционного контрагента (например, обязательства Управляющей компании по возврату активов). Лимиты могут устанавливаться как в абсолютном выражении, так и в относительных (как доля от портфеля или субпортфеля);

диверсификация – распределение вложений по разным финансовым инструментам или типам активов, осуществляемое с целью избежать концентрации рисков. Одним из способов обеспечения диверсификации является лимитирование;

резервирование – индикативный расчет и возможное формирование резервных фондов в качестве источника покрытия возможных убытков.

страхование риска (компенсация) – заключение договора со страховой компанией о возмещении части убытков в при наступлении страхового случая;

получение банковских гарантий, заключение договора с поручителям – юридическая фиксация обязательств третьих лиц исполнить обязательства заемщика или контрагента;

хеджирование – использование разрешенных законодательством срочных инструментов (производных) для целей уменьшения риска портфеля активов.

Вопросы для самоконтроля

1. Особенности и условия оценки рисков с использованием финансовых показателей хозяйственной деятельности.

2. Взаимосвязь вероятности и риска.

3. Цель и последовательность построения кривой распределения вероятностей значений результатов деятельности.

4. Информация, необходимая для построения кривой распределения вероятностей.

5. Цель и последовательность построения кривой риска.

6. Сложность построения кривой риска в реальных условиях предпринимательства.

7. Показатель размаха вариации и его прикладное значение.

8. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение и их прикладное значение.

9. Коэффициент вариации и его прикладное значение.

10. Особенности расчета, достоинства и недостатки статистических методов оценки риска на практике.

Задачи для самостоятельного решения

1. При вложении капитала в мероприятие А из 120 случаев прибыль в 25 тыс. р. может быть получена в 48 случаях; 20 тыс. р. в 36 случаях; 30 тыс. р. в 36 случаях. При вложении капитала в мероприятие Б из 100 случаев прибыль в 40 тыс. р. может быть получена в 30 случаях; 30 тыс. р. в 50 случаях; 15 тыс. р. в 20 случаях.

Определить среднее ожидаемое значение прибыли от вложения в мероприятие А и в мероприятие Б; дисперсию по мероприятию А и по мероприятию Б; среднее квадратическое отклонение по мероприятию А и по мероприятию Б; коэффициент вариации по мероприятию А и по мероприятию Б. Определить, в какое мероприятие выгоднее вкладывать денежные средства: в мероприятие А или в мероприятие Б? Расчет провести в таблице.

Расчет статистических показателей задачи

Номер события	Прибыль, тыс. руб., X	Число случаев наблюдения, n	Вероятность, p	Дисперсия, σ	Среднеквадратическое отклонение, σ	Коэффициент вариации, υ
Мероприятие А						
1						
2						
3						
Итого						
Мероприятие Б						
1						
2						
3						
Итого						

2. Определить, в какой инвестиционный проект (с позиции рискованности) выгоднее вложить денежные средства: в проект А или в

проект Б? Построить кривую риска по проекту А и Б.

Исходные данные приведены в табл. «Распределение вероятности ожидаемых доходов по двум инвестиционным проектам».

Распределение вероятности ожидаемых доходов по проектам

Возможные значения конъюнктуры инвестиционного рынка	Инвестиционный проект А		Инвестиционный проект Б	
	Расчетный доход, тыс.р., х	Значение вероятности, Р	Расчетный доход, тыс.р., х	Значение вероятности, Р
Высокая	600	0,25	800	0,20
Средняя	500	0,50	450	0,60
Низкая	200	0,05	100	0,20
В целом	-	1	-	1

3. Определить среднее ожидаемое значение прибыли от вложения в проекты А и Б; дисперсию по проектам А и Б; среднее квадратическое отклонение по проектам А и Б; коэффициент вариации по проекту А и по проекту Б. Расчет выполнить в таблице «Расчет степени риска при вложении в инвестиционные проекты». Построить кривые вероятностного распределения значений по проектам А и Б, сделать вывод об величине риска.

Расчет степени риска при вложении в инвестиционные проекты

Возможные значения конъюнктуры инвестиционного рынка	Прибыль, тыс. руб., Х	Дисперсия, σ	Средне-квадратическое отклонение, σ	Коэффициент вариации, υ
Инвестиционный проект А				
Высокая				
Средняя				
Низкая				
В целом				
Инвестиционный проект Б				
Высокая				
Средняя				
Низкая				
В целом				

Тема 2.3 Финансовые расчеты в инвестиционном анализе

2.3.1. Основные понятия инвестирования и чистый приведенный доход

Латинское слово *invest* означает «вкладывать». Вложение денежных средств и других капиталов в реализацию различных экономических проектов или в ценные бумаги с целью получения прибыли, называется **инвестированием**, а сами вкладываемые средства **инвестициями**. Целью инвестирования является получение прибыли, увеличение капиталов.

Важнейшими задачами анализа инвестиционных проектов является определение их финансовой эффективности и сравнение эффективности альтернативных инвестиционных проектов с целью выбора наилучшего из возможных вариантов инвестирования.

Инвестиционные проекты являются альтернативными, если реализация одного из них исключает возможность реализации другого. Например, частный инвестор приобретает акции компании «Норильский никель» на сумму 2,5 млн. рублей. В этом случае эти деньги уже не могут быть положены на депозит в Сбербанк. Следовательно, эти варианты инвестирования денежных средств являются альтернативными. Для выбора наилучшего варианта инвестирования необходимо провести инвестиционный анализ.

Один из ключевых моментов при принятии инвестиционных решений составляет оценка эффективности предполагаемых капиталовложений.

Существующие методы оценки инвестиций можно разбить на две группы: статические или учетные и динамические, учитывающие фактор времени.

Динамические методы отражают наиболее современные подходы к оценке эффективности инвестиций. Они преобладают в практике крупных и средних предприятий развитых стран. Эти методы часто называют дисконтными, поскольку они базируются на определении современной величины денежных потоков, связанных с реализацией инвестиционного проекта.

Поскольку денежные средства распределены во времени, то и здесь фактор времени играет важную роль.

При оценке инвестиционных проектов используется метод расчета чистого приведенного дохода, который предусматривает дисконтирование денежных потоков: все доходы и затраты приводятся к одному моменту времени.

Центральным показателем в рассматриваемом методе является показатель NPV *(net present value)* – текущая стоимость денежных потоков за вычетом текущей стоимости денежных оттоков. Это обобщенный конечный результат инвестиционной деятельности в абсолютном измерении.

При разовой инвестиции расчет чистого приведенного дохода можно представить следующим выражением:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC. \tag{2.3.1}$$

где R_k – годовые денежные поступления в течение n лет, $k = 1, 2, \ldots, n$;

IC – стартовые инвестиции;

i – ставка дисконтирования.

Важным моментом является выбор ставки дисконтирования, которая должна отражать ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке. Для определения эффективности инвестиционного проекта отдельным предприятием в качестве ставки дисконтирования используется средневзвешенная цена капитала, используемого предприятием для финансирования данного инвестиционного проекта.

Если проект предполагает не разовую инвестицию, а последовательное инвестирование финансовых ресурсов в течение нескольких лет (m), то формула для расчета модифицируется:

$$NPV = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=0}^{m} \frac{IC_j}{(1+r)^j} \qquad (2.3.2)$$

Показатель NPV является абсолютным приростом, поскольку оценивает, на сколько приведенный доход перекрывает приведенные затраты:

при $NPV > 0$ проект следует принять;

при $NPV < 0$ проект не принимается,

при $NPV = 0$ проект не имеет ни прибыли, ни убытков.

Необходимо отметить, что показатель *NPV* отражает прогнозную оценку изменения экономического потенциала фирмы в случае принятия данного проекта.

Одно из важных свойств данного критерия, что показатель *NPV* различных проектов можно суммировать, поскольку он аддитивен во времени. Это позволяет использовать его при анализе оптимальности инвестиционного портфеля.

Пример 2.3.1. Предприятие рассматривает целесообразность инвестиционного проекта, стоимость которого составляет 210 тыс. долларов. По прогнозам ежегодные поступления составят 55 тыс. долларов. Проект рассчитан на 5 лет. Необходимая норма прибыли составляет 8%. Следует ли принять этот проект?

Решение: Чистая стоимость проекта равна:

NPV = 55'000 $(1,08)^{-1}$ + 55'000 $(1,08)^{-2}$ + 55'000 $(1,08)^{-3}$ + 55'000 $(1,08)^{-4}$ +

+ 55'000 $(1,08)^{-5}$ - 210'000 = 50'926 + 42'867 + 39'692 + 36'751 + 34'029 -

210'000 = 204'265 - 210'000 = -5'735 долларов.

Поскольку величина чистой текущей стоимости -5'735 долларов, т.е. $NPV < 0$, то проект не может быть принят.

Как правило, основываются на том, что величина NPV находится на начало реализации инвестиционного проекта, однако можно определять эту величину на момент завершения процесса вложений или на иной момент времени.

Напомним, что ставка дисконтирования – результат выбора, субъективного суждения. Кроме того, при высоком уровне ставки отдаленные платежи будут оказывать на величину NPV малое влияние, поэтому варианты, отличающиеся по продолжительности периодов отдачи, могут оказаться равноценными по конечному экономическому эффекту.

2.3.2. Определение срока окупаемости инвестиций

Для анализа инвестиций применяют и такой показатель, как **срок окупаемости** (*payback period method*) – продолжительность времени, в течение которого дисконтированные на момент завершения инвестиций прогнозируемые денежные поступления равны сумме инвестиций. Иными словами – это сумма лет, необходимых для возмещения стартовых инвестиций:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} \geq IC \tag{2.3.3}$$

т.е. $NPV = 0$.

Период окупаемости можно определить как ожидаемое число лет по упрощенной формуле:

$n_{ок}$ = Число лет до года окупаемости + (не возмещенная стоимость на начало года окупаемости / приток наличности в течение года окупаемости).

Данный показатель определяет срок, в течение которого инвестиции будут «заморожены», поскольку реальный доход от инвестиционного проекта начнет поступать только по истечении периода окупаемости.

Пример 2.3.2. Рассчитать срок окупаемости проекта, для которого размер инвестиций составляет 1 млн. руб., а денежные поступления в течение 5 лет будут составлять: 200; 500; 600; 800; 900 тыс. руб. соответственно. Ставка дисконтирования 15%.

Решение: Рассчитаем дисконтированный денежный поток:

Период	0	1	2	3	4	5
Денежный поток	-1000	200	500	600	800	900
Дисконтированный денежный поток	-1000	174	378	394	458	447
Накопленный дисконтированный денежный поток	-1000	-826	-448	-54	404	851

Срок окупаемости проекта:

$k_{ок}$ = 3 + 54 / 458 = 3,12

Таким образом, период, реально необходимый для возмещения инвестированной сумы, составит 3,12 года или 3 года и 44 дня.

Срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между поступлениями и размером инвестиций. При ежегодных постоянных поступлениях это соотношение имеет вид:$R_k < IC \bullet i$, т.е. не всякий уровень дохода при прочих равных условиях приводит к окупаемости инвестиций.

2.3.3. Расчет внутренней нормы доходности

При анализе эффективности инвестиционных проектов широко используется **показатель внутренней нормы доходности** (*IRR* – internal rate of return) – это ставка дисконтирования, приравнивающая сумму приведенных доходов от инвестиционного проекта к величине инвестиций, т.е. вложения окупаются, но не приносят прибыль. Величина этой ставки полностью определяется «внутренним» условиями, характеризующими инвестиционный проект.

Реализация любого инвестиционного проекта требует привлечения финансовых ресурсов, за которые необходимо платить. Так за заемные средства платят проценты, за привлеченный акционерный капитал – дивиденды и т.д.

Показатель, характеризующий относительный уровень этих расходов, является ценой за использованный (авансируемый) капитал. При финансировании проекта из различных источников этот показатель определяется по формуле средней арифметической взвешенной.

Чтобы обеспечить доход от инвестированных средств или, по крайней мере, их окупаемость, необходимо добиться такого положения, когда чистая текущая стоимость будет больше нуля или равна нулю.

Применение данного метода сводится к последовательной итерации (повторения) нахождения дисконтирующего множителя, пока не будет обеспечено равенство $NPV = 0$.

Выбираются два значения коэффициента дисконтирования, при которых функция NPV меняет свой знак, и используют формулу:

$$IRR = i_1 + NPV(i_1) / [NPV(i_1) - NPV(i_2)] \cdot (i_2 - i_1) \qquad (2.3.4)$$

Инвестор сравнивает полученное значение IRR со ставкой привлеченных финансовых ресурсов (CC – Cost of Capital):

если $IRR > CC$, то проект можно принять;

если $IRR < CC$, проект отвергается;

$IRR = CC$ проект имеет нулевую прибыль.

Пример 2.3.4. Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту, где затраты составляют 1200 тыс. руб., а доходы 50; 200; 450; 500 и 600 тыс. руб.

Решение: Расчет по ставке 5%:

$NPV = 47619 + 181406 + 388767 + 411351 + 470116 - 1200000 = 299259.$

Поскольку $NPV > 0$, то новая ставка дисконтирования должна быть больше 5%.

Расчет по ставке 15%:

NPV = 43478 + 151229 + 295882 + 285877 + 298306 - 1200000 = -125228.

Вычисляем внутреннюю ставку доходности:

IRR = 5 + [299259 / [299259 - (-125228)]] • (15 - 5) = 12,05.

Внутренняя норма доходности проекта равна 12,05%.

Точность вычисления обратна величине интервала между выбираемыми процентными ставками, поэтому для уточнения величины процентной ставки длина интервала принимается за 1%.

Пример 2.3.5. Уточнить величину ставки для предыдущего примера.

Решение: Для процентной ставки 11%:

NPV = 45045 + 162324 + 329036 + 329365 + 356071 - 1200000 = 21841.

Для процентной ставки 12%:

NPV = 44643 + 159439 + 320301 + 317759 + 340456 - 1200000 = -17402.

Уточненная величина:

IRR = 11 + [21841 / [21841 - (-17402)]] • (12 - 11) = 11,56.

Ставка 11,56 % является верхним пределом процентной ставки, по которой предприятие может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему анализ эффективности долгосрочных инвестиций считают ключевым разделом финансового менеджмента?

2. Характеристика показателей эффективности инвестиций.

3. Формулы исчисления показателей эффективности инвестиций.

4. Какой признак положен в основу классификации показателей эффективности инвестиций?

5. Назовите основные факторы, оказывающие существенное влияние на показатель NPV.

6. В каких случаях возможно появление нескольких значений IRR?

7. В чем необходимость анализа показателей на чувствительность?

8. В каких случаях показатели PI и IRR могут противоречить показателю NPV?

