Обособленное структурное подразделение
«Детский технопарк «Кванториум»
Государственного автономного учреждения дополнительного профессионального образования Липецкой области «Институт развития образования»

Методическая разработка по олимпиадной математике. Кейс «Игры со стратегией»

Авторы:
Светлова Виктория Сергеевна, педагог дополнительного образования
Марасанова Елена Вячеславовна, педагог дополнительного образования

Липецк, 2021

Кейс «Игры со стратегией»

1. О кейсе

Решая задачу, есть ли в шахматах у белых гарантированный выигрыш, либо у чёрных есть гарантированная ничья, учащийся учится математически анализировать игры и искать выигрышные стратегии.

2. Текст кейса

Учащийся шестого класса Василий очень любит играть в шахматы. Однажды перед игрой его спросили: «Кто выиграет сегодня в шахматах – белые или черные?» «Тот игрок, кто опытнее, лучше играет – ответил Василий.» «А если оба игрока играют наилучшим образом, что тогда?» Василий задумался: «Имеет ли точный смысл, поставленный таким образом вопрос? Есть ли у белых или черных способы, при которых они могут гарантировано выиграть? или не проиграть?

3. Категория кейса: базовый. Рассчитан на обучающихся 12-17 лет.

4. Место в структуре программы:

Данный кейс используется при изучении темы «Игры со стратегией» образовательной программы по олимпиадной математике.

Количество учебных часов/занятий, на которые рассчитан кейс: 3.

Продолжительность занятия – 40 минут.

Учебно-тематическое планирование

Занятие 1	
Цель: научиться находить выигрышные стратегии	
Что делаем: Деление учащихся на группы. Знакомство с задачей кейса, обсуждение проблемной ситуации, планирование работы. Осуществление поиска необходимой информации с помощью информационных источников.	**Компетенции**: Soft: 4К-компетенции, умение генерировать идеи указанными методами, слушать и слышать собеседника; искать информацию в свободных источниках и структурировать ее Hard: формирование представлений об играх со стратегией, решении задач с использованием симметрии
Занятие 2	

Цель: повторить решение задач с использованием выигрышных стратегий.	
Что делаем: решаем задачи в командах	**Компетенции**: Soft: 4К-компетенции, умение слушать и слышать собеседника; умение грамотно письменно формулировать свои мысли Hard: научиться анализировать игру до неполного его завершения, строить дерево игры
Занятие 3	
Цель: закрепить методы решения задач с выигрышными стратегиями.	
Что делаем: решаем олимпиадные задачи	**Компетенции**: Soft: 4К-компетенции, умение грамотно письменно формулировать свои мысли Hard: научиться решать задачи на комбинированные стратегии, познакомиться с играми-шутками

6. **Способ выявления образовательного результата**

Представление результатов образовательной деятельности пройдёт в форме олимпиадного соревнования в командах.

7. Источники информации:

1. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. — 5-е изд., исправленное и дополненное. — М.: МЦНМО, 2018.
2. Малый мехмат МГУ. [Электронный ресурс]. URL: http://mmmf.msu.ru/

Теоретический и практический материал для учащегося

Занятие № 1.
Тема: «Игры со стратегией»

Цель занятия: научиться находить выигрышные стратегии.

Занимательные математические игры *двух лиц*, у каждого из которых *своя цель*, достижение которой называется *выигрышем* соответствующего игрока. В рассматриваемых играх предполагается, что два игрока делают ходы по очереди, причем игроки не могут пропустить ход, и игрокам известны все предыдущие ходы каждого из них. Такие игры называются *играми с полной информацией*.

Для указанных игр имеет место одна из трех возможностей:

- у первого игрока (т.е. делающего ход первым) есть способ поведения, позволяющий ему добиться успеха при любых действиях его соперника.
- у второго игрока есть способ поведения, позволяющий ему добиться успеха при любых действиях первого игрока.
- у каждого из игроков есть способ поведения, позволяющий им гарантированно не проиграть.

Многие простейшие игры имеют определенную закономерность и секрет выигрыша (выигрышную стратегию).

В таких играх выигрышная стратегия зависит:
– от правил (условий) игры;
– от общего количества предметов, предложенных в игре;
– от выбора игроком первого или второго хода.

