IV МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНКУРС

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ ШКОЛЬНИКОВ

"RESEARCH START"

**О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ В ГРАФАХ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМОСТИ ИЛИ БЕЗ ЦИКЛОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЗАДАННОГО КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР**

Выполнил Буйко Аркадий Константинович,

обучающийся ЧОУ «Православная Гимназия во имя Святителя

Иннокентия митрополита Московского» г. Мирного РС (Я), 9 класс

Научный руководитель: Полякова Елена Евгеньевна,

учитель математики ЧОУ «Православная Гимназия» г. Мирного РС (Я)

2021/2022

**Оглавление**

[**ВВЕДЕНИЕ** 3](#_Toc90739640)

[**ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ И**  5](#_Toc90739641)

[**ОГРАНИЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ГРАФЕ БЕЗ НЕЧЁТНЫХ ЦИКЛОВ (Т.Е. В ДВУДОЛЬНЫХ)** 5](#_Toc90739642)

[**ОГРАНИЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ГРАФЕ БЕЗ ЧЁТНЫХ ЦИКЛОВ** 6](#_Toc90739643)

[**ЗАКЛЮЧЕНИЕ** 8](#_Toc90739644)

[**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ** 8](#_Toc90739645)

# **ВВЕДЕНИЕ**

**Цель работы** – вывод закономерностей в графах, вычисление и оценка сверху и снизу для некоторых графов через основные параметры .

Вопрос о закономерностях между числами независимости некоторого графа, а также циклами данных графов в научной литературе рассматривался недостаточно широко, поэтому исследование некоторых зависимостей **является актуальным** и требующим завершенности в нахождении оценок сверху и снизу через основные параметры. Предложенный подход может использоваться для других исследований в областях теории графов.

**Объектом** исследования является теория графов, а **предметом** – некоторые закономерности в графах без циклов с заданным количеством рёбер и с заданной чётностью количества вершин.

**Практической значимостью** является, например, то, что результаты исследований можно использовать в работе математических кружков, при решении олимпиадных задач и других математических задач более высокого уровня сложности.

**Методы исследования** в данной работе – в первую очередь анализ некоторых утверждений и теорем классической и экстремальной теории графов, а также собственные математические рассуждения.

**Задачи:**

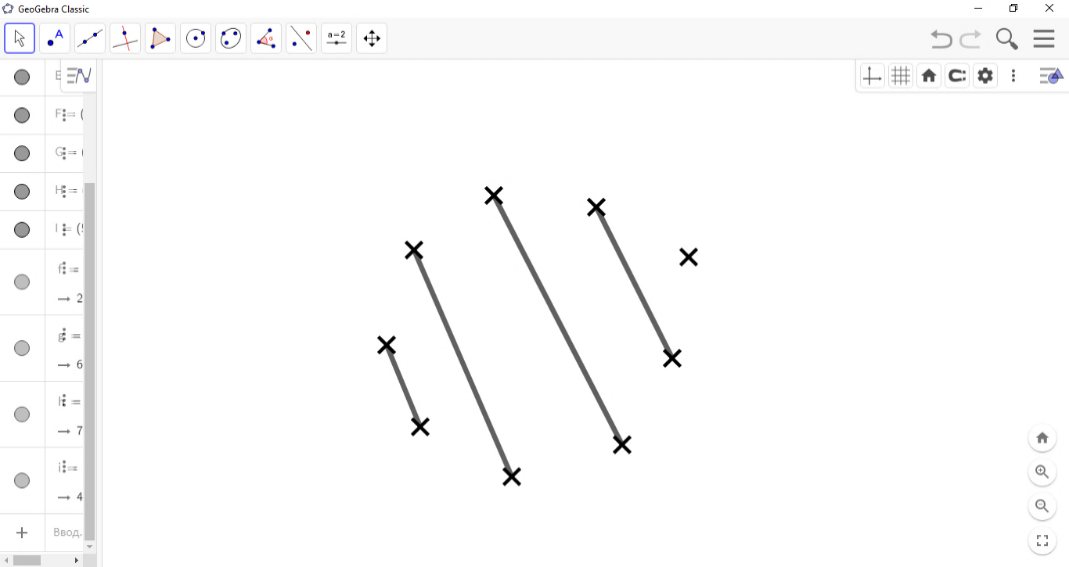
1. Изучить и проанализировать имеющуюся теорию по зависимостям в графах между отсутствием каких-либо циклов с заданной чётностью, их числами независимости и количеством рёбер
2. Систематизировать и вывести ограничения по количеству рёбер графа без циклов с заданной чётностью или с заданным числом независимости
3. Доказать полученные ограничения

**Основные обозначения**: *n* – количество вершин графа, *α* – максимальное количество вершин, никак не соединённых друг с другом (число независимости), *e* – количество рёбер в данном графе.