9. При анализе взаимоисключающих проекта А и проекта Б были получены следующие результаты: IRR(A) = 15%, IRR(B) = 12%, NPV(A) = 10000, NPV(B) =12500. Норма дисконта для обоих проектов одинакова и равна 9%. Какой проект предпочтительнее? Почему?

10. Анализ двух независимых проектов показал, что они имеют почти равную NPV. Как поступить в данной ситуации?

Задачи для самостоятельного решения

1. Депозитный сертификат номиналом в $1000 и процентной ставкой 15 % годовых погашается через 6 месяцев после эмиссии. Инвестор приобрел сертификат через 2 месяца после эмиссии по цене $900. За месяц до погашения он продал его. Если уровень процентных ставок в момент продажи составлял 20 % годовых, то по какой цене был продан сертификат. Сколько заработал инвестор (в $)? Какова доходность сделки с сертификатом?

2. Реализация инвестиционного проекта предполагает следующее поступление денежных средств (начисленных сумм), млн. руб.:

1-й год – 100, 2-й год – 150, 3-й год – 200, 4-й год – 300.

Первоначальные вложения, включающие стоимость покупки оборудования, составляют 230 млн. руб. Ожидаются следующие инвестиции:

1-й год – 50, 2-й год – 70, 4-й год – 130.

Определить чистую приведённую стоимость при ставке дисконтирования 12% годовых. Определить доходность простым методом и методом дисконтирования. Сравнить по методу NPV два инвестиционных проекта. Ставка дисконтирования 12% годовых.

Предполагается следующая финансовая схема инвестиций и поступлений по годам, млн. руб.:

проект А) инвестиции – V1= 10, V2=12, V3=14;

поступления – S8=20, S9=25, S10=30.

проект В) инвестиции – V5= 7, V6=8, V7=9;

поступления – S8=25, S9=30, S10=35.

3. Реализация проекта, предусматривающего затраты в размере 60 000 ден. ед., должна дать чистый поток наличности, имеющий следующую структуру: 10000, 15000, 15000, 20000, 15000, 10000, 5000. Определите:

а) NPV, PI, IRR для этого проекта при норме дисконта 10% и 15%;

б) NPV, PI, IRR при условии, что притоки денежной наличности одинаковы и составляют 13 000 ден. ед. Нормы дисконта прежние;

в) как изменятся NPV, PI, IRR, если последний приток наличности возрастет до 10 000 ден. ед.; снизится до 2 000?

4. Фирма рассматривает возможность финансирования трех проектов, денежные потоки которых представлены в таблице:

Период	Проект Y	Проект Z	Проект W
0	-20 000,00	-130000,00	-100 000,00
1	15000.00	80 000.00	90 000,00
2	15 000,00	60 000,00	30 000,00
3	15000,00	80 000,00	

Определите:

а. NPV, PI, IRR для этих проектов при норме дисконта 15%.

б. Какой из проектов предпочтительнее? Почему?

5. Корпорация «К» рассматривает два взаимоисключающих инвестиционных проекта. Структуры денежных потоков для проектов представлены в таблице:

Период	Проект X	Проект S
0	-400,00	-200,00
1	241,00	131.00
2	293,00	172,00

Норма дисконта для обоих проектов одинакова и равна 9%. Какой из проектов предпочтительнее? Почему?

6. Проекты А и Б требуют одинакового объема первоначальных инвестиций – 5000 ден. ед. Без учета дисконтирования проект А генерирует поток платежей, равный 12000, а проект Б – 10 000 ден. ед. После дисконтирования потоков платежей по норме 10% оба проекта имеют равную NPV.

У какого проекта величина NPV будет более чувствительна к изменению нормы дисконта? Подкрепите свои рассуждения графическими иллюстрациями.

Тема 2.4. Кредитные расчеты

План

2.4.1. Типовые схемы погашения кредита

2.4.2. Потребительский кредит

2.4.3. Формирование погасительного фонда

2.4.1. Типовые схемы погашения кредита

Одна из задач количественного финансового анализа долгосрочной задолженности (далее для краткости любой вид долгосрочного долга будем называть кредитом) – разработка плана погашения кредита, адекватного условиям финансового соглашения.

Разработка плана погашения кредита заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника. Такие расходы должника обычно называют *расходами по обслуживанию долга* или, более кратко, *срочными уплатами, расходами по кредиту*.

Расходы по обслуживанию долга включают две составляющие:

1) текущие процентные платежи;

2) средства, предназначенные для погашения основного долга.

Будем использовать следующие обозначения:

D – сумма задолженности (основной долг);

i – ставка процента по кредиту;

n – общий срок кредита;

Y – срочная уплата.

Обычно на практике используют несколько схем погашения долга.

Погашение кредита одним платежом.

Один из способов погашения долга – одним платежом в конце срока в виде разового платежа.

Пусть D – кредит, выданный на n лет под i сложных годовых процентов. К концу *n-го* года наращенная его величина составит $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать долг одним платежом в конце срока, то это и будет размер данного платежа. Таким образом, размер срочной уплаты будет:

$$Y = D(1+i)^n \tag{2.4.1}$$

Пример 2.4.1. Кредит в сумме 100 тыс. руб. выдан на срок 5 лет. За кредит выплачиваются проценты по ставке 10 % годовых. Определить размер срочных уплат и составить график погашения кредита для раз_личных схем погашения.

Решение. В случае погашения кредита разовым платежом в конце срока размер срочной уплаты будет:

$$Y = 100(1 + 0{,}1)^5 = 161{,}051 \text{ тыс. руб.}$$

Эта сумма включает основной долг 100 тыс. руб. и проценты за его использование в течение пяти лет 61,051 тыс. руб.

Погашение основного долга одним платежом в конце срока.

Возможна другая схема погашения кредита, когда в конце срока выплачивается основной долг, а ежегодно уплачиваются проценты.

Проценты за первый год составят $I = Di$.. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D. Таким образом, размер срочной уплаты составит:

$$Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = D_i \qquad (2.4.2)$$

В конце *n-го* года величина выплаты будет:

$$Y_n = D + Di \qquad (2.4.3)$$

Эта сумма включает процентные деньги за последний год и основной долг.

Для рассматриваемого примера размер срочных уплат составит:

$$Y_1 = ... = Y_4 = 100\ 0{,}1 = 10 \text{ тыс. руб.}$$

$$Y_5 = 100 + 100*0{,}1 = 110 \text{ тыс. руб.}$$

Погашение основного долга равными выплатами.

В практической финансовой деятельности, особенно при значительных размерах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку, частями. Такой метод погашения часто называют амортизацией долга. Он осуществляется различными способами. Рассмотрим способ, по которому основ_ной долг погашается равными годовыми выплатами.

Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет. В этом случае сумма, ежегодно идущая на его погашение, составит: $d = D/ n$.

Размер долга последовательно сокращается: $D, D - d, D - 2d$ и т.д.

Соответствующим образом уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток долга. Если проценты выплачиваются раз в конце года по ставке i, то процентные платежи за первый и последующие годы равны $Di, (D - d)i, (D - 2d)i$ и т.д. Процентные платежи, как видим, образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом Di и разностью di.

Срочная уплата в конце первого года находится так:

$$Y_1 = D_0 i + d \qquad (2.4.4)$$

где $D_0 = D$ – сумма основного долга.

Для конца года t получим:

$$Y_t = D_{t-1} i + d\ ,\ t = 1, \ldots, n \qquad (2.4.5)$$

где D_{t-1} — остаток долга на конец года t.

Остаток долга можно определять последовательно:

$$D_t = D_{t-1} * (n-1) / n \qquad (2.4.6)$$

Пример2.4.2. Кредит в сумме 100 тыс. руб. выдан на срок 5 лет. За кредит выплачиваются проценты по ставке 10% годовых. Кредит погашается в рассрочку – основной долг погашается равными ежегодными выплатами. Составить график погашения кредита.

Решение. Сумма, ежегодно идущая на погашение основного долга будет:

$$d = D / n = 100 / 5 = 20 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения представлен в таблице 2.4.1.

Таблица 2.4.1

План погашения основного долга равными выплатами

Год	Остаток основного долга на начало года	Расходы по кредиту (срочные уплаты)	Погашение основного долга	Проценты (процентные платежи)
1	100 000	30 000	20 000	10 000
2	80 000	28 000	20 000	8 000
3	60 000	26 000	20 000	6 000
4	40 000	24 000	20 000	4 000
5	20 000	22 000	20 000	2 000

Как видим, со временем уменьшаются не только суммы расходов по кредиту, но и соотношения процентов и сумм погашения основного долга.

Погашение кредита равными срочными уплатами.

В соответствии с этим методом расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга. Так же как и в предыдущем методе, величина долга здесь последовательно сокращается, в связи с этим уменьшаются процентные платежи и увеличиваются платежи по погашению основного долга.

План погашения обычно разрабатывается при условии, что задается срок погашения долга. Первый этап разработки плана погашения – определение размера срочной уплаты. Далее полученная величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение основного долга. После чего легко найти остаток задолженности.

Периодическая выплата постоянной суммы *Y* равнозначна ренте с заданными параметрами. Приравняв сумму долга к современной величине этой ренты, находим:

$$D = Ya_{n;i} \Rightarrow Y = D / a_{n;i} \qquad (2.4.7)$$

где $a_{n;i}$ – коэффициент приведения годовой ренты со ставкой *i* и сроком $_n$.

Все величины, необходимые для разработки плана, можно рассчитать на основе величины Y и данных финансового контракта. Найдем сумму первого погасительного платежа (платежа, на обслуживание основного долга).

$d_1 = Y - D_i$.

Сумма второго платежа:

$$d_2 = Y - (D - d_1)\, i = (d_1 + D_i) - (D - d_i)\, i = d_1 (1 + i).$$

Сумма платежа после года t:

$$d_t = d_{t-1}(1 + i).$$

Суммы, идущие на погашение долга, увеличиваются во времени, в связи с этим рассматриваемый метод погашения называют прогрессивным. Платежи по погашению основного долга образуют ряд d1, d1(1+i), …, $d1(1+i)^{n-1}$.

По этим данным легко определить сумму погашенной задолженности (основного долга) на конец года *t* после очередной выплаты:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1 (1+i)^k = d_1 s_{t;i} \tag{2.4.8}$$

где $s_{t;i}$ – коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

Пример 2.4.3. Условия погашения кредита те же, что и в предыдущем примере. Однако погашение производится равными срочными уплатами, т.е. рентой постнумерандо с параметрами: Y (неизвестная величина), *n* = 5, *i* = 10%. Составить график погашения кредита.

Решение.

Находим размер срочной уплаты:

Y = 100000 / 3,790787 = 26379,75 руб.

Далее определим сумму первого погасительного платежа:

d_1 = 26379,75 – 100000*0,1 = 16379,75 руб.

Остаток долга после первого погашения:

D_1 = 100000 - 16379,75 = 83620,25 руб. и т.д. (см. таблицу 2.4.2).

Разница 0,01 руб. между остатком основного долга (см. колонку «Остаток основного долга на начало года») и суммой в уплату основного долга (см. колонку «Погашение основного долга») обусловлена точностью вычислений.

Для исключения разницы необходимо последний платеж (см. колонку «Расходы по кредиту») уменьшить на эту величину.

Таблица 2.4.2

Погашение кредита равными срочными уплатами

Год	Остаток основного долга на начало года	Расходы по кредиту (срочные уплаты)	Погашение основного долга	Проценты (процентные платежи)
1	100000	26379,75	26379,75 – 10000 = 16379,75	10000
2	100000 – 16379,75 = 83620,25	26379,75	26379,75 – 8362,03 = 18017,72	8362,03
3	83620,25 – 18017,72 = 65602,53	26379,75	26379,75 – 6560,25 = 19819,50	6560,25
4	65602,53 – 19819,50 = 45783,03	26379,75	26379,75 - 4578,30 = 21801,45	4578,30
5	45783,03 – 21801,45 = 23981,58	26379,75	26379,75 – 2398,16 = 23981,59	2398,16

Допустим, необходимо найти сумму погашенного долга на конец третьего года погашения при условии, что план погашения не разработан. Для решения воспользуемся формулой (2.4.8).

Находим

$$s_{3;10} = \frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 3,31,$$

Сумма первого платежа определена выше – d1 = 16379,75 руб., таким образом,

W_3 = 16379,75*3,31 = 54216,97 руб.

Остаток задолженности после третьего года будет

100000 – 54216,97 = 45783,03 руб.

***Переменные расходы по кредиту*.**

Далеко не всегда оказывается удобным условие Y = $const$. Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств из каких-либо источников, и зависеть от ряда обстоятельств. Срочные уплаты в этом случае образуют ряд, члены которого либо задаются заранее (график погашения), либо следуют какому-либо формальному закону (прогрессии, заданной функции).

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с ожидаемыми поступлениями средств и задаются заранее в виде графика погашения. Размер последней срочной уплаты не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

Пример 2.4.4. Кредит на сумму 100 тыс. руб. погашается по специальному графику. Суммы расходов по погашению кредита по годам 30, 20, 30 и 20 тыс. руб. Остаток выплачивается в конце пятого года. Ставка процента по долгу установлена на уровне 10% годовых. Составить график погашения кредита.

Решение

План погашения имеет следующий вид (таблица 2.4.3).

Таблица 2.4.3

План погашения переменных расходов по кредиту

Год	Остаток основного долга на начало года	Расходы по кредиту (срочные уплаты)	Погашение основного долга	Проценты (процентные платежи)
1	100000	30000	20000	10000
2	80000	20000	12000	8000
3	68000	30000	23200	6800
4	44800	20000	15520	4480
5	29280	32208	29280	2928

Размер последней срочной уплаты определяется как сумма остатка основного долга на начало последнего года (29 280 руб.) и процентных платежей, начисленных на эту сумму (29280*0,1 = 2928 руб.).

2.4.2. Потребительский кредит

Частным случаем погашения долга равными срочными уплатами является потребительский кредит, при котором проценты начисляются сразу на всю сумму кредита, а сумма задолженности равномерно погашается на протяжении всего срока кредита. Проценты в потребительском кредите начисляются сразу на всю сумму долга по простой ставке: $I = D \cdot n \cdot i$

Тогда общая сумма расходов по погашению кредита складывается из выплаты процентов и суммы основного долга: $\Sigma Y_t = D + I$

Следовательно, размер срочной уплаты определяется по формуле:

$$\Sigma Y_t = (D + I) : (n \cdot m), \qquad (2.4.9)$$

где n – срок кредита в годах;

m – количество взносов в течение года.

Пример 2.4.5. Потребительский кредит на сумму 5 тыс. руб. открыт на 2 года по ставке 25% годовых. Погашение кредита равными взносами ежеквартально. Определить стоимость кредита и размер ежеквартальных взносов.