Под играми со стратегией будем понимать задачи с игровым содержанием, в которых один из играющих может гарантированно добиться нужного результата, если будет следовать определенному плану (стратегии, алгоритму) независимо от игры соперника.

Игры со стратегией

- На использование симметрии
- Анализ игры от ее завершения
- Рассмотрение неполного дерева игры
- Задачи на комбинированные стратегии

Игры на использование симметрии

В рассматриваемых задачах симметрия будет применяться не только в геометрическом смысле, но и в *повторении в определенные моменты одним из играющих ходов соперника*.

1. а) На столе лежат две кучки камней, по 20 камней в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое количество камней, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камни. Кто и как выиграет при правильной игре? Влияет ли на стратегию игры изменение количества камней в кучках (в каждой кучке камней поровну)? А если камне не поровну? Какова будет выигрышная стратегия если кучек три (в каждой кучке камней поровну)? Какова будет выигрышная стратегия если кучек n (в каждой кучке камней поровну)?

_____

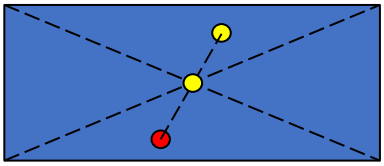
б) Игра Ним. Ним – одна из самых старых и известных математических игр, она является обобщением игр рассмотренных в пункте (а). Существует большое количество запрограммированных вариантов этой игры. В игру Ним играют вдвоем (для запрограммированного варианта одним из партнеров является компьютер). На столе находятся несколько кучек (рядов) монет (фишек, шашек, камней, спичек). Игроки по очереди забирают одну или несколько фишек из любого ряда (нельзя брать за один ход фишки из нескольких рядов). Выигрывает тот, кто возьмет последнюю фишку (фишки).

_____

2. На столе лежат две кучки камней. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (1, 2, 3, …) из одной кучки (по выбору игрока). При этом не разрешается оставлять поровну спичек в кучках (за исключением случая, когда спичек не осталось вовсе). Кто не может сделать ход проигрывает.

_____

3. Двое играющих поочередно выкладывают на прямоугольный стол по одному пятаку (5-копеечной монете). Монеты разрешается класть так, чтобы они целиком умещались на столе и не накладывались друг на друга. Выигрывает тот, кто делает последний ход. Кто выиграет при правильной игре? Приведите примеры других конфигураций стола при которых указанная стратегия приводит к победе.



_____

4. На плоскости дан правильный *n*-угольник (*n* – четно). Два игрока по очереди проводят его диагонали, по следующим правилам: 1) нельзя соединять диагональю две вершины, если хотя бы из одной из них уже проведена диагональ; 2) нельзя пересекать ранее проведенные диагонали. Выигравшим считается тот, кто проведет последнюю диагональ. Кто и как выиграет при правильной игре? _____

Что нового Вы узнали? _____

_____

_____

Словарь _____

_____

Занятие № 2.
Тема: «Игры со стратегией»

Цель занятия: повторить решение задач с использованием выигрышных стратегий.

Правила (секреты) выигрышной стратегии	
Правило 1	Перед началом игры разделите все предметы на группы от конца к началу. Количество предметов в группе определяется условиями (не больше 2, тогда группы по 3, т.е. (n+1)). Самая первая группа может оказаться неполной – эти предметы мы называем «лишними»
Правило 2	Если есть «лишние» предметы, то выбери 1-ый ход и закрась «лишние» предметы. Если нет «лишних» предметов – то выбери второй ход
Правило 3	Дополняй ход другого игрока до (n+1) предмета, тогда в последней группе самый последний предмет будет твой

Анализ игры от её завершения

Поиск решения осуществляется путем анализа игры от ее завершения. В начале рассматривается итоговое победное положение, а в дальнейшем анализируются ситуации, которые могли привести к победному положению.