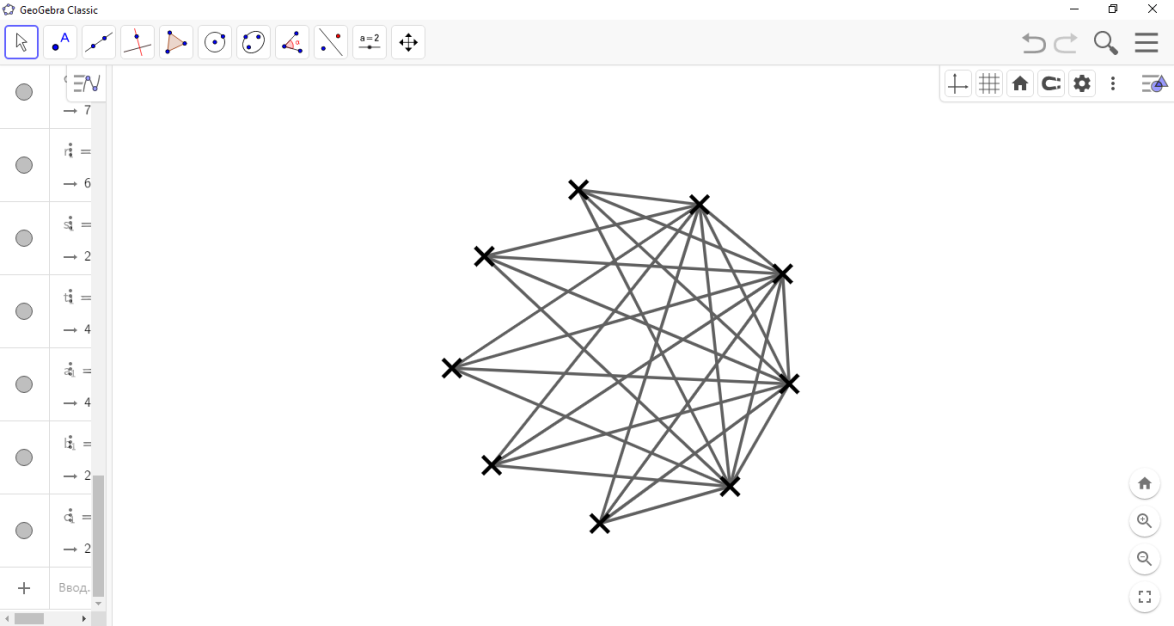
**Основные утверждения и теоремы**:

1. Теорема Турана – – наименьшее число рёбер в графе с числом независимости *α*;
2. Максимальное число рёбер в графе с *n* кол-вом вершин – ;
3. Количество рёбер в полном двудольном графе, мощности множеств вершин каждой из долей соответственно равны *a* и *b* – ;
4. Минимальное кол-во рёбер в дереве на *n* вершинах –

# **ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ И**

Во-первых, по теореме Турана , а так как , то

Граф с таким количеством рёбер достигается при проведении линий между всеми точками не «независимости», с соответствующими точками «независимости», оставляя при этом одну точку, несоединённой ни с какой другой (пример с n=9 см. рис.)