Решение: Стоимость кредита – это проценты, которые равны:

$I = D \cdot n \cdot i = 5'000 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 2\ 500$ рублей

Общая сумма расходов по обслуживанию кредита равна:

$\Sigma Y_t = D + I = 5'000 + 2'500 = 7\ 500$ рублей

Ежеквартальные взносы составят величину:

$\Sigma Y_t = (D + I) : (n \cdot m) = 7\ 500 : 2 \cdot 4 = 937{,}50$ рублей

Таким образом, ежеквартальные взносы в размере 937,50 рублей позволяет выплатить сумму долга и выплатить проценты.

Если бы использовалось прогрессивное погашение, т.е. начисление процентов на остаток долга, то это было бы заметно дешевле для должника.

Расчленение величины срочной уплаты в потребительском кредите на процентные платежи и погашение основной суммы долга в мировой практике называется «методом 78». Это связано с тем, что для потребительского кредита сроком 12 месяцев и ежемесячным погашение, сумма порядковых номеров месяцев будет равна 78, что и дало название такому методу начисления процентов.

Это правило можно обобщить для n лет и m платежей в году:

$$N = m \cdot n\ [(m \cdot n + 1) : 2], \tag{2.4.10}$$

где N – сумма последовательных номеров выплат.

Отсюда очень легко расчленить срочную уплату на процентные платежи и сумму погашения основного долга:

$$Y_t = I_t + d_t\ , \tag{2.4.11}$$

где I_t – процентный платеж;

d_t – сумма погашения основного долга.

Тогда величина процентного платежа определяется следующим образом: $I_t = I \cdot (t\ /\ N)$, а сумма погашения основного долга как разница срочной уплаты и процентных выплат: $R_t = Y_t – I_t$.

Рассмотрим предыдущий пример, расчленив срочную уплату на составляющие элементы, все данные представив в виде таблицы 2.4.4.

Таблица 2.4.4

План погашения потребительского кредита

Платеж	t	Долг (D_t=D_{t-1}-R_t)	Срочная уплата (Y_t)	Проценты [I_t=I (t/N)]	Погашение основной суммы долга (d_t=Y_t-I_t)
1	8	5000,00	937,50	555,56	381,94
2	7	4618,06	937,50	486,11	451,39
3	6	4166,67	937,50	416,67	520,83
4	5	3645,84	937,50	347,22	590,28
5	4	3055,56	937,50	277,78	659,72
6	3	2395,84	937,50	208,33	729,17
7	2	1666,67	937,50		

2.4.3. Формирование погасительного фонда

Долг может погашаться различными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить долг с процентами одним платежом в конце срока. Очевидно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность поместить деньги погасительного фонда под более высокие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Пусть заем размером D взят в начале года на n лет под ставку i сложных процентов в год. Тогда к концу n- го долг с процентами составит $D(1+i)^n$. Ежегодные платежи в погасительный фонд образуют ренту с годовым платежом R и годовой ставкой сложных процентов $g > i$.

Тогда в фонде к концу n- го года накопится сумма $R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$, из которой и будет погашен заем величиной $D(1+i)^n$.

Величина разовых платежей может быть определена из равенства:

$$D(1+i)^n = R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g} \qquad (2.4.12)$$

Пример 2.4.6. Льготный кредит в 9000 $ взят под 4% годовых на 10 лет. Заемщик имеет возможность поместить валютные средства под 8% годовых. Он намерен образовать погасительный фонд, перечисляя определенную сумму денег в конце каждого года. Определить размер ежегодного платежа в погасительный фонд.

Решение: $D = 9000\$; n = 10 \textit{лет}; i = 0{,}04; g = 0{,}08.$

Для того, чтобы погасить долг с процентами, необходимо к концу срока накопить в фонде следующую сумму:

$$D(1+i)^n = 9000(1{,}04)^{10} = 9000 \cdot 1{,}4802 = 13321{,}8\$.$$

Для того, чтобы определить размер ежегодного платежа в накопительный фонд, составим следующее уравнение:

$$R \cdot \frac{(1+0{,}08)^{10}-1}{0{,}08} = 13321{,}8.$$

Разрешив его относительно R, получим величину годового платежа:

$$R = \frac{13321{,}8}{14{,}4866} = 919{,}6\$.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Планирование погашения задолженности.
2. Потребительский кредит.
3. Погашение основного долга равными платежами.
4. Погашение потребительского кредита изменяющимися суммами.
5. Погашение займа одним платежом в конце срока.
6. Погашение основного долга одним платежом в конце срока.
7. Погашение основного долга равными выплатами.
8. Погашение займа равными годовыми выплатами.
9. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год.
10. Формирование погасительного фонда.

Задачи для самостоятельного решения

1. Кредит в размере 8 000 рублей выдан на срок 4 года. Ставка 8% годовых. Определить размер срочных уплат, если погашение основного долга осуществляется равными выплатами.

2. Два вклада по 120 000 ден. ед. были размещены на 4 года под 10 % годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 5 %. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

3. Первоначальная сумма вклада составляет 6 000 ден. ед. Вклад размещен на 3 года под 14% годовых с ежемесячной капитализацией. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне

7%. Определите наращенную сумму денег с учетом инфляции.

4. Ежемесячный темп инфляции составляет 2%. Определите реально наращенную стоимость вклада в 200 000 ден. ед., хранящегося на счете до востребования в банке в течение 7 месяцев по ставке 10% простых процентов. Определите брутто-ставку, обеспечивающую заданную доходность.

5. Определено, что доходность коммерческого банка по вкладам «до востребования» должна быть 5 % годовых. Известно, что годовой темп инфляции составляет 11 % годовых. Определите процентную ставку по данным вкладам.

6. Банк выдал кредит на 3 месяца в размере 6 000 ден. ед. Ожидаемый месячный темп инфляции – 2%, требуемая реальная доходность операции – 12% годовых. Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, величину наращенной суммы.

7. Ссуда в размере 1 000 ден. ед. получена предприятием на срок 5 лет. Проценты начисляются по сложной ставке, равной 18% годовых. Расчетный темп инфляции 11% в год. Определите реальную доходность инвестора по данной операции, а также его реальный доход.

8. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 1 млн. руб. Погашение ежемесячное постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной годовой ставке 12 %. Составить график погашения задолженности.

9. Кредит в сумме 10 тыс. руб. выдан на шесть месяцев под 20% годовых (проценты простые). Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

10. Холодильник ценой 2 тыс. руб. продается в кредит на год под 10% годовых. Погасительные платежи вносятся через каждые три месяца. Определить размер разового погасительного платежа.

Тема 2.5. Оценка эффективности операций на фондовом рынке

План

2.5.1. Оценка стоимости и доходности акций

2.5.2. Оценка стоимости и доходности облигаций

2.5.1. Оценка стоимости и доходности акций

Для акций существуют следующие виды стоимостных оценок:

номинальная стоимость;

балансовая (книжная) стоимость;

эмиссионная стоимость;

рыночная стоимость.

Первая стоимостная оценка, которую получает акция в момент учреждения АО – это номинальная стоимость. Номинальная стоимость указывается на лицевой стороне ценной бумаги, поэтому, ее часто называют лицевой ил нарицательной стоимостью. Номинальная стоимость определяется как:

$$N = \frac{Y}{K} \qquad (2.5.1)$$

где Y – сумма уставного фонда;

K – общее количество размещенных акций.

С течением времени фактическая стоимость имущества будет отличаться от начальной величины уставного капитала. В связи с этим возникает необходимость расчета так называемой балансовой (книжной) стоимости акций. Балансовая стоимость акций рассчитывается по формуле:

$$С_б = \frac{С_{ча}}{K} \qquad (2.5.2)$$

где $С_{ча}$ – стоимость чистых активов компании;

К – количество размещенных акций.

Если в уставе компании определена ликвидационная стоимость по привилегированным акциям, то есть сумма денежных средств, которую получают владельцы этих акций в случае ликвидации АО, то балансовая стоимость простых акций рассчитывается отдельно по формуле:

$$С_{б} = \frac{С_{ча} – С_{п}}{К_{о}} \tag{2.5.3}$$

где $С_{ча}$ – стоимость чистых активов компании;

$С_{п}$ – ликвидационная стоимость всех привилегированных акций;

$К_{о}$ – количество размещенных обыкновенных акций.

Рыночная (курсовая) цена определяется в результате котировок на организованном вторичном фондовом рынке. Она устанавливается в результате проведения торгов на основе взаимодействия спроса и предложения. Широко известна классическая формула расчета рыночной цены, исходя из суммы выплачиваемых дивидендов:

$$С_{р} = \frac{Д}{СР} \bullet 100\% \tag{2.5.4}$$

где Д – сумма выплаченных дивидендов, руб.;

СР – ставка рефинансирования.

Распространенным является метод оценки по ожидаемой доходности, в основе которого лежит оценка будущего дохода, который получит инвестор, владея акцией. Определить стоимость акции можно следующим образом:

$$С_{р} = \frac{Д+\Delta К}{К} \bullet 100\% \qquad (2.5.5),$$

где ΔК – прирост курсовой стоимости, руб.;

Д – ожидаемый дивиденд, руб.;

К – требуемая доходностью, %.

Вместо требуемой доходности (К) можно использовать показатель доходности по безрисковым вложениям, скорректированный на степень риска. В этом случае формула примет вид:

$$С_р = \frac{Д+\Delta К}{К_{бр}+Р} \cdot 100\% \qquad (2.5.6),$$

где ΔК – прирост курсовой стоимости, ру.б;

$К_{бр}$ – доходность безрисковых вложений, %;

Р – плата за риск, %.

Пример. 2.5.1. Предположим, текущая рыночная цена одной акции АО составляет 10 тыс. руб. АО выплачивает дивиденды своим акционерам и имеет достаточно стабильные темпы развития, отражающиеся в росте рыночных котировок. Инвестор в обмен на вложенный капитал ожидает обеспечить доходность не менее 20%. Необходимо определить готов ли он заплатить за акции рыночную цену, если ожидаемый прирост дивидендов составит 1 тыс. руб., прирост курсовой стоимости – 2 тыс. руб.

Решение: Цену, которую может заплатить инвестор, определяем по формуле (2.5.5): ((1+2)/20)*100=10,5 тыс. руб. Таким образом, инвестору есть смысл купить акции по цене 10 тыс. руб.

Если дивидендные выплаты периодически увеличиваются с одинаковым темпом прироста и темп роста дивидендов отражает темп роста компании, инвестор может воспользоваться методикой оценки акций на основе постоянного роста дивидендов. Цена акций в этом случае определяется по формуле:

$$С_р = \frac{Д \cdot (1+Т/100\%) \cdot 100}{К–Т} \qquad (2.5.7)$$

где Д -- сумма дивидендов, руб.

Т – темп прироста дивиденда, %;

К – требуемый уровень доходности, %.

Пример 2.5.2. Рыночная стоимость акций компании 20 тыс. руб. Акционерам регулярно выплачиваются дивиденды в размере 4 тыс. руб., ежегодный темп прироста дивидендных выплат составляет 5%. Требуемая доходность – 25%.

Решение: В этом случае цена акций составит 21 тыс. руб. ((4*(1+0,05)*100)/(25-5)).

Таким образом, инвестор может сделать вывод о целесообразности приобретения акций по цене 20 тыс. руб., поскольку рассчитанная им допустимая цена, по которой он согласен купить акции составляет 21 тыс. руб.

Пример 2.5.3. Как и в предыдущем случае, рыночная стоимость акций компании – 20 тыс. руб., дивиденды за прошлый год составили 4 тыс. руб. Первый инвестор полагает, что дивиденды возрастут на 6%, доходность акций должна быть не ниже 25%. Второй инвестор рассчитывает на прирост дивидендов в размере 4% при требуемом уровне доходности вложений 27%. Для первого инвестора стоимость акций, по которой он согласится их приобрести составит 22,3 тыс. руб.: (4*(1+0,06)*100)/(25-6).

Для второго инвестора аналогичная расчетная стоимость будет равна 18 тыс. руб.: (4*(1+0,04)*100)/(25-4).

Как видно, выполненные этими двумя инвесторами оценки отличаются и каждый из них имеет совершенно противоположные взгляды на действительную стоимость акций. Первый инвестор решит, что для него выгодно купить акции по цене 20 тыс. руб., рассчитывая на будущий рост их рыночной стоимости. Второй посчитает, что сегодняшняя цена акций необоснованно завышена и сделает вывод о том, что имеющиеся у него акции необходимо продать. Появление этих двух инвесторов на рынке, имеющих различные точки зрения относительно соотношения текущей рыночной цены и действительной стоимости, вызовет движение акций, их куплю-продажу, изменение котировок.

Таким образом, субъективность оценок обусловит одновременное существование на рынке спроса и предложения. Наличие же на рынке большого количества продавцов и покупателей, в конце концов, приведет к стабилизации цены, приближая ее к справедливой стоимости.

На практике же необходимо, прежде всего, оценить доходность инвестиций, характеризующую доход относительно вложенного капитала. При этом различают текущую доходность и конечную доходность.

Текущая доходность ($Д_{ох.\ тек.}$) определяется по формуле:

$$Д_{ох.\ тек.} = \frac{Д}{Ц_р} \cdot 100\% \cdot \frac{T}{t} \qquad (2.5.8),$$

где Д – дивиденды, выплаченные по акции;

$Ц_р$ – рыночная цена акции;

Т – годовой период, 360(365) дней;

t – время, за которое получены дивиденды.

Если в момент приобретения акций они не обращались на рынке или акции были приобретены инвестором по цене ниже рыночной, то текущая доходность будет рассчитываться как:

$$Д_{ох.\ тек.} = \frac{Д}{Ц_о} \cdot 100\% \cdot \frac{T}{t} \qquad (2.5.9),$$

где $Ц_о$ – цена приобретения акции, руб.;

Д – дивиденды, выплаченные по акции,руб.;

Т – годовой период, 360(365) дней;

t – время, за которое получены дивиденды, в днях.

Конечная доходность ($Д_{ох.\ кон.}$) рассчитывается по формуле:

$$Д_{ох.\ кон.} = \frac{\sum_{i=1}^{t} +(Ц_Р - Ц_о)}{Ц_о \cdot Т} \qquad (2.5.10)$$

где $Ц_о$ – цена приобретения акций;

$Ц_р$ – текущая рыночная цена (цена продажи) акций;

Т – число лет владения акциями;

i=1, 2, 3…t – год владения акциями.

Таким образом, на доходность акций оказывают влияние такие факторы, как размер дивидендных выплат (который, в свою очередь, зависит от прибыльности компании и доли средств, направляемых на выплату дивидендов); динамика курсовой стоимости акций; темпы инфляции; ставки налогообложения.