1. *Игра Баше.* а) На столе лежат 15 спичек. Два игрока берут поочередно со стола спички. За один ход игрок может взять 1, 2 или 3 спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто и как выиграет при правильной игре? _____
_____

б) Что изменится в стратегии рассматриваемой игры, если первоначальное количество спичек n ($n > 4$)? _____
_____

в) На столе лежат n спичек. Два игрока берут поочередно со стола спички. За один ход игрок может взять от 1 до k спичек ($k < n$). Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто и как выиграет при правильной игре? _____
_____

2. *Игра дат.* Первый игрок сообщает какую-нибудь дату января. Каждый игрок на своем ходе называет более позднюю дату, увеличивая либо календарную дату в месяце, либо порядковый номер месяца, но не то и другое одновременно. Если, например, начальной датой было 8 января, то можно перейти к 8 марта или к 12 января; можно перейти сразу к 8 декабря или 31 января. Первый, кто доберется до 31 декабря, выигрывает. Кто и как выиграет при правильной игре? _____
_____

3. *Играют двое*. Они поочерёдно кладут в кучу любое количество камней от 1 до 10. Выигрывает тот, кто доведёт количество камней до 200. Кто победит – первый или второй? И как надо играть, чтобы выиграть? _____
_____

4. На шахматной доске стоит король. Двое играющих ходят по очереди. За один ход разрешается передвинуть короля на одну клетку вверх, или вправо, или вправо-вверх по диагонали. Проигрывает тот кому некуда ходить. При каких начальных положениях короля выигрывает первый игрок, а при каких второй? _____

_____

_____

5. *(Уникум-2015)* Двое играют в такую игру: первый называет произвольное число от 1 до 10, второй прибавляет к нему одно из чисел от 1 до 10 и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первый назовет число 100. Кто и как выиграет при правильной игре? _____

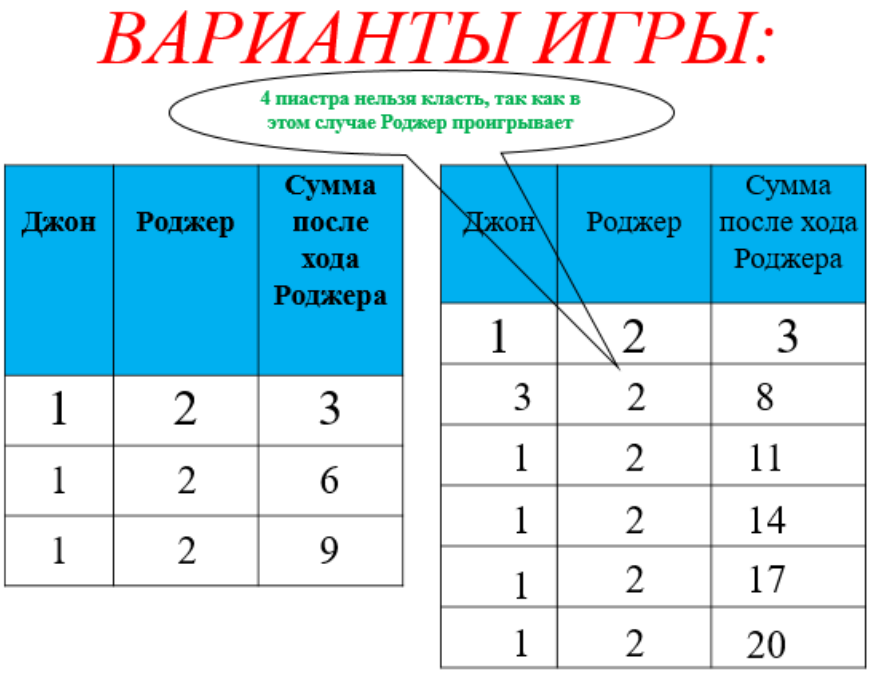
_____

_____

Рассмотрение неполного дерева игры

Рассматриваются всевозможные ходы игрока, который в итоге проигрывает, и только те ходы его соперника, которые приводят к победе.

1. *(X заочная физико-математическая олимпиада МФТИ, 2001 год)* Два пирата Джон и Роджер играют в следующую игру. Ходят по очереди. Первым ходом Джон кладет на стол 1 пиастр. Каждым следующим ходом пират обязан положить на 1 пиастр больше или меньше, чем предыдущим ходом положил его противник. При этом он обязан положить хотя бы один пиастр. Если после хода одного из пиратов сумма денег на столе становится кратной 10 пиастрам, то его соперник забирает все монеты. Кто из пиратов выиграет? Опишите его выигрышную стратегию. _____



_____

_____

_____

2. Часы показывают полдень. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на два или три часа вперед. Если после хода игрока стрелка указывает на 6 он выиграл. _____

_____

Что нового Вы узнали? _____

_____

_____

Словарь _____

_____

Занятие № 3.
Тема: «Игры со стратегией»

«Предмет математики настолько серьезен,
что полезно не упускать случаев делать
его немного занимательным»
Б. Паскаль

Цель занятия: закрепить методы решения задач с выигрышными стратегиями.