Почему мы взяли число независимости равным ? Всё просто – такое число независимости может быть достижимо в графе, по определению без циклов с нечётным количеством рёбер – двудольном. Такие графы нам скоро понадобятся, но сначала нужно установить верхнюю границу количества рёбер при и - это будет полный граф на n вершинах без полного подграфа на вершинах. Количество рёбер в полном графе на n вершинах считается по формуле . (пример с n=9 см. рис.):

. Важно заметить, что , т.к. при нечётном *n=2k+1*, выражение можно упростить до   
. При , . В противном случае

# **ОГРАНИЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ГРАФЕ БЕЗ НЕЧЁТНЫХ ЦИКЛОВ (Т.Е. В ДВУДОЛЬНЫХ)**

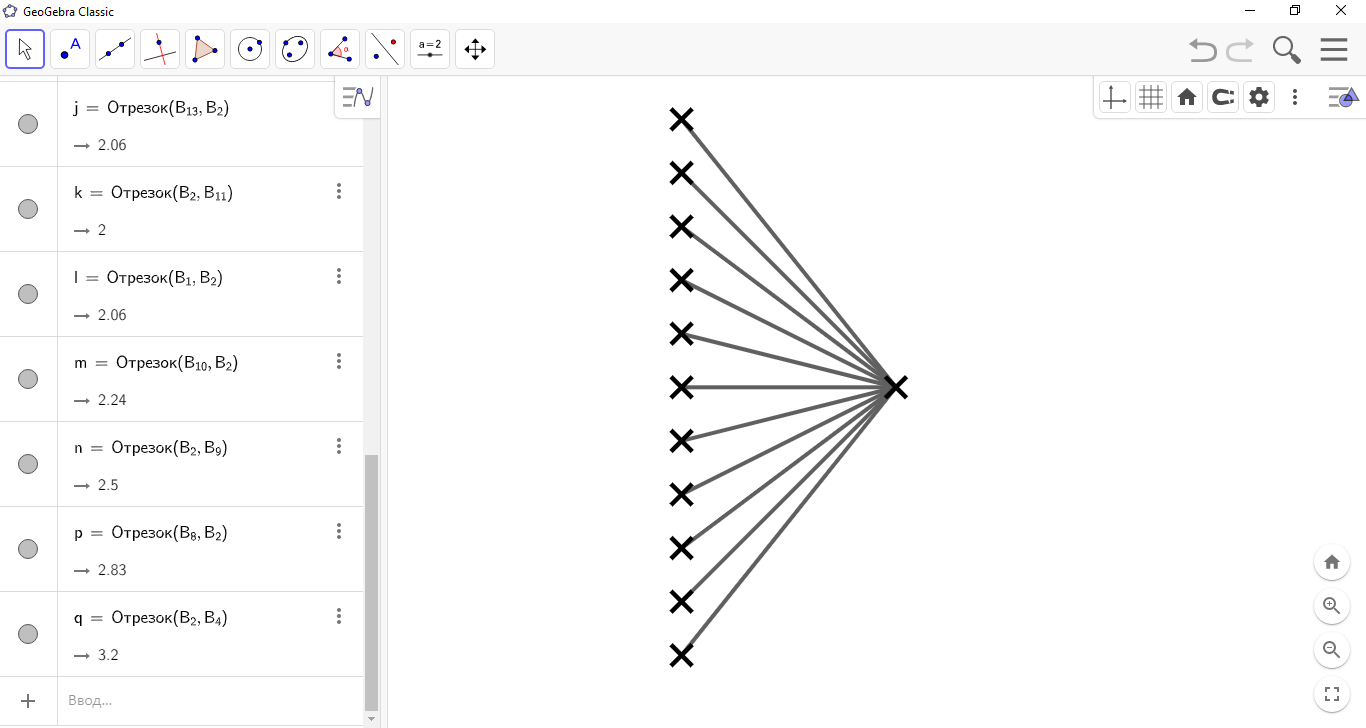
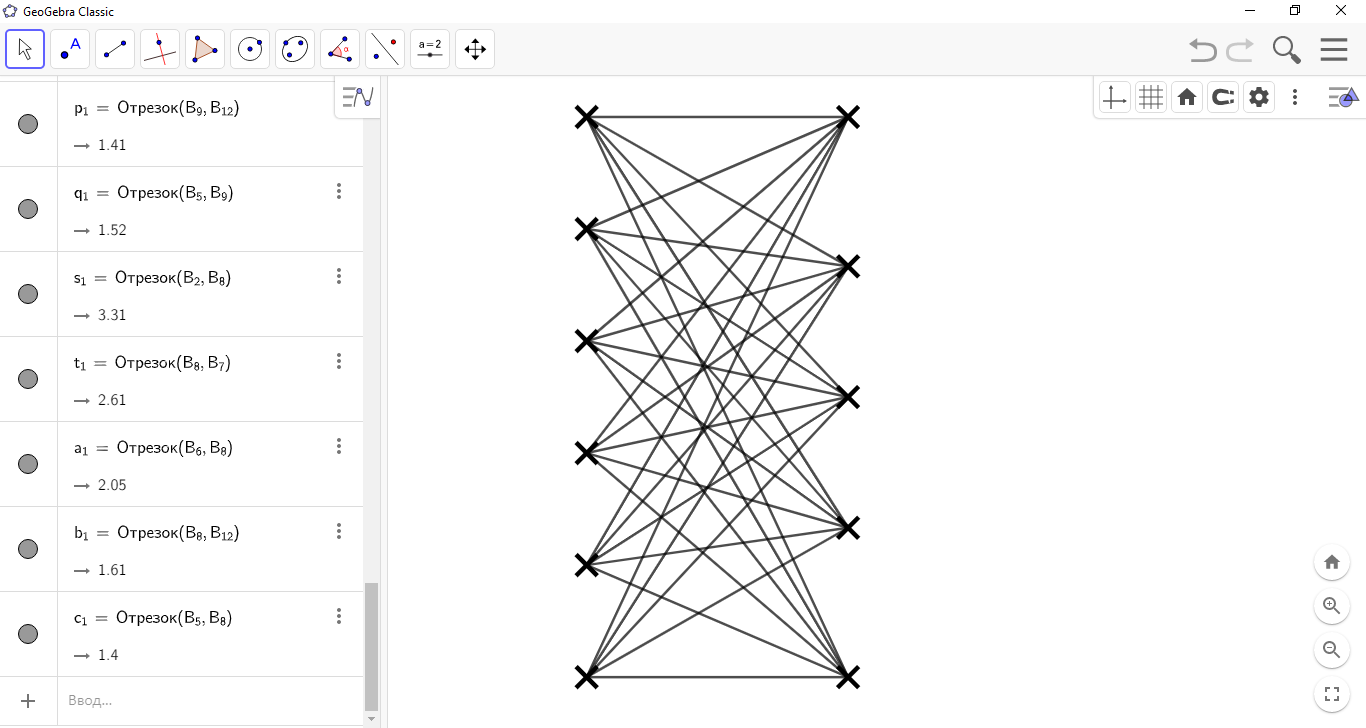
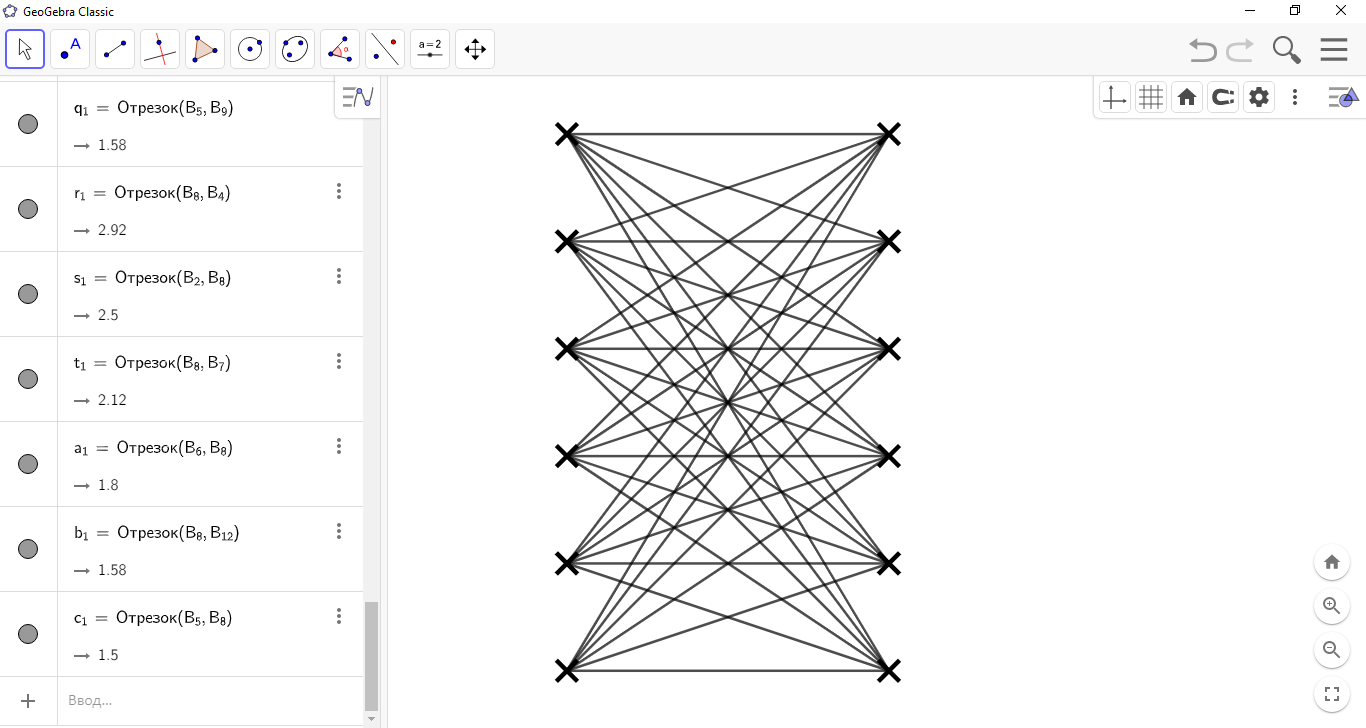
Проще всего вспомнить свойство двудольного графа – т.к. такой граф можно раскрасить в два цвета, то он не имеет циклов с нечётным количеством рёбер. Это и есть то, что нам надо. Сначала рассмотрим такие графы с нечётным количеством вершин.