2.5.2. Оценка стоимости и доходности облигаций

Так же, как и акция, облигация имеет несколько видов стоимостных оценок. В момент эмиссии облигации в ней фиксируется номинальная цена. Номинальная цена является обязательным реквизитом облигации и указывается на лицевой стороне ценной бумаги. Номинальная цена определяется как:

$$Н = \frac{С}{К} \qquad (2.5.11),$$

где С – сумма облигационного займа;

К – количество выпущенных облигаций.

Номинальная цена является важнейшей характеристикой облигации, поскольку она представляет денежную оценку обязательств эмитента. Одно из главных прав облигационера – возврат номинальной стоимости, принадлежащих ему облигаций.

Для сопоставления рыночных цен различных облигаций, имеющих разную номинальную стоимость, используется показатель рыночного курса. Рыночный курс выражает значение рыночной цены в процентах к номинальной стоимости облигации и рассчитывается следующим образом:

$$К_Р = \frac{Ц}{Н} \cdot 100\% \qquad (2.5.12)$$

где Ц – рыночная цена облигации;

Н – номинальная цена облигации.

Отсюда следует, что рыночная цена облигации равна:

$$Ц = \frac{Н \cdot К_р}{100\%} \qquad (2.5.13)$$

Так же как и цена акций, рыночная цена облигаций определяется требуемым уровнем доходности или уровнем доходности любого другого альтернативного вложения капитала. Рыночная цена облигаций зависит от установленного при ее выпуске процента дохода, который определен к номинальной стоимости облигации и сложившегося уровня доходности на финансовом рынке. С учетом этих факторов цена определяется по формуле:

$$Ц = Н \cdot \frac{(1+Д_о)^к}{(1+Д_А)^к} \qquad (2.5.14),$$

где Н – номинальная стоимость облигации

$Д_о$ – доходность облигации – купонный процент (в сотых долях процента);

$Д_А$ – доходность альтернативных вложений или ставка ссудного процента (в сотых долях процента);

к – число лет, оставшихся до погашения облигации.

Пример 2.5.4. Доходность облигации составляет 10% годовых, доходность альтернативных вложений 12% годовых. Номинал облигации 200 тыс. руб. Срок до погашения – 1 год. Рыночная цена должна составить:

$$200 \bullet \frac{(1+0{,}1)^1}{(1+0{,}12)^1} = 196{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку ожидаемая инвестором доходность от других вложений выше, чем доходность облигаций, расчетная рыночная цена опустится ниже номинальной стоимости.

Если требуемый инвестором уровень доходности составит 10%, т.е. он будет равен доходности облигации, то рыночная цена облигации будет равна номиналу:

$$200 \bullet \frac{(1+0{,}1)^1}{(1+0{,}1)^1} = 200 \text{ тыс. руб.}$$

Если же процентная ставка по облигации оказалась выше, чем доходность по альтернативным вложениям, в этом случае облигация будет продаваться по цене, превышающей номинал, т.е. облигация продается с премией. Если в рассматриваемом примере принять доходность облигаций равной 14% годовых, то при сохранении всех остальных условий цена облигации составит:

$$200 \bullet \frac{(1+0{,}14)^1}{(1+0{,}12)^1} = 203{,}6 \text{ у.е.}$$

Размер премии будет равен 3,6 у.е.

Для расчета доходности облигаций имеет значение не стоимость, а размер дисконта.

Величина дисконта (q) определяется по формуле:

$$q = \frac{(C_o - C_A) \bullet H}{H + C_A} \qquad (2.5.15)$$

где Н – номинальная стоимость облигации;

$С_о$ – доход по купону (процентный доход по облигации), руб.;

$С_А$ – доход от вложений в альтернативный сектор, руб.

В рассматриваемом примере дисконт будет равен:

((20-24) • 200)/(200+24)=-3,6 тыс. руб.

Знак « – » означает, что облигация продается с дисконтом и ее цена будет равна 200–3,6 = 196,4. Таким образом, получаем то же значение цены, что и в первоначальном примере.

Для измерения цены облигаций можно использовать формулу измерения полного потока доходов:

$$Ц = \sum_{i=1}^{к} \frac{С_о}{(1+Д_А)^к} + \frac{Н}{(1+Д_А)^к} \qquad (2.5.16)$$

где $С_о$ – доход по купону (процентный доход по облигации), руб.;

$Д_А$ – доходность альтернативных вложений или ставка ссудного процента (в сотых долях процента);

к – число лет, оставшихся до погашения облигации;

Н – номинальная стоимость облигации

Пример 2.5.5. При номинальной стоимости облигации 500 тыс. руб. доходность составляет 14%. Ставка ссудного процента (принимаемая инвестором как доходность альтернативных вложений) – 12% – остается неизменной в течение всего срока облигационного займа. Срок обращения облигации – 3 года.

Используя формулу (8.16) получим следующее значение цены:

$$\frac{70}{1+0,12} + \frac{70}{(1+0,12)^2} + \frac{70}{(1+0,12)^3} + \frac{500}{(1+0,12)^3} = 522,7 \text{ тыс. руб.}$$

Как видно из расчета, текущая стоимость облигации составит 522,7 тыс. руб..

Предположим, что срок, оставшийся до погашения облигации составляет 1 год при сохранении всех остальных параметров. В этом случае цена облигации будет равна:

$$\frac{70}{1+0{,}12} + \frac{500}{1+0{,}12} = 508{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, из примера видно, если доходность облигации выше доходности альтернативных вложений, то при приближении срока погашения облигации ее цена снижается.

Если изменить условие примера и принять доходность облигации равной 12%, а ставку ссудного процента – 14%, то цена облигации составит:

$$\frac{60}{1+0{,}14} + \frac{60}{(1+0{,}14)^2} + \frac{60}{(1+0{,}14)^3} + \frac{500}{(1+0{,}14)^3} = 477 \text{ тыс. руб.}$$

Облигация в данном случае будет продаваться ниже номинальной стоимости с дисконтом.

Если провести аналогию с предыдущим примером и срок до погашения принять равным одному году, цена облигации будет равна:

$$\frac{60}{1+0{,}14} + \frac{500}{1+0{,}14} = 491{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что, если доходность облигации ниже доходности альтернативных вложений, приближение срока погашения оказывает влияние на цену в сторону ее повышения.

К покупателю облигации вместе с самой ценной бумагой переходят и все права, в том числе и право на получение купонного дохода.

В общем виде текущую цену можно представить таким образом:

$$Ц = Ц_о+КД \qquad (2.5.17)$$

где $Ц_о$ – рыночная цена облигации на начало купонного периода;

КД – накопленный купонный доход за определенное количество дней, прошедших с начала купонного периода.

Это же можно выразить по-другому:

$$Ц = Ц_о + \frac{Н \cdot Д_о \cdot н}{365 \cdot 100} \qquad (2.5.18)$$

где $Ц_о$ – рыночная цена облигации на начало купонного периода;

$Д_о$ – доходность по купону, % годовых;

Н – номинальная стоимость облигации;

н – число дней, прошедших с начала купонного периода.

Если в последнем рассматриваемом периоде в момент совершения сделки рыночная цена составляла 491,2 тыс. руб. с даты последней купонной выплаты прошло 90 дней, то фактическая цена сделки с учетом прошедших 90 дней будет равна:

$$491{,}2 + \frac{500 \cdot 12 \cdot 90}{365 \cdot 100} = 491{,}2+14{,}8 = 506 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, ежедневный прирост купонного дохода увеличивает рыночную цену облигации. Посредством этой увеличенной цены продавец получает накопленный купонный доход, а покупатель при погашении облигации получит ее номинальную стоимость и всю сумму последнего купонного дохода, что составит:

$$500 + \frac{500 \cdot 12}{100} = 560 \text{ тыс. руб.}$$

Для дисконтных облигаций, условия выпуска которых не предполагают выплату процентного дохода текущая стоимость определяется методом дисконтирования по формуле:

$$Ц = Н \bullet \frac{1}{1+nc} \qquad (2.5.19),$$

где n – число лет по истечении которых облигация будет погашена (или число месяцев, выраженное в долях единицы);

c – доходность альтернативных вложений (или ставка рефинансирования), в долях единицы.

Пример 2.5.6. Номинальная стоимость дисконтной облигации 100 тыс. руб., срок обращения 3 года. Доходность альтернативных вложений не изменяется в течение всего периода облигационного займа и составляет 12%. Определим рыночную стоимость облигации на различные даты, если известна сумма, которая будет получена в момент погашения (номинал) и базовая норма доходности.

Цена размещения облигации составит 73,5 тыс. руб. (100 • 1/1+3 • 0,12), через год она будет стоить 80,7 тыс. руб. (100 • 1/1+2 • 0,12), еще через год – 89,3 тыс. руб. (100 • 1/1+1 • 0,12).

Таким образом, если инвестор приобретет данную облигацию, когда до погашения остается 1 год, его доход составит 10,7 тыс. руб. (100–89,3) при условии сохранения прежних процентных ставок.

Если же предположить, что процентная ставка в момент приобретения облигации увеличится до 14%, рыночная цена составит 87,7 тыс. руб., а доход – 12,3 тыс. руб. (100–87,7).

Размер купонного дохода облигаций зависит от принятого метода начисления процентов. Каждый метод использует различные базы начисления, вследствие чего сумма дохода может быть больше или меньше. Так, при использовании метода простых процентов база начисления остается неизменной на протяжении всего срока начисления, т.е. проценты начисляются на первоначальную сумму активов (на номинальную стоимость облигации):

$$C = N \cdot (1 + \frac{r}{100}) \qquad (2.5.20),$$

где С – сумма активов в конечный период;

N – номинальная стоимость облигации;

r – ставка купонного дохода, %.

Если же применяется метод сложных процентов база начисления изменяется, возрастая каждый раз по мере начисления процентов, т.е. каждый раз к основной сумме долга добавляются проценты, начисленные в предыдущем периоде. Процесс с постоянным реинвестированием полученной прибыли носит название капитализации процентов:

$$C = N \cdot (1 + \frac{r}{100})^n \qquad (2.5.21),$$

где С – сумма активов в конечный период;

N – номинальная стоимость облигации;

r – ставка купонного дохода, %.

n – количество купонных периодов.

При использовании методов сложных процентов возникают трудности в исчислении, если имеет место не целое количество периодов, например, при начислении процентов за 2,5 года. В этом случае применяется смешанный метод, при котором сложные проценты начисляются на целое количество периодов (на 2 года), а по простому методу начисляются проценты на неполную часть года (на 0,5 года).

Для владельца облигации недостаточно знать общую сумму дохода, который приносит ему инвестирование средств в эту ценную бумагу. Для того, чтобы можно было провести реальное сравнение полученного дохода с доходом по альтернативным вложениям, ему необходимо рассчитать относительный показатель доходности. Доходность облигации ($Д_х$) определяется как:

$$Д_х = \frac{Д}{Ц_о} \cdot 100\% \qquad (2.5.22)$$

где Д – сумма доходов, полученная по облигации за год;

$Ц_о$ – цена приобретения.

Доходность – это относительный экономический показатель, выражающий доход, приходящийся на единицу затрат.

Применительно к облигациям применяются показатели текущей и конечной доходности.

Текущая доходность ($Д_{хт}$) рассчитывается следующим образом:

$$Д_{хт} = \frac{КД}{Ц_о} \cdot \frac{T}{t} \cdot 100\% \qquad (2.5.23)$$

где $Ц_о$ – цена приобретения облигации;

Т – годовой период, 360 дней;

t – период владения облигацией;

КД – сумма выплаченного купонного дохода.

Пример 2.5.7. Номинальная стоимость облигации 500 тыс. руб., купонная ставка 15% годовых. Инвестор приобрел ее с дисконтом за 450 тыс. руб. Годовая доходность будет равна:

$$\frac{(15\% \cdot 500)/\ 100\%}{450} \cdot 100\% = 16{,}7\%$$

Инвестору также необходимо сравнить доходность данной облигации с доходностью альтернативных вложений для того, чтобы определить, какие действия ему следует предпринять дальше – оставить облигацию у себя или продать ее и вложить деньги в другие ценные бумаги, обеспечивающие большую доходность. Для этого существует показатель рыночной доходности, рассчитываемый по формуле:

$$Д_{хр} = \frac{КД}{Ц_р} \qquad (2.5.24),$$

где КД – сумма выплаченного купонного дохода;

$Ц_р$ – рыночная цена облигации.

Существует несколько методов расчета конечной доходности. Наиболее простой из них заключается в том, что к совокупному текущему доходу добавляется прирост рыночной стоимости облигации за период владения. Конечная доходность рассчитывается по формуле:

$$Д_{хк} = \sum_{i=0}^{I} \frac{КДi + (Ц_1 – Ц_0)}{Ц_о} \bullet \frac{T}{t} \bullet 100\% \qquad (2.5.25)$$

где КД – сумма выплаченного купонного дохода;

i – количество купонных выплат;

Т – годовой период, 360(365) дней;

t – период владения облигацией;

$Ц_о$ – цена приобретения облигации;

$Ц_1$ – цена продажи (погашения) облигации.

Если в приведенном примере срок обращения облигации принять равным трем годам, то конечная доходность при погашении составит 20,4% ((75+75+75+50)/450 • 100 • 360/360 • 3).

При анализе доходности вложений необходимо учитывать не только номинальную доходность, но и ее реальное значение. Реальная доходность учитывает все издержки, понесенные инвестором при проведении данной операции.

Вопросы для самоконтроля

1. Основные операции на фондовом рынке.
2. Сущность понятий «акция» и «облигация».
3. Номинальная стоимость акций и облигаций

4. Виды стоимостных оценок по акциям.

5. Факторы, которые оказывают влияние на рыночную стоимость акций.

6. Виды стоимостных оценок по облигациям.

7. Определение текущей стоимости дисконтной облигации.

8. Показатели, на основе которых рассчитывается текущая и конечная доходность акций и облигаций.

9. Методика расчета доходности акций.

10. Методика расчета доходности облигаций.

Задачи для самостоятельного решения

1. Инвестор приобрел пакет из 240 акций общей стоимостью 12 тыс. ден. ед., номинальной стоимостью одной акции 10 ден. ед. После этого компания провела консолидацию акций по соотношению 4:1.

Определите количество акций в пакете инвестора после консолидации и общую номинальную стоимость пакета.

2. Определите совокупную доходность акции, если известно, что акция приобретена по номинальной стоимости 100 ден .ед. при ставке дивиденда 60% годовых, а рыночная стоимость акции через год после выпуска составила 180 ден. ед.

3. Инвестор приобрел 15 акций номинальной стоимостью 10 ден. ед. по цене 30 ден. ед. за акцию. Через год рыночная цена одной акции составила 45 ден. ед., а инвестор получил дивиденды в размере 6 ден. ед за акцию.

Определите текущую, конечную и совокупную доходность акций.

4. Оценить стоимость купонной облигации, выпущенной на 2 года, номинальная стоимость которой 1000 ден. ед, купонная ставка 16%, рыночная – 20%, а проценты выплачиваются дважды в год.