Задачи на комбинированные стратегии

1. а) Два игрока по очереди выписывают цифры девятизначного числа: первую цифру пишет первый игрок, вторую – второй, третью – снова первый и т. д. Первый игрок выигрывает если итоговое число делится на 9, второй – в противном случае. Кто и как выиграет при правильной игре при правильной игре? _____
_____

б) Двое игроков по очереди выписывают последовательные цифры n-значного (n – четно) числа: первую цифру пишет первый, вторую второй, третью – снова первый и т.д. Второй игрок выигрывает, если получившееся число делится на 11, иначе выигрывает первый. Кто и как выиграет при правильной игре? _____
_____

в) Двое игроков по очереди выписывают справа налево последовательные цифры n-значного (n-нечетно) числа: первую цифру пишет первый, вторую второй, третью – снова первый и т. д. Первый игрок выигрывает, если получившееся число делится на 11, иначе выигрывает второй. Кто и как выиграет при правильной игре? _____
_____

2. *(XXIX Всероссийская олимпиада 2002/2003, III-й этап, 8.8)* На окружности расставлены 56 точек, делящие ее на равные части. Двое играют в следующую игру. Игрок может своим ходом стереть любой набор точек, которые делят окружность на равные части (при этом одну или 56 точек стирать нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? _____
_____

3. *(XXVIII Всероссийская олимпиада 2001/2002, III-й этап, 9.8)* По окружности написано 2002 единицы. Два игрока по очереди стирают два соседних числа и записывают их сумму. Выигрывает тот, кто получит число 4. Если останется одно число, игра заканчивается вничью. Каков будет результат при правильной игре? _____
_____

4. *(XXXI Всероссийская олимпиада 2004/2005, IV-й этап, 8.2)* В средней клетке полоски 1 х 2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает на 2 клетки, 1-й – на 4 клетки, 2-й – на 8 и т.д. (k-й сдвиг происходит на $2k$-1 клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может вы играть независимо от игры соперника?
_____
_____

5. *(XXXII Всероссийская олимпиада 2005/2006, IV-й этап, 8.2)* Двое играют в такую игру В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к

двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать? _____

_____

Игры-шутки

Игры-шутки – это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники, а зависит только от начальных данных игры.

1. Двое по очереди ломают шоколадку размером $m \times n$. За один ход разрешается сделать прямоугольный разлом любого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. _____

_____

2. Двое по очереди ставят ладей на квадратную шахматную доску $m \times m$ так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. _____

_____

3. На доске записаны числа 1, 2, …, 1996, 1997. Два игрока играют в следующую игру. Каждым своим очередным ходом стирает с доски любые два числа и вместо них пишет на доске их разность до тех пор, пока на доске не останется одно число. Выигрывает первый игрок, если это число будет четным, и выигрывает второй игрок, если это число будет нечетным. _____

_____

4. На доске записаны числа от 1 до 100. Два игрока поочередно стирают с доски любые два числа a и b и вместо них записывают число $a + b - 1$. Если оставшееся число будет четным, то выигрывает первый игрок, в противном случае выигрывает второй игрок.

_____

_____

5. У одного мудреца было два ленивых ученика. Как-то он решил их проучить и предложил сыграть в старинную игру. Они сели за круглый стол, на который было высыпано 1999 спичек. Ученику, который сел по левую руку от мудреца разрешается за ход брать 1, либо 3, либо 5 спичек. Ученик, который сидит по правую руку от мудреца, берет за ход либо 2, либо 4, либо 6 спичек. Их учитель, в силу своей мудрости, всегда берет ровно 1 спичку. Первый ход делает мудрец, затем ходы делаются по очереди по часовой стрелке. Тот, кто не сможет сделать ход, пропускает его. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Докажите, что мудрец обязательно выиграет, независимо от того, как будут играть его ученики. _____

_____

_____

Что нового Вы узнали? _____

_____

_____

Словарь _____

_____