Минимальное количество рёбер, *n-1*, достигается в случае с графом-колесом. Граф-колесо – двудольный граф с мощностью множеств вершин в каждой из долей соответственно равными n-1 и 1, и числом рёбер равным по формуле 3: (граф-колесо с n=12, представленный в виде двудольного см. на рис.). А максимальное – при долях, количество вершин в которых соответственно равно и (по упрощённой алгебраической вариации изопериметрической задачи). Тогда количество рёбер в таком графе будет равно . Количество отсутствующих рёбер тогда равно .

Теперь рассмотрим двудольные графы с *n*⋮*2:* минимальное количество ребер, опять же, достигается в случае с графом-колесом. Максимальное же количество рёбер достигается при числе независимости и, естественно, мощностью множеств каждой из долей соответственно равными числу независимости. . при чётном *n.* Отсутствует же рёбер от максимально возможного полного графа на n вершинах.

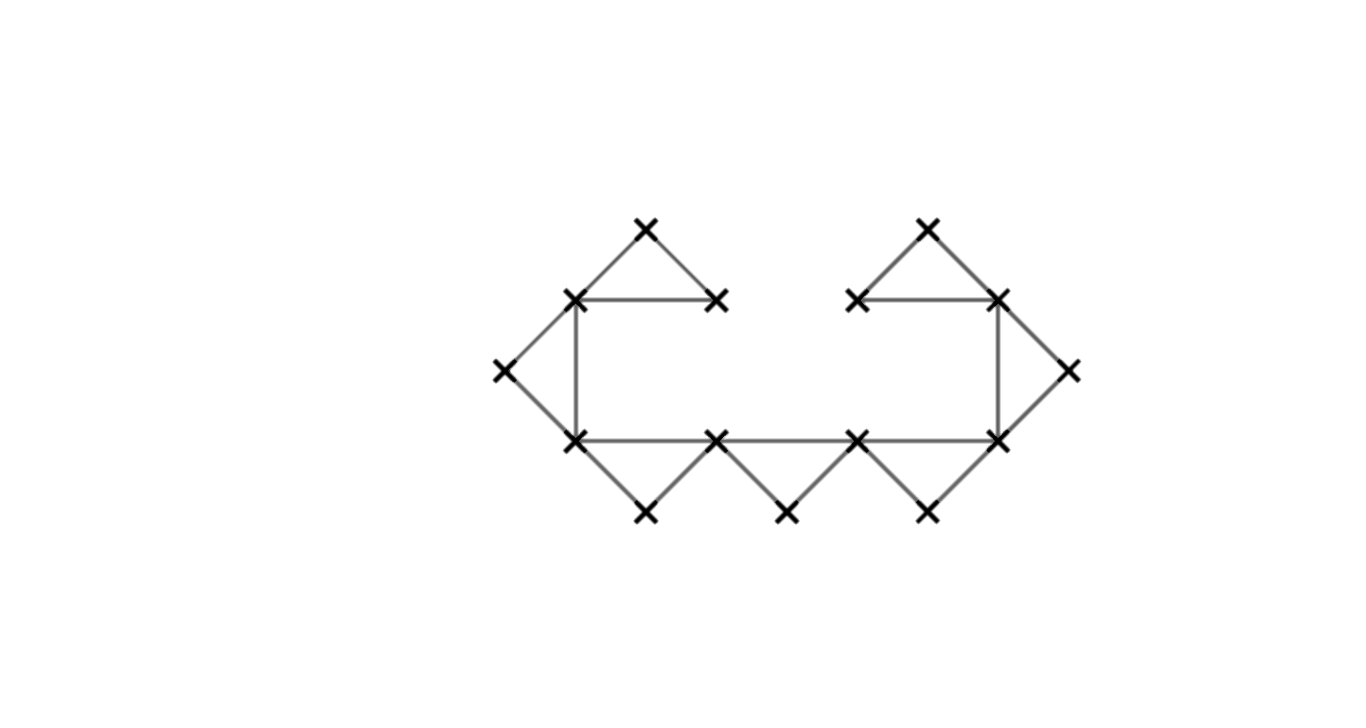
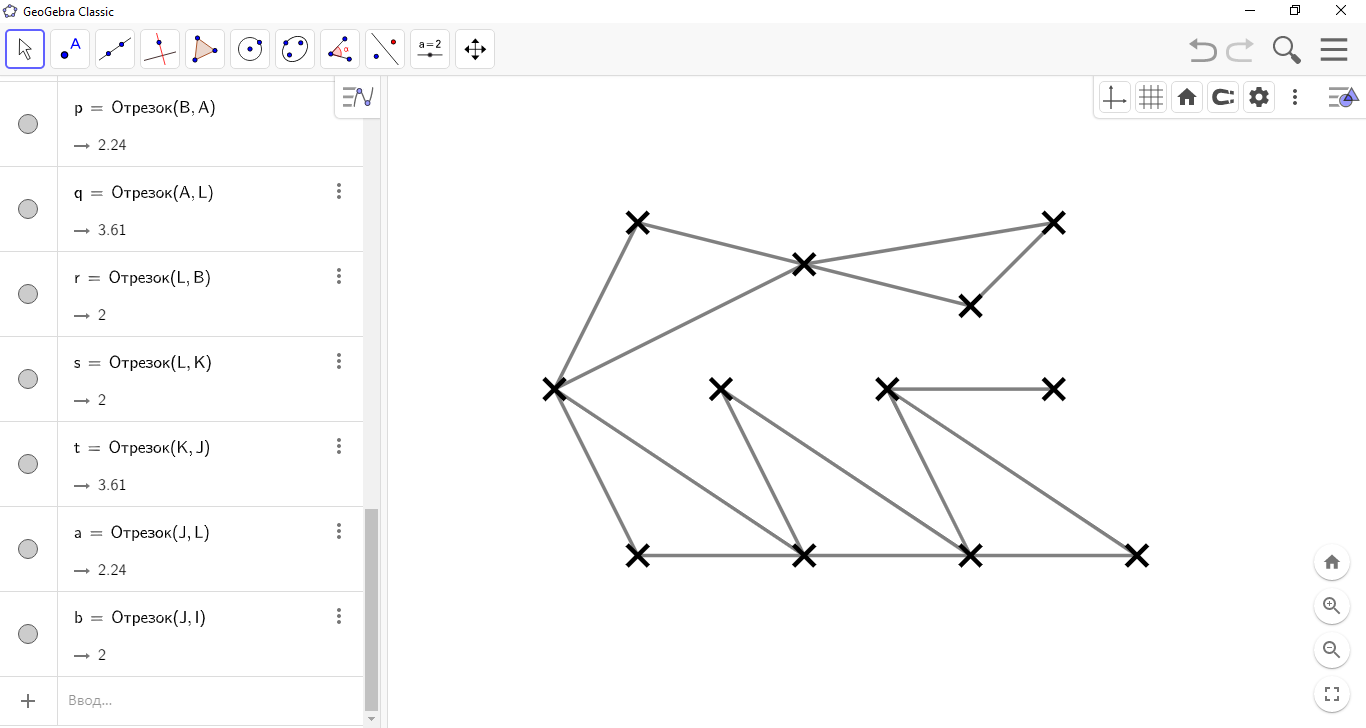
Важно также заметить, что в полных двудольных графах с нечётным количеством вершин количество граней всегда чётное, а в двудольных графах с – максимальное количество рёбер кратно k2.