5. Определить текущую доходность облигации номинальной стоимостью 180 000 ден. ед. и купонным доходом 35 000 ден. ед.

6. Инвестор приобрел облигацию за 85 ден. ед. и продал ее за 60 дней

за 95 ден. ед. Определить совокупную доходность инвестора. Будем считать, что год состоит из 360 дней.

7. Инвестор приобрел облигацию компании А с годовой купонной ставкой 20% и номинальной стоимостью 300 ден. ед по рыночной цене, равной номиналу. Год спустя он приобрел облигацию этой же компании с годовой купонной ставкой 15% и той же номинальной стоимостью.

Определите, по какой цене он приобрел вторую облигацию, если известно, что обе облигации в первый год принесли ему одинаковую совокупную доходность.

8. Инвестор приобрел 13 облигаций номинальной стоимостью 500 рублей, сроком обращения год и по цене 495 ден. ед за 1 облигацию.

Определите совокупную доходность инвестора, если известно, что он будет обладать ими до погашения, а по облигациям установлен процентный доход в размере 7% годовых.

9. Инвестор приобрел 25 облигаций номинальной стоимостью 300 ден. ед. и сроком обращения год, по цене 274 ден. ед. за 1 облигацию.

Определите совокупную доходность облигаций, если известно, что по облигациям установлен процентный доход в размере 10% годовых, ожидаемый уровень инфляции составляет 18%.

10. Инвестор приобрел облигацию компании А с годовой купонной ставкой 17% и номинальной стоимостью 300 ден. ед. по рыночной цене, равной номиналу. Год назад он приобрел облигацию этой же компании с годовой купонной ставкой 20% и той же номинальной стоимостью.

Определите, по какой цене он приобрел первую облигацию, если известно, что обе облигации в первый год принесли ему одинаковую совокупную доходность.

Тема 2.6. Финансовые расчеты в страховании

План

2.6.1. Основные понятия и базовые принципы страхования

Финансовые расчеты в страховании (актуарные расчеты) базируются на двух основных принципах – финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика, учета фактор времени и солидарности застрахованных.

Страховщик – специализированная организация, проводящая страхование,

Страхователь – физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

Учет фактора времени достигается с помощью дисконтирования платежей – приведения их к начальному моменту времени.

Например, пусть страхователь в возрасте x лет заключил договор со страховщиком, согласно которому последний выплатит ему сумму S при достижении возраста $x+n$ лет. Предположим, вероятность дожития до этого возраста равна ${}_n p_x$. Тогда математическое ожидание выплаты составит ${}_n p_x \cdot S$. Поскольку выплаты премии и страховых сумм производятся в разное время, найдем современную стоимость платежа А с учетом вероятности его выплаты с помощью операции дисконтирования:

$$A = {}_n p_x \cdot S \cdot \frac{1}{(1+i)^n}. \qquad (2.6.1)$$

где i - сложная годовая процентная ставка.

Величина А представляет собой математическое ожидание дисконтированной страховой выплаты, то есть актуарную стоимость страховой выплаты. Нетто-премия при страховании на дожитие равна этой величине.

2.6.2. Финансовые потоки в страховании

Совокупность страховых взносов и выплат, производимых в разные моменты времени можно рассматривать как вероятностные потоки платежей. Заранее количество платежей в таких потоках неизвестно, поскольку взносы производятся лишь за живущих участников страхования. Выплаты также получают только живущие (за исключением страхования на случай смерти, когда выплата осуществляется в случае смерти застрахованного лица). Каждый член такого потока связан с некоторой вероятностью дожития. Такой поток обычно называют условным или страховым аннуитетом.

Модель потока платежей, учитывающая все требования к взносам и выплатам, позволяет получить такую важную для актуарных расчетов характеристику, как актуарная стоимость страховых выплат (или взносов).

Под **актуарной стоимостью потока платежей** понимают сумму последовательных платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, с учетом вероятностей их выплат.

2.6.3. Структура тарифной ставки

Для определения размера денежных выплат каждого страхователя, как участника солидарной ответственности, рассчитывается тарифная нетто-ставка, используемая для расчета страхового платежа – основного источника дохода страховщика. Расчет нетто-ставки базируется на оценке вероятности наступления страховых случаев.

Нетто-ставка – основная часть страхового тарифа. Она формирует страховой фонд и устанавливается условиями страхования. Для рисковых видов страхования в состав нетто-ставки включается рисковая надбавка, которая учитывает отклонения возможных выплат от их среднего уровня и формирует запасной фонд.

Страховой и запасной фонд предназначены для расчетов со страхователями: выплаты суммы страховых возмещений, отчислений в резервный фонд, отчислений на предупредительные мероприятия.

Брутто-ставка включает в себя нетто-ставку и нагрузку. Нагрузка обеспечивает расходы на ведение дела и прибыль страховой компании. За счет нагрузки страховщик оплачивает труд работников, содержание помещений и пр. Нагрузка, как правило, составляет 10-20% брутто-ставки. Брутто-ставка может быть рассчитана на основе соотношения:

$$P = \frac{H}{1-f}, \qquad (2.6.2)$$

где P – брутто-ставка;

H – нетто-ставка;

f – доля нагрузки в брутто-ставке.

Условия страхования жизни обычно предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания действия договора страхования или в случае его смерти в течение этого срока.

Вероятность дожить до определенного возраста или окончания срока страхования зависит в первую очередь от возраста в момент страхования и срока действия договора страхования жизни.

Она определяется с помощью таблицы смертности населения. Эта таблица разработана на основе данных демографической статистики (дифференцированно для мужчин и женщин). Таблица содержит конкретные цифры смертности для каждого возраста в расчете на 100000 населения. На основе этих таблиц рассчитывают страховые тарифы.

Возраст человека обозначается символом x, а число лиц, доживающих до возраста x, обозначается l_x. Число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x+1$обозначается символом d_x.

Вероятность умереть в возрасте x лет, не дожив до возраста $x+1$ лет:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \qquad (2.6.3)$$

Например, из 100 000 родившихся женщин до 50 лет доживают 90792 чел. ($l_x = 90792$), до 51 года не доживают 459 чел. ($d_x = 459$), следовательно, вероятность умереть в возрасте 50 лет у женщин:

$$q_{50} = \frac{d_{50}}{l_{50}} = \frac{459}{90792} \approx 0{,}00506.$$

Используя таблицу смертности, страховщик может определить величину страхового фонда, необходимого для выплаты в обусловленные сроки страховых сумм.

Используя метод дисконтирования можно определить его современную стоимость, равную сумме, которую необходимо собрать со страхователей в момент заключения договора страхования.

Страховые взносы могут вноситься единовременно при заключении договора страхования или ежегодно, образуя финансовую ренту. Рассмотрим некоторые случаи определения нетто-ставок.

Условия страхования предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания срока договора. С помощью таблицы смертности устанавливается вероятное число выплат по дожитию застрахованного лица до окончания срока страхования. На основе данных о страховых суммах определяется размер страхового фонда, необходимого для страховых выплат.

Предположим, страхователь в возрасте x лет заключил договор со страховщиком, согласно которому последний выплатит ему сумму S при достижении возраста $x+n$ лет. Обозначим вероятность дожития до этого возраста ${}_n p_x$.

Тогда ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, где l_x - число лиц, заключивших договор страхования в возрасте x лет, l_{x+n} - число лиц, доживших до окончания договора страхования.

Математическое ожидание выплаты составит:

$$ {}_n p_x \cdot S = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S. \qquad (2.6.4) $$

Дисконтируя эту величину по сложной процентной ставке i, определим математическое ожидание дисконтированной страховой выплаты, то есть актуарную стоимость страховой выплаты или величину единовременного взноса (без учета нагрузки):

$$ A = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot (1+i)^n} \cdot S. \qquad (2.6.5) $$

Предположим, $S = 1 руб.$ Тогда единовременная нетто-ставка по страхованию на дожитие определяется по формуле:

$$ {}_n E_x = \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot (1+i)^n}. \qquad (2.6.6) $$

Пример 2.6.1. Страховщик заключил договор страхования с мужчиной 45 летнего возраста на 5 лет на дожитие на сумму 20 000 руб. Необходимо определить единовременную страховую премию при условии, что нагрузка составляет 10%. Страховщик предполагает всю сумму страховых взносов инвестировать под 9% годовых.

Решение:

$S = 20 тыс.руб.$ Согласно таблице смертности $l_{45} = 84204$; $l_{50} = 79519$.

Определим нетто-ставку:

$$ {}_5E_{45} = \frac{79519}{84204} \cdot \frac{1}{1{,}09^5} = \frac{0{,}9444}{1{,}5386} = 0{,}6138 \textit{руб. на 1 руб. страховой суммы.} $$

Найдем брутто-ставку, учитывая, что нагрузка $f = 0{,}1$ по формуле (2.6.2):

$$ P = \frac{0{,}6138}{1 - 0{,}1} = 0{,}682 $$

Следовательно, величина единовременного взноса составит: $A = 20000 \cdot 0{,}682 = 13640 \textit{руб.}$

При единовременном взносе страхователь сразу при заключении договора погашает свои обязательства перед страховщиком и в дальнейшем не производит никаких дополнительных взносов.

Единовременная нетто-ставка на случай смерти является наиболее распространенным. Страховая сумма, равная S выплачивается в случае смерти застрахованного. Допустим договор заключен в возрасте x лет. Если застрахованный умрет на первом году страхования, а выплата страховых сумм наследникам производится в конце года наступления страхового события, то с учетом его вероятности современная величина выплаты (на момент заключения договора) составит:

$$ q_x \cdot \frac{S}{1+i} = \frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{S}{1+i}. $$

Если страховой случай наступит во втором году, то современная величина выплаты равна: $\frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{S}{(1+i)^2}$, и т.д.

Единовременную нетто-ставку в расчете на 1 руб. страховой суммы ($S = 1$) определим на основе принципа эквивалентности обязательств, в соответствии с которым искомая сумма должна быть равна математическому ожиданию суммы страховых выплат:

$$ {}_nA_x = \frac{d_k}{l_k} \cdot \frac{1}{1+i} + \frac{d_{k+1}}{l_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{d_{k+n-1}}{l_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{l_x}\left[\frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right] \quad (2.6.7) $$

где $d_{k,} d_{k+1}, \ldots, d_{k+n-1}$ – количество умирающих в течение срока страхования.

При смешанном страховании на дожитие и на случай смерти совокупная нетто-ставка определяется по формуле:

$$T_n = {}_nE_x + {}_nA_x \tag{2.6.8}$$

Пример 2.6.2. Определить единовременную нетто-ставку и страховую премию для мужчины 55 летнего возраста, оформляющего страховку на случай своей смерти сроком на 5 лет на сумму 10 тыс. руб. Страховая компания предполагает поместить страховую сумму под 9% годовых. Нагрузка составляет 12%.

Решение:

Выберем из таблицы смертности число умерших в интервале от 55 до 59 лет;

$$d_{55} = 1462; d_{56} = 1532; d_{57} = 1610; d_{58} = 1695; d_{59} = 1783, l_{55} = 73212.$$

$${}_5A_{55} = \frac{1}{73212} \cdot \left[\frac{1462}{1+0{,}09} + \frac{1532}{1{,}09^2} + \frac{1610}{1{,}09^3} + \frac{1695}{1{,}09^4} + \frac{1783}{1{,}09^5} \right] =$$

$$= \frac{1}{73212} \cdot (1341{,}28 + 1289{,}45 + 1243{,}22 + 1200{,}78 + 1158{,}83) = \frac{6233{,}56}{73212} = 0{,}08514 \, руб.$$

Учитывая, что нетто-ставка составляет 0,08514 рублей, а нагрузка $f = 0{,}12$, определим брутто-ставку:

$$P = \frac{0{,}08514}{1-0{,}12} = 0{,}09675.$$

Величина единовременного взноса составит:

$$S \cdot {}_5A_{55} = 10000 \cdot 0{,}09675 = 967{,}5 \, руб.$$

При расчете единовременной нетто-ставки предполагается, что сумма подлежащих оплате взносов погашаются единовременно в момент заключения договора о страховании. Однако чаще всего страхователи предпочитают платить взносы в течение всего срока страхования. В связи с этим возникает необходимость расчета годичных нетто-ставок.

Единовременная нетто-ставка отличается по величине от годичной ставки по ряду причин. Во-первых, при единовременной уплате страхового взноса он может быть сразу после его поступления инвестирован под проценты. Годичные же взносы поступают постепенно, в связи с чем сумма начисленных процентов будет значительно меньше, чем при единовременном взносе. В результате страховщик получит меньший страховой фонд. Во-вторых, страховой фонд выплачивают все лица, заключившее страховой договор, а при годичной уплате ряд страхователей прекратит взносы в результате своей смерти.

Следовательно, при расчете годичной нетто-ставки необходимо учитывать частичную потерю сумм и снижение числа платежей в результате смерти некоторой части застрахованных.

Предположим, что все мужчины, достигшие возраста x лет, обязались в конце каждого страхового года вносить страховой компании 1 руб. в течение n лет. Тогда в конце первого года будет внесено $l_{x+1} \cdot 1$ *руб.*

Современная стоимость этой суммы составит $\frac{l_{x+1}}{1+i}$, где i - норма накопления данной страховой компании. Во втором году современная стоимость взносов составит $\frac{l_{x+2}}{(1+i)^2}$, в третьем - $\frac{l_{x+3}}{(1+i)^3}$, в n году - $\frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}$.

Таким образом, современная стоимость финансовых обязательств страховщика, относящихся ко всем l_x лицам выразится суммой:

$$\frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^2} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}.$$

Для получения современной стоимости финансовых обязательств по отношению к одному лицу, то есть годичной нетто-ставки, эту сумму необходимо поделить на l_x - число лиц, заключивших договор:

$${}_n a_x = \frac{\frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^2} + .\frac{l_{x+3}}{(1+i)^n} + ..+ \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}}{l_x} \qquad (2.6.9)$$

Значение ${}_n a_x$ можно рассматривать как коэффициент рассрочки. Зная его значение, можно определить годичный взнос по формуле:

$$_{n}P_{x}=\frac{_{n}E_{x}}{_{n}a_{x}}. \quad ,$$

Здесь $_{n}E_{x}$ - единовременная нетто-ставка.

Пример 2.6.3. Мужчина в возрасте 45 лет, заключил договор по смешанному страхованию жизни сроком на 3 года. Страховая сумма составляет 25 тыс. руб. Норма доходности страховой компании - 8%. Доля нагрузки в брутто-ставке 10%. Определите единовременную брутто-ставку и брутто-премию; коэффициент рассрочки и величину годичного взноса.

Решение: $n=45\textit{лет}; x=3\textit{года}; S=25\textit{тыс.руб.}; i=0{,}08; f=0{,}1.$

1) Определим нетто-ставку на дожитие по формуле:

$$_{x}E_{n}=\frac{l_{x+n}}{l_{x}}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n}}.$$

$$_{3}E_{45}=\frac{l_{48}}{l_{45}}\cdot\frac{1}{(1+0{,}08)^{3}}=\frac{81208}{84379}\cdot 0{,}794=0{,}764\textit{руб.}$$

Таким образом, нетто-ставка на дожитие составляет 76,4 руб. со 100 рублей страховой суммы.

2). Определим нетто-ставку на случай смерти по формуле:

$$_{n}A_{x}=\frac{1}{l_{x}}\left[\frac{d_{x}}{1+i}+\frac{d_{x+1}}{(1+i)^{2}}+...+\frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^{n}}\right]$$

$$_{3}A_{45}=\frac{1}{l_{45}}\left[\frac{d_{45}}{1+i}+\frac{d_{46}}{(1+i)^{2}}+\frac{d_{47}}{(1+i)^{3}}\right]=\frac{1}{84379}\left[\frac{994}{1+0{,}08}+\frac{1058}{1{,}08^{2}}+\frac{1119}{1{,}08^{3}}\right]=$$

$$=\frac{1}{84379}(920{,}37+907{,}06+888{,}30)=\frac{2715{,}73}{84379}=0{,}032\textit{руб.}$$

Следовательно, нетто-ставка на случай смерти составляет 3 руб.20 коп. со 100 руб. страховой суммы.

3). Нетто-ставка при смешанном страховании жизни:

$$T_{n}={}_{3}E_{45}+{}_{3}A_{45_{x}}=0{,}764+0{,}032=0{,}796\,\textit{руб.}$$

4) Определим единовременную брутто-ставку:

$$T_{b}=\frac{T_{n}\cdot 100}{100-f}=\frac{0{,}796\cdot 100}{90}=0{,}8844$$

5) Брутто-премия составит $T_{b}\cdot S=0{,}8844\cdot 25000=22110\textit{руб.}$

6). Определим коэффициент рассрочки:

$$ {}_n a_x = \frac{\frac{l_{x+1}}{1+r} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{l_{x+n}}{(1+r)^n}}{l_x} = {}_3 a_{45} = \frac{\frac{83385}{1{,}08} + \frac{82327}{1{,}08^2} + \frac{81208}{1{,}08^3}}{84379} = $$

$$ = \frac{77208{,}3 + 70582{,}1 + 64465{,}5}{84379} = \frac{212255{,}9}{84379} = 2{,}5155. $$

7). Учитывая, что единовременный взнос или брутто-премия составляет 22110 руб., определим годичный взнос:

$$ \frac{22110}{2{,}5155} = 8789{,}51 \textit{руб.} $$

Таким образом, при выплате в рассрочку за 3 года страхователем будет уплачено 26368,52 руб.

Вопросы для самоконтроля

1. Основные понятия и базовые принципы страхования.
2. Финансовые потоки в страховании.
3. Структура тарифной ставки.
4.Страхование жизни.
5. Методы построения страховых тарифов.
6. Определение единовременной нетто-ставки по дожитию.
7. Единовременная нетто-ставка на случай смерти.
8. Расчет годичной нетто-ставки.
9. Расчет брутто-ставки.
10. Актуарная стоимость потока платежей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Страховая организация проводит страхование от несчастных случаев. Вероятность наступления несчастного случая – 0,05. Средняя страховая сумма – 80 тыс. руб. Среднее страховое возмещение – 30 тыс. руб. Количество заключенных договоров – 6000. Доля нагрузки в тарифной ставке -24%. Среднеквадратическое отклонение – 8 тыс. руб. Требуется рассчитать

страховой тариф при гарантии безопасности 0,95.

2. Определить брутто-ставку при страховании имущества юридических лиц на основе страховой статистики за 5 лет с учетом прогнозируемого уровня убыточности страховой суммы на следующий год (при заданной гарантии безопасности 0,9):

Показатель	Годы				
	1	2	3	4	5
Фактическая убыточность страховой суммы (в %)	2,8	3,2	3,1	3,4	3,6

3. Определить брутто-ставку при страховании имущества юридических лиц на основе страховой статистики за 5 лет с учетом прогнозируемого уровня убыточности страховой суммы на следующий год (при заданной гарантии безопасности 0,9):

Показатель	Годы				
	1	2	3	4	5
Фактическая убыточность страховой суммы (в %)	0,18	0,26	0,29	0,36	0,39

Нагрузка в брутто-ставке составляет 22%.

4. Страховая организация проводит страхование от несчастных случаев. Вероятность наступления несчастного случая – 0,07. Средняя страховая сумма –50 тыс. руб. Среднее страховое возмещение – 15 тыс. руб. Количество заключенных договоров – 4000. Доля нагрузки в тарифной ставке -14%. Среднеквадратическое отклонение – 3 тыс. руб. Требуется рассчитать страховой тариф при гарантии безопасности 0,97.

5. Определить брутто-ставку при страховании имущества юридических лиц на основе страховой статистики за 5 лет с учетом прогнозируемого уровня убыточности страховой суммы на следующий год (при заданной гарантии безопасности 0,7):

Показатель	Годы				
	1	2	3	4	5
Фактическая убыточность страховой суммы (в %)	1,8	2,2	3,5	2,4	3,9

6. Определить брутто-ставку при страховании имущества юридических лиц на основе страховой статистики за 5 лет с учетом прогнозируемого уровня убыточности страховой суммы на следующий год (при заданной гарантии безопасности 0,95 и нагрузке в брутто-ставке 12%):

Показатель	Годы				
	1	2	3	4	5
Фактическая убыточность страховой суммы (в %)	0,15	0,28	0,19	0,16	0,27

7. Мужчина в возрасте 60 лет заключает страховой до_говор на получение ежегодно дополнительной пенсии:

а) до достижения 70 лет на сумму 500 руб.;

б) выплаты пожизненные (500 руб.).

Рассчитайте единовременную нетто-ставку и страховую сумму для ренты пренумерандо. Страховая компания использует годовую ставку – 9%.

8. Рассчитать единовременные нетто-ставки в связи:

а) с дожитием;

б) на случай смерти для мужчины в возрасте (30+n) лет сроком на пять лет.

Используя коэффициент рассрочки, рассчитать годичные нетто-ставки в связи: а) с дожитием; б) на случай смерти.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Финансовые потоки и их роль в финансовых расчетах.
2. Функции полезности дохода и их применение при принятии финансовых решений.
3. Задачи и основные цели актуарной математики.
4. Временная стоимость денег.
5. Простая финансовая сделка.
6. Наращение по простой процентной ставке.
7. Простая учетная ставка.
8. Сложная процентная ставка.
9. Банковский учет векселя.
10. Начисление сложных процентов несколько раз в год.
11. Эффективная ставка.
12. Финансовая эквивалентность платежей.
13. Математическое дисконтирование.
14. Эквивалентность различных ставок.
15. Непрерывное начисление процентов.
16. Виды денежных потоков.
17. Наращенная сумма денежного потока.
18. Современная сумма денежного потока.
19. Финансовая эквивалентность денежных потоков.
20. Эффективная ставка денежного потока.
21. Методы расчета эффективной ставки денежного потока.
22. Постоянная и переменная рента и их анализ.
23. Непрерывные денежные потоки.
24. Показатели эффективности доходности финансовых операций.
25. Определение эффективной процентной ставки для финансовых расчетов.
26. Расчет средней процентной ставки.

27. Учет фактора инфляции в финансовых расчетах.
28. Определение реальной доходности финансовой операции.
29. Виды финансовых рисков.
30. Измерители риска.
31. Дисперсия.
32. Коэффициент вариации.
33. Планирование погашения задолженности.
34. Потребительский кредит.
35. Ипотечный кредит.
36. Погашение основного долга равными платежами.
37. Погашение займа одним платежом в конце срока.
38. Погашение основного долга одним платежом в конце срока.
39. Погашение основного долга равными выплатами.
40. Погашение займа равными годовыми выплатами.
41. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год.
42. Формирование погасительного фонда.
43. Методы оценки эффективности инвестиционных проектов.
44. Выбор оптимального портфеля инвестиционных проектов.
45. Случайная величина доходности портфеля акций.
46. Ожидаемая доходность портфеля акций.
47. Оценка риска портфеля акций.
48. Оптимальный портфель акций.
49. Оценка доходности портфеля производных финансовых инструментов.
50. Основные понятия и базовые принципы страхования.
51. Финансовые потоки в страховании.
52. Структура тарифной ставки.
53. Как производится начисление процентов и погашение долга в потребительском кредите?
54. Финансовое событие и финансовый поток.

55. Параметры простой кредитной сделки.
56. Актуарный метод погашения задолженности частями.
57. Начисление процентов и погашение долга в потребительском кредите.
58. Формула сложных процентов.
59. Номинальная и эффективная процентные ставки. Связь между ними.
60. Простая кредитная сделка.
61. Правило торговца при погашении задолженности частями.
62. Начисление процентов и погашение долга в потребительском кредите.
63. Срок ссуды и процентной ставки в схеме сложных процентов.
64. Сущность германской, французской и английской практик начисления процентов.
65. Консолидированный платеж.
66. Объединение рент.
67. Отложенная рента и вечная рента.
68. Финансовая рента: постнумерандо и пренумерандо.
69. Инфляция: показатели и их связь.
70. Риск и доходность портфельных инвестиций.
71. Сущность понятия «облигация». Курс облигации.
72. Основные виды облигаций.
73. Доход от облигаций.
74. Основные характеристики рынка ценных бумаг.
75. Эффективность портфеля рыночных ценных бумаг.

ОБРАЗЦЫ ИТОГОВЫХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант №1.

1. Кредит в размере 5 000 000 ден. ед. выдан 15 января до 17 октября не высокосного года включительно под 15% годовых. Определите сумму долга в конце срока? Найдите решение тремя практиками расчета.

2. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс .руб. Кредит выдан под 16% годовых (простые проценты). Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

3. На депозитный счет в течение четырех лет ежегодно вносится сумма 50 тыс. руб. Схема постнумерандо. Проценты начисляются по сложной ставке 8% годовых. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

4. Два вклада по 120 000 ден. ед. были размещены на 4 года под 10% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 5%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

5. При вложении капитала в мероприятие А из 120 случаев прибыль в 25 тыс. р. может быть получена в 48 случаях; 20 тыс. р. в 36 случаях; 30 тыс. р. в 36 случаях. При вложении капитала в мероприятие Б из 100 случаев прибыль в 40 тыс. р. может быть получена в 30 случаях; 30 тыс. р. в 50 случаях; 15 тыс. р. в 20 случаях. Определить среднее ожидаемое значение прибыли от вложения в мероприятие А и в мероприятие Б; дисперсию по мероприятию А и по мероприятию Б; среднее квадратическое отклонение по мероприятию А и по мероприятию Б; коэффициент вариации по мероприятию А и по мероприятию Б. Определить, в какое мероприятие выгоднее вкладывать денежные средства: в мероприятие А или в мероприятие Б?

Вариант №2.

1. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие – процентная ставка 10% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определите наращенную сумму за год, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 500 000 ден. ед.

2. При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно и поквартально?

3. Сумма в 500 тыс. руб. выплачивается через 5 лет. Определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых.

4. Первоначальная сумма вклада составляет 6 000 ден. ед. Вклад размещен на 3 года под 14 % годовых с ежемесячной капитализацией. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7%. Определите наращенную сумму денег с учетом инфляции.

5. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 100 тыс. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 24% годовых. Определить величину фонда на конец срока.

Вариант №3.

1. Вкладчик разместил в банк депозит в размере 600 000 ден. ед. Какова будет наращенная сумма вклада за 5 месяцев, если за первый месяц начисляются простые проценты в размере 8% годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5% с одновременной капитализацией процентного дохода?

2. Имеется обязательство погасить за два года долг в сумме 100 тыс. руб. Кредитор согласен получать частичные платежи: 50 тыс. руб. через полгода после начала договора, 20 тыс. руб. через год и оставшуюся часть долга в конце срока договора. На долг начисляются простые проценты по ставке 10% годовых. Определить размер последнего платежа.

3. В пенсионный фонд в конце каждого квартала вносится сумма 13 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по номинальной ставке 10% годовых. Определить сумму, накопленную в фонде за 20 лет.

4. Постоянный темп инфляции составляет 5% в месяц. Во сколько раз возрастут цены за год? Какова годовая инфляция?

5. На расчетный счет в течение 5 лет в конце каждого года поступает по 100 тыс. руб., на которые ежеквартально начисляются проценты по сложной годовой ставке в 24% годовых. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Вариант №4.

1. Какой величины достигает долг, равный 100 тыс. руб. через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых? Проценты начисляются поквартально.

2. Существует обязательство произвести платежи через 7 лет; первоначальная сумма долга 9 млн. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 12%. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено следующим образом: через 3 года производится выплата 1500 тыс. руб., через следующие три года выплата 3800 тыс. руб.; остальной долг гасится через 9 лет после начала обязательства. Необходимо определить сумму окончательного платежа.

3. В пенсионном фонде на взносы, вносимые в конце года, начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых. Определить размер ежегодных взносов, необходимых для накопления суммы 500 тыс. руб., через 10 лет.

4. Определено, что доходность коммерческого банка по вкладам «до востребования» должна быть 5% годовых. Известно, что годовой темп инфляции составляет 11% годовых. Определите процентную ставку по данным вкладам.

5. На расчетный счет в течение 5 лет в конце каждого полугодия поступают платежи равными долями из расчета 100 тыс. руб. в год, на которые в конце года начисляются проценты по сложной ставке в 24% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Вариант №5.

1. Какой капитал нужно вложить сегодня, чтобы он вместе с 8% годовых в течение 10 лет и 8 месяцев увеличился на 60 000 ден. ед?

2. Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 17% (Тгод=365), не изменяя финансовых последствий. Срок операции 560 дней.

3. На сумму 100 тыс. руб. в течение трех лет начисляются сложные проценты по номинальной ставке 10% годовых. Ежегодная инфляция составляет 15, 12 и 9%. Определить наращенную сумму с учетом ее обесценивания.

4. Срок ссуды – 5 лет, процентная ставка в первые два года 12,5% годовых и 12,75% в оставшиеся три года. Определить множитель наращения.

5. Кредит в размере 300 тыс. руб. выдан на 2 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых (временная база – 365 дней). Определить сумму на конец срока. Расчет провести двумя методами.

Вариант №6.

1. Вексель выдан на сумму 1 млн. руб. с уплатой 17.11.2008 г. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2008 г. по простой учетной ставке 20% (365/360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Определить полученную при учете сумму и дисконт.