Ниже представлено 3 рисунка: граф-колесо с n=12, представленный в виде двудольного (слева), двудольный граф с n=11 и максимально возможным количеством рёбер (в центре) и тот же двудольный граф, но при n=12 (справа).

# **ОГРАНИЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ГРАФЕ БЕЗ ЧЁТНЫХ ЦИКЛОВ**

Докажем, что если в каком-то простом графе нет чётных циклов, то количество ребер в нём . Сначала нужно заметить, что если в графе вообще нет циклов, то общее количество ребер не больше n – 1. Мы точно знаем, что в нашем графе циклы есть, естественно, состоящие из нечётного количества звеньев. Заметим, что между любыми двумя вершинами этого цикла любые пути могут проходить только по ребрам того же самого цикла. Это значит, что любые два цикла пересекаются не более чем по одной вершине. У них не может быть общих ребер. Оценим же количество возможных циклов с поставленными нами ограничениями. В каждом из них не меньше трёх ребер. Это означает, что их (циклов) точно не больше общего количества рёбер, делённого на три. Теперь удалим из каждого цикла ровно одно ребро. Тогда в полученном графе останется в не меньше чем ребер, где e – количество рёбер искомого графа. Заметим, что этот граф является лесом. Значит у него не может быть больше чем n – 1 ребро. С одной стороны, у этого нового графа не меньше чем ребер, а с другой, этих же ребер не больше чем n – 1. . Из неравенства получим . Учитывая то, что максимальное наименьшее количество рёбер в графе без циклов n – 1, то неравенство можно дополнить: . Можно записать в виде равенства: . Ниже приведено 2 примера графов без чётных циклов – с n=12 и n=15



# **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

С помощью результатов этого исследования можно проще решать задачи по графам с дополнительными условиями, а также создавать свои. В качестве продолжения исследования можно изучить подобные графы ориентированного типа, а также планарные графы с таким же ограничением на отсутствие циклов заданной чётности, ведь в ориентированных графах могут возникать, например, циклы на двух вершинах, а в планарных графах при таких ограничениях следует уделить отдельное внимание хроматическому числу. Перспектив для развития много - тем более, что графы применимы не только в математике - им также нашлось применение в кибернетике, социологии, физике, химии и других науках.

При исследовании темы проекта мы столкнулись с проблемой решения математических задач по теории графов, где использовались дополнительные условия об отсутствии циклов, состоящих из количества рёбер с заданной чётностью. Мы использовали теорему Турана, но решение задач с её помощью было слишком громоздким, поэтому мы поставили ограничения по количеству рёбер в подобных графах. В процессе исследование было найдено множество интересных фактов и формул, которые мы также записали в текст проекта.

Итак, поставленная цель выполнена. Были даны оценки количества рёбер в графах только с чётными и нечётными циклами соответственно. Также были выведены выражения:

; при и

в двудольном графе с нечётным количеством вершин

в двудольном графе с чётным количеством вершин

или в графе без чётных циклов

# **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Bondy 1, J.A. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Pancyclic graphs, Volume 11, Issue 1, August 1971, Pages 80 – 84 DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90016-5](https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90016-5%20) (дата обращения: 18.12.2021)
2. Cambridge University Press 2008 Combinatorics, Probability and Computing, Volume 17, Issue 4, July 2008, pp. 603 – 618 DOI: <https://doi.org/10.1017/S0963548308009085> (дата обращения: 18.12.2021)
3. Erdős Pál, Turán Pál gráf tételéről URL: <https://users.renyi.hu/~p_erdos/1971-27.pdf> (дата обращения: 18.12.2021)
4. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: Заключительные этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2017. – 552 с.
5. Райгородский, А.М. Теория графов URL: <https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov> (дата обращения: 18.12.2021)