2. Платежи в 10 и 25 млн. руб. со сроками уплаты два и три года объединяются в один платеж - 35 млн. руб. Определить срок консолидированного платежа при условии, что используется сложная ставка процентов, равная 24% годовых.

3. Определить современную стоимость ренты с параметрами р = 4 при условии, что наращенная сумма составляет 250 тыс. руб., процентная ставка = 24% годовых, проценты начисляются ежеквартально.

4. Ссуда в размере 1 000 ден. ед. получена предприятием на срок 5 лет. Проценты начисляются по сложной ставке, равной 18% годовых. Расчетный темп инфляции 11% в год. Определите реальную доходность инвестора по данной операции, а также его реальный доход.

5. Кредит 8000 рублей необходимо погасить за 3 года: единовременным платежом, равными частями, равными срочными частями. Погашение равными частями и равными срочными частями будет проводиться ежегодно. Ставка 16% годовых. Провести сопоставительный анализ по всем кредитам.

Вариант №7.

Какую сумму нужно проставить в векселе, если сумма долга составляет 1 млн. руб., срок договора 258 дней (365/360). Применяется простая учетная ставка 18% годовых.

2. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. (365/365). Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки простого процента.

3. Суммы в размере 10, 20 и 15 тыс. руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом 45 тыс. руб. Определить срок выплаты заменяющего платежа. При сравнении платежей применяется ставка простых процентов 10% годовых (К = 365 дней).

4. На сумму 15 тыс. руб. в течение трех месяцев начисляются простые проценты по номинальной ставке 28% годовых. Ежемесячная инфляция составляет 2,5; 2,0 и 1,8%. Определить наращенную сумму с учетом ее обесценивания.

5. В течение 5 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 100 тыс. руб. в год, на которые ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 24% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Вариант №8.

1. Какой величины достигает долг, равный 100 тыс. руб. через 5 лет при росте по простой и сложной ставке 15,5% годовых? Сделайте выводы.

2. Три платежа 5 тыс. руб. со сроком 130дней, 3 тыс. руб. со сроком 165 дней и 8 тыс. руб. со сроком 320 дней заменяются одним со сроком 250 дней. Стороны договорились об использовании простой процентной ставки 20% годовых. Определить сумму консолидированного платежа при базе K = 365.

3. На расчетный счет в течение 5 лет в конце каждого полугодия поступают платежи равными долями из расчета 100 тыс. руб. в год, на которые в конце года начисляются проценты по сложной ставке 24% годовых. Определить современную величину ренты.

4. В банке взяли ссуду 100 000 рублей в момент времени t_1 (13.11.2020 г.). Какая сумма долга будет на момент t_2 (07.08.2021 г.), если проценты простые по ставке i = 12% и расчеты ведутся по схеме:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

5. Кредит в сумме 100 тыс. руб. выдан на срок 5 лет. За кредит выплачиваются проценты по ставке 10% годовых. Определить размер срочных уплат и составить график погашения кредита для различных схем погашения.

ГЛОССАРИЙ

Аннуитет (финансовая рента) – однонаправленный денежный поток с равными временными интервалами;

Аннуитет бессрочный – аннуитет, число элементов которого может быть неограниченно большим (в том числе достаточно большим).

Аннуитет отсроченный – аннуитет, начало первого периода которого сдвинуто вправо по временной оси от момента, на котором происходит анализ.

Аннуитет переменный – аннуитет с неравными элементами.

Аннуитет постнумерандо – аннуитет, каждый элемент которого имеет место в конце соответствующего периода.

Аннуитет постоянный – аннуитет, элементы которого равны между собой.

Аннуитет пренумерандо – аннуитет, каждый элемент которого имеет место в начале соответствующего периода.

Аннуитет срочный – аннуитет, число периодов которого ограничено.

Антисипативное начисление процентов – начисление процентного платежа, осуществляемое в начале каждого расчетного периода.

Брутто-ставка процента – любая процентная ставка, превышающая номинальную; как правило, является положительной процентной ставкой.

Будущая стоимость – стоимость в некоторый момент времени, рассматриваемая с позиции будущего, при условии ее наращения по некоторой ставке.

Будущая стоимость денежного потока – сумма всех наращенных элементов этого потока.

Вексель – письменное долговое обязательство строго установленной законом формы, выдаваемое заемщиком (векселедателем) кредитору (векселедержателю), предоставляющее последнему право требовать с заемщика уплаты к определенному сроку суммы денег, указанной в векселе.

Девизы – платежные средства (чаще в иностранной валюте), при помощи которых осуществляются международные расчеты; к девизам относятся переводы, чеки, аккредитивы, векселя, иностранные банкноты и иностранные монеты.

Декурсивное начисление процентов – начисление процентного платежа, осуществляемое в конце каждого расчетного периода.

Денежный поток – множество распределенных во времени выплат (оттоков) и поступлений (притоков), понимаемых в широком смысле; в качестве элемента денежного потока могут выступать доход, расход, прибыль, платеж и др.

Дефляция – процесс, характеризующийся снижением общего уровня цен в экономике.

Дивиденд – часть распределяемой среди акционеров прибыли компании, приходящаяся на одну акцию.

Дивизор (процентный ключ, постоянный делитель) – отношение принятого числа дней в году к процентной ставке; численно равен такому количеству рублей, с которого при данной процентной ставке получается 1 руб. дохода в день.

Дисконт – а) доход, полученный по учетной ставке; б) процент, взимаемый банком при учете векселей; в) собственно учетная ставка; г) скидка (например, с цены товара, с конечной суммы долга и т.п.)

Дисконтирование – процесс, обратный наращению, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка.

Дисконтирование банковское – дисконтирование, осуществляемое по учетной ставке.

Дисконтирование математическое – дисконтирование, осуществляемое по процентной ставке.

Индекс потребительских цен – отношение стоимости потребительской корзины в данный период времени к стоимости той же корзины в некотором базовом периоде.

Индекс цен – отношение стоимости определенного набора товаров и услуг в данный период времени к стоимости того же набора в базовом периоде.

Инфляция – процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или, что эквивалентно, снижением покупательной способности денег.

Маржа – величина, выражающая разность между двумя определенными показателями (например, между ценой покупателя и продавца); с помощью маржи можно характеризовать плавающую процентную ставку, когда фиксируется не сама ставка, а изменяющаяся во времени ее база и маржа – величина (постоянная или переменная) надбавки к базе.

Множитель наращения – величина, показывающая, во сколько раз вырос первоначальный капитал.

Модель нулевого роста – метод оценки финансового актива исходя из предположения о неизменности генерируемого им дохода.

Модель постоянного роста –метод оценки финансового актива исходя из предположения о постоянстве темпа прироста генерируемого им дохода (чаще всего применяется в приложении к акциям).

Наращение – процесс увеличения суммы первоначального капитала за счет присоединения начисленных процентов.

Наращенная сумма – сумма первоначального капитала и начисленных на него процентов; получается в результате осуществления процесса наращения.

Номинальная процентная ставка – исходная базовая (как правило, годовая) процентная ставка, указываемая в договорах; доходность, выражаемая этой ставкой, не скорректирована на инфляцию.

Норма прибыли – отношение прибыли к исходному капиталу, являющемуся источником ее генерирования (чаще всего измеряется в процентах); в финансовых вычислениях норму прибыли нередко называют доходностью.

Объекты и предметы страхования – подлежащие страхованию материальные ценности, в личном страховании – жизнь, здоровье и трудоспособность страхователя.

Период ренты – это величина постоянного временного интервала между двумя его последовательными элементами называется периодом аннуитета.

Плавающая процентная ставка – процентная ставка, величина которой пересматривается в течение времени начисления процентов.

Положительная процентная ставка – ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции.

Потребительский кредит – кредит, который предоставляет банк, финансовая компания или розничный торговец отдельному индивидууму на потребительские цели.

Приведенная стоимость – величина, найденная в результате процесса дисконтирования.

Приведенная стоимость денежного потока – сумма всех дисконтированных элементов этого потока.

Процент (процентные деньги) – величина дохода от предоставления в долг некоторой денежной суммы.

Проценты обыкновенные – проценты, определяемые исходя из приближенного числа дней в году, квартале и месяце (соответственно 360, 90, 30).

Проценты точные – проценты, определяемые исходя из точного числа дней в году (365 или 366), в квартале (от 89 до 92), в месяце (от 28 до 31).

Реальная процентная ставка – процентная ставка, исчисляемая в условиях элиминирования влияния инфляции; реальная процентная ставка всегда меньше номинальной за счет негативного влияния инфляции.

Реинвестирование – вложение доходов в некоторый проект производственного или финансового характера с намерением получить на них в дальнейшем дополнительный доход.

Ставка – отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу, выраженное в десятичных дробях или процентах.

Ставка дисконтирования – ставка, используемая для расчета приведенной стоимости; в качестве ставки дисконтирования может использоваться как учетная, так и процентная ставка.

Ставка наращения – ставка, используемая для расчета будущей стоимости; в качестве ставки наращения может использоваться как учетная, так и процентная ставка.

Ставка процентная – отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала.

Ставка учетная (дисконтная) – отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к ожидаемой к получению (возвращаемой) сумме денежных средств.

Ставка эффективная – годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и начисление процентов несколько раз в год по номинальной ставке, деленной на число периодов начисления.

Ставки эквивалентные – ставки, приводящие к одному финансовому результату при едином первоначальном капитале и одном сроке инвестирования.

Страхование пенсии – это вид личного страхования, по которому страховщик обязуется платить застрахован_ному лицу в установленные сроки регулярный доход.

Страхователь – физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

Страховая сумма – сумма денежных средств, на которую фактически застрахованы имущество, жизнь, здоровье.

Страховой тариф (нетто-ставка) – процентная ставка от совокупной страховой суммы. Она служит основой для формирования страхового фонда.

Страховщик – специализированная организация, проводящая страхование.

Схема начисления простых процентов – процесс начисления процентов, предполагающий неизменность базы, с которой эти проценты начисляются.

Схема начисления сложных процентов – процесс начисления процентов, предполагающий их капитализацию.

Учет векселя – покупка векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю в конце срока

Член ренты – это любой элемент денежного потока называется членом аннуитета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Основы финансовых вычислений» направлено на формирование у обучающихся целостного восприятия и приобретения ими практических навыков в вопросах количественного финансового анализа.

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с программой курса, охватывает все содержательные разделы, предусмотренные рабочей программой. Предложенный теоретический материал и практические задания предоставят возможность сформировать у обучающихся современные фундаментальные знания в области финансов и финансовых вычислений.

После каждой темы в учебно-методическом пособии предоставляются вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения. В учебно-методическом пособии приведен глоссарий и список рекомендованных источников, которые помогут закрепить учебный материал и овладеть более глубокими знаниями в области финансов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие поможет обучающимся успешно освоить учебную дисциплину «Основы финансовых вычислений» и, таким образом, заложить теоретический фундамент для дальнейшей практической деятельности.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Альжанова, Н. Ш. Финансовая математика : учебное пособие / Н. Ш. Альжанова. – Алматы : Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2013. – 106 с. – Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/59910.html

2. Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: учеб. пособие / Л.О. Бабешко. – М.: КНОРУС, 2016. – 224 с.

3. Балабанов, И.Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту / И.Т. Балабанов. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 78 с.

4. Бергер, Ф. Что Вам надо знать об анализе акций / Пер. с нем. - М.: АОЗТ «Интерэксперт»; ЗАО «Финстатинформ», 1998. – 206 с.

5. Бочаров, П.Л. Финансовая математика: учеб. / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002. – 623 с.

6. Бурда, А. Г. Основы финансовых вычислений : учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки бакалавриата «Экономика» / А. Г. Бурда. – Краснодар, Саратов : Южный институт менеджмента, Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 104 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/78039.html

7. Бурда, А. Г. Финансовые вычисления : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 080105.65 «Финансы и кредит», 080109.65 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080507.65 «Менеджмент организации» / А. Г. Бурда. – Краснодар : Южный институт менеджмента, 2013. – 57 с.

8. Бухвалов, А.В.. Финансовые вычисления для менеджеров: учеб. пособие / А.В. Бухвалов, В.В. Бухвалова; Высшая школа менеджмента СПбГУ. – 3-е изд., испр. и доп. – СПб.: Высшая школа менеджмента, 2010. – 368 с.

9. Быстров, А. И. Практикум по финансовой математике : учебное пособие для студентов финансово-экономических специальностей /

А. И. Быстров. – Уфа : Башкирский институт социальных технологий (филиал) ОУП ВО «АТиСО», 2013.

10. Ващенко, Т.В. Математика финансового менеджмента / Т.В. Ващенко. – М.: Перспектива, 2006. – 82 с.

11. Веретенников, А. Ю. Некоторые главы анализа и приложение к финансовой математике / А. Ю. Веретенников, Е. В. Веретенникова. – Москва : Прометей, 2016. – 60 с. // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/58156.html

12. Выгодчикова, И. Ю. Методы финансовых вычислений : учебное пособие / И. Ю. Выгодчикова. – Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2019. – 131 с.

13. Выгодчикова, И. Ю. Финансовая математика : учебное пособие / И. Ю. Выгодчикова. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2020. – 149 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/96562.html

14. Долгополова, А. Ф. Финансовая математика в инвестиционном проектировании : учебное пособие / А. Ф. Долгополова, Т. А. Гулай, Д. Б. Литвин. — Ставрополь : Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2014. – 55 с.

15. Донченко, Я. А. Основы финансовых вычислений : курс лекций / Я. А. Донченко. – Симферополь : Университет экономики и управления, 2020. – 190 с. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/101400.html

16. Едронова В.Н., Мезиковский Е.А. Учет и анализ финансовых активов: акции, облигации, векселя. М..: Финансы и статистика, 2005. – 272 с.

17. Ефимова, М.Р. Общая теория статистики: учебник / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 416 с.

18. Зверькова, Т. Н. Финансовые вычисления в банковском деле : учебное пособие / Т. Н. Зверькова, И. В. Горина. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011. – 118 с. – Текст :

электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/30139.html

19. Инвестиционное проектирование: основы теории и практики : учебное пособие / А. П. Москаленко, С. А. Москаленко, Р. В. Ревунов, Н. И. Вильдяева. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 376 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/106728

20. Каледин, С. В. Финансовый менеджмент. Расчет, моделирование и планирование финансовых показателей : учебное пособие для вузов / С. В. Каледин. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 520 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/189433.

21. Капитоненко, В.В. Финансовая математика и ее приложения: Учебно- практическое пособие для вузов. - М.: «Издательство ПРИОР», 1998. – 150 с.

22. Касимов, Ю.Ф. Основы финансовых вычислений. Основные схемы расчета финансовых сделок : учебник / Касимов Ю.Ф., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н. — Москва : КноРус, 2021. – 328 с. – URL: https://book.ru/book/936099

23. Кирлица, В.П. Финансовая математика: рук. к решению задач: учеб. пособие / В.П. Кирлица. – Минск.: ТетраСистемс, 2015. – 192 с.

24. Ковалев, В. В. Курс финансовых вычислений: учеб. / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2015. – 560 с.

25. Ковалев, В.В. Сборник задач по финансовому анализу: учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 128 с.

26. Ковалев, В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. – Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – М., Финансы и статистика, 2009. – 432 с.

27. Кочович, Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер. с серб. / Предисл. Е.М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 2017. – 268 с.

28. Кочович, Е. Финансовая математика с задачами и решениями: учеб.-метод. пособие / Е. Кочович; [Пер. с серб. д.э.н., проф. Е. Кочович]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2014. – 379 с.

29. Красина, Ф. А. Финансовые вычисления : учебное пособие / Ф. А. Красина. – Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2015. – 190 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/72212.html

30. Криничанский, К.В. Математика финансового менеджмента: учебное пособие. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2016. – 185 с.

31. Криничанский, К. В. Основы финансовых вычислений : учебник / К. В. Криничанский. — Москва : Прометей, 2019. — 392 с. — ISBN 978-5-907166-02-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/94480.html

32. Кузнецов, Б. Т. Финансовая математика: Учебное пособие для вузов – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 245 с.

33. Лётчиков, А. В. Лекции по финансовой математике / А. В. Лётчиков. – Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. – 236 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/91950.html

34. Лукасевич, И.Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений.: Учебное пособие для вузов. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 2008. – 400 с.

35. Лукашин, Ю. П. Финансовая математика : учебное пособие / Ю. П. Лукашин. – Москва : Евразийский открытый институт, 2008. – 200 с. – ISBN 978-5-374-00026-9. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/11109.html

36. Малыхин В.И., Моисеев С.И., Родин В.А. Финансовая математика и модели налогообложения в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов – Воронеж: АОНО «ИММиФ», 2018. – 280 с.

37. Малыхин, В. И. Финансовая математика : учебное пособие для вузов / В. И. Малыхин. – 2-е изд. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 235 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/71239.html

38. Малыхин, В. И. Финансовая математика: учеб. пособие / В. И. Малыхин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. – 247 с.

39. Мелкумов, Я.С. Финансовые вычисления: теория и практика: учеб.-справ. пособие / Я.С. Мелкумов. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 406 с.

40. Меньшиков, И.С. Финансовый анализ ценных бумаг. Курс лекций. - М..: Финансы и статистика, 2008. – 360 с.

41. Моисеев С.И. Татаринцев А.В. Математика финансовых операций : учебное пособие. – Воронеж, ВФ МГЭИ, 2010. – 76 с.

42. Овчаренко Е.К., Ильина О.П., Балыбердин Е.В. Финансово-экономические расчеты в Excel. Изд 2-е, доп. - М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 2008. – 184 с.

43. Рынок ценных бумаг: Учебник / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. - М.: Финансы и статистика, 2006. – 352 с.

44. Симчера, В.М. Введение в финансовые и актуарные вычисления / В.М. Симчера. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 346 с.

45. Синицын, Е. В. Приемы финансовых вычислений в условиях определенности. Практикум : учебное пособие / Е. В. Синицын. – Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 64 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/68279.html

46. Токтошов, Г. Ы. Финансовая математика : учебное пособие / Г. Ы. Токтошов. – Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2019. – 131 с. – Текст : электронный //

Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/90603.html

47. Уланов, В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений / Под ред. Проф. В.В. Ковалева. – М.: Финансы и статистика, 2016. – 245 с.

48. Основы финансовых вычислений : учебно-методическое пособие по дисциплине / составители Ю. В. Устинова. – Москва : Московский технический университет связи и информатики, 2016. – 40 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/61519.html

49. Финансовая математика: математическое моделирование финансовых операций: учеб. пособие / Под ред. В.А. Половникова и А.И. Пилипенко. – Вузовский учебник, 2014. – 360 с.

50. Финансовая статистика и финансовые вычисления : методическое пособие / составители Е. Е. Синявская, В. А. Янюшкин. – Сочи : Сочинский государственный университет, 2020. – 84 с. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/106597.html

51. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. – 4-е изд. – М.: Дело, 2014. – 400 с.

52. Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. Изд. 2-е, доп. – М.: Дело Лтд., 2015. – 320 с.

53. Четыркин, Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. – М.: Дело; 2018. – 256 с.

54. Чикина, Е. Д. Финансовые вычисления в экономике : учебное пособие / Е. Д. Чикина. – Белгород : Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, ЭБС АСВ, 2017. – 193 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/80478.html

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Порядковые номера дней в обычном году (не високосный)

День месяца	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Приложение Б

Формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости постоянных рент постнумерандо

	Наращенная сумма ренты	Современная стоимость ренты
m=1; p=1	$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$A = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
$m\neq 1; p=1$	$S = R\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}$	$A = R\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m-1}$
$m=1; p\neq 1$	$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{1/p}-1}$	$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$
$m=p\neq 1$	$S = \frac{R}{m}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}$	$A = \frac{R}{m}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}$
$m\neq p$ $m\neq 1; p\neq 1$	$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}$	$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1}$

Формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости постоянных рент пренумерандо и рент с платежами в середине периодов

Рента пренумерандо		
	Наращенная сумма	Современная стоимость
m=1; p=1	$\overset{*}{S} = S(1+i)$	$\overset{*}{A} = A(1+i)$
$m\neq 1;$ $p=1$	$\overset{*}{S} = S(1+j/m)^m$	$\overset{*}{A} = A(1+j/m)^m$
$m=1;$ $p\neq 1$	$\overset{*}{S} = S(1+i)^{1/p}$	$\overset{*}{A} = A(1+i)^{1/p}$
$m=p\neq 1$	$\overset{*}{S} = S(1+j/m)$	$\overset{*}{A} = A(1+j/m)$
$m\neq p$ $m\neq 1;$ $p\neq 1$	$\overset{*}{S} = S(1+j/m)^{m/p}$	$\overset{*}{A} = A(1+j/m)^{m/p}$

Приложение В

Множители наращения по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,4
2	1,1025	1,21	1,3225	1,44	1,5625	1,69	1,96
3	1,157625	1,331	1,520875	1,728	1,953125	2,197	2,744
4	1,215506	1,4641	1,749006	2,0736	2,441406	2,8561	3,8416
5	1,276282	1,61051	2,011357	2,48832	3,051758	3,71293	5,37824
6	1,340096	1,771561	2,313061	2,985984	3,814697	4,826809	7,529536
7	1,4071	1,948717	2,66002	3,583181	4,768372	6,274852	10,54135
8	1,477455	2,143589	3,059023	4,299817	5,960464	8,157307	14,75789
9	1,551328	2,357948	3,517876	5,15978	7,450581	10,6045	20,66105
10	1,628895	2,593742	4,045558	6,191736	9,313226	13,78585	28,92547
11	1,710339	2,853117	4,652391	7,430084	11,64153	17,9216	40,49565
12	1,795856	3,138428	5,35025	8,9161	14,55192	23,29809	56,69391
13	1,885649	3,452271	6,152788	10,69932	18,18989	30,28751	79,37148
14	1,979932	3,797498	7,075706	12,83918	22,73737	39,37376	111,1201
15	2,078928	4,177248	8,137062	15,40702	28,42171	51,18589	155,5681
16	2,182875	4,594973	9,357621	18,48843	35,52714	66,54166	217,7953
17	2,292018	5,05447	10,76126	22,18611	44,40892	86,50416	304,9135
18	2,406619	5,559917	12,37545	26,62333	55,51115	112,4554	426,8789
19	2,52695	6,115909	14,23177	31,948	69,38894	146,192	597,6304
20	2,653298	6,7275	16,36654	38,3376	86,73617	190,0496	836,6826
21	2,785963	7,40025	18,82152	46,00512	108,4202	247,0645	1171,356
22	2,925261	8,140275	21,64475	55,20614	135,5253	321,1839	1639,898
23	3,071524	8,954302	24,89146	66,24737	169,4066	417,5391	2295,857
24	3,2251	9,849733	28,62518	79,49685	211,7582	542,8008	3214,2
25	3,386355	10,83471	32,91895	95,39622	264,6978	705,641	4499,88

Приложение Г

Множители дисконтирования по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	0,907029	0,826446	0,756144	0,694444	0,64	0,591716	0,510204
3	0,863838	0,751315	0,657516	0,578704	0,512	0,455166	0,364431
4	0,822702	0,683013	0,571753	0,482253	0,4096	0,350128	0,260308
5	0,783526	0,620921	0,497177	0,401878	0,32768	0,269329	0,185934
6	0,746215	0,564474	0,432328	0,334898	0,262144	0,207176	0,13281
7	0,710681	0,513158	0,375937	0,279082	0,209715	0,159366	0,094865
8	0,676839	0,466507	0,326902	0,232568	0,167772	0,122589	0,06776
9	0,644609	0,424098	0,284262	0,193807	0,134218	0,0943	0,0484
10	0,613913	0,385543	0,247185	0,161506	0,107374	0,072538	0,034572
11	0,584679	0,350494	0,214943	0,134588	0,085899	0,055799	0,024694
12	0,556837	0,318631	0,186907	0,112157	0,068719	0,042922	0,017639
13	0,530321	0,289664	0,162528	0,093464	0,054976	0,033017	0,012599
14	0,505068	0,263331	0,141329	0,077887	0,04398	0,025398	0,008999
15	0,481017	0,239392	0,122894	0,064905	0,035184	0,019537	0,006428
16	0,458112	0,217629	0,106865	0,054088	0,028147	0,015028	0,004591
17	0,436297	0,197845	0,092926	0,045073	0,022518	0,01156	0,00328
18	0,415521	0,179859	0,080805	0,037561	0,018014	0,008892	0,002343
19	0,395734	0,163508	0,070265	0,031301	0,014412	0,00684	0,001673
20	0,376889	0,148644	0,0611	0,026084	0,011529	0,005262	0,001195
21	0,358942	0,135131	0,053131	0,021737	0,009223	0,004048	0,000854
22	0,34185	0,122846	0,046201	0,018114	0,007379	0,003113	0,00061
23	0,325571	0,111678	0,040174	0,015095	0,005903	0,002395	0,000436
24	0,310068	0,101526	0,034934	0,012579	0,004722	0,001842	0,000311
25	0,295303	0,092296	0,030378	0,010483	0,003778	0,001417	0,000222

Приложение Д

Множители наращения аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,05	2,1	2,15	2,2	2,25	2,3	2,4
3	3,1525	3,31	3,4725	3,64	3,8125	3,99	4,36
4	4,310125	4,641	4,993375	5,368	5,765625	6,187	7,104
5	5,525631	6,1051	6,742381	7,4416	8,207031	9,0431	10,9456
6	6,801913	7,71561	8,753738	9,92992	11,25879	12,75603	16,32384
7	8,142008	9,487171	11,0668	12,9159	15,07349	17,58284	23,85338
8	9,549109	11,43589	13,72682	16,49908	19,84186	23,85769	34,39473
9	11,02656	13,57948	16,78584	20,7989	25,80232	32,015	49,15262
10	12,57789	15,93742	20,30372	25,95868	33,2529	42,6195	69,81366
11	14,20679	18,53117	24,34928	32,15042	42,56613	56,40535	98,73913
12	15,91713	21,38428	29,00167	39,5805	54,20766	74,32695	139,2348
13	17,71298	24,52271	34,35192	48,4966	68,75958	97,62504	195,9287
14	19,59863	27,97498	40,50471	59,19592	86,94947	127,9125	275,3002
15	21,57856	31,77248	47,58041	72,03511	109,6868	167,2863	386,4202
16	23,65749	35,94973	55,71747	87,44213	138,1085	218,4722	541,9883
17	25,84037	40,5447	65,07509	105,9306	173,6357	285,0139	759,7837
18	28,13238	45,59917	75,83636	128,1167	218,0446	371,518	1064,697
19	30,539	51,15909	88,21181	154,74	273,5558	483,9734	1491,576
20	33,06595	57,275	102,4436	186,688	342,9447	630,1655	2089,206
21	35,71925	64,0025	118,8101	225,0256	429,6809	820,2151	2925,889
22	38,50521	71,40275	137,6316	271,0307	538,1011	1067,28	4097,245
23	41,43048	79,54302	159,2764	326,2369	673,6264	1388,464	5737,142
24	44,502	88,49733	184,1678	392,4842	843,0329	1806,003	8032,999
25	47,7271	98,34706	212,793	471,9811	1054,791	2348,803	11247,2

Приложение Е

Дисконтные множители аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	1,85941	1,735537	1,625709	1,527778	1,44	1,360947	1,22449
3	2,723248	2,486852	2,283225	2,106481	1,952	1,816113	1,588921
4	3,545951	3,169865	2,854978	2,588735	2,3616	2,166241	1,849229
5	4,329477	3,790787	3,352155	2,990612	2,68928	2,43557	2,035164
6	5,075692	4,355261	3,784483	3,32551	2,951424	2,642746	2,167974
7	5,786373	4,868419	4,16042	3,604592	3,161139	2,802112	2,262839
8	6,463213	5,334926	4,487322	3,83716	3,328911	2,924702	2,330599
9	7,107822	5,759024	4,771584	4,030967	3,463129	3,019001	2,378999
10	7,721735	6,144567	5,018769	4,192472	3,570503	3,091539	2,413571
11	8,306414	6,495061	5,233712	4,32706	3,656403	3,147338	2,438265
12	8,863252	6,813692	5,420619	4,439217	3,725122	3,19026	2,455904
13	9,393573	7,103356	5,583147	4,532681	3,780098	3,223277	2,468503
14	9,898641	7,366687	5,724476	4,610567	3,824078	3,248675	2,477502
15	10,37966	7,60608	5,84737	4,675473	3,859263	3,268211	2,48393
16	10,83777	7,823709	5,954235	4,729561	3,88741	3,283239	2,488521
17	11,27407	8,021553	6,047161	4,774634	3,909928	3,2948	2,491801
18	11,68959	8,201412	6,127966	4,812195	3,927942	3,303692	2,494144
19	12,08532	8,36492	6,198231	4,843496	3,942354	3,310532	2,495817
20	12,46221	8,513564	6,259331	4,86958	3,953883	3,315794	2,497012
21	12,82115	8,648694	6,312462	4,891316	3,963107	3,319842	2,497866
22	13,163	8,77154	6,358663	4,90943	3,970485	3,322955	2,498476
23	13,48857	8,883218	6,398837	4,924525	3,976388	3,32535	2,498911
24	13,79864	8,984744	6,433771	4,937104	3,981111	3,327192	2,499222
25	14,09394	9,07704	6,464149	4,947587	3,984888	3,328609	2,499444