муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Школа № 86 имени Героя Социалистического Труда В.Я. Литвинова»
городского округа Самара

Итоговый индивидуальный проект

Тема: Практические иллюстрации темы «Длина окружности. Площадь круга»

Предмет: математика

Самара

2019-2020 учебный год

Содержание

Введение

Данная тема представляет определенный интерес, поскольку её истоки относятся к древности: с давних пор люди пытались решать задачи, связанные с кругом – измерять длину окружности, находить площадь круга.

Любой школьник сегодня должен уметь находить длину окружности и площадь круга, первый опыт вычислений происходит в 6 классе. Но, к сожалению, эти знания остаются для многих формальными, и уже через год мало кто помнит не только то, что отношение длины окружности к её диаметру одно и то число, но даже с трудом вспоминают численное значение числа π, равное 3,14.

Круг и окружность – одни из самых древнейших геометрических фигур, философы древности придавали им большое значение. Круг – воплощение нескончаемого Времени и Пространства, символ всего сущего, Вселенной. «Из всех фигур прекраснейшая – круг», – считал Пифагор.

Вокруг нас много круглых предметов. Представьте себе на секунду, что вдруг случилась беда: на Земле исчезло все круглое! Казалось бы – пусть все будет квадратным. Разве нельзя прожить без круглых труб, а к квадратным колесам нельзя привыкнуть? Можно ли вообще представить жизнь человека без использования круга? Почему так много тел имеют круглую форму? Чтобы найти ответы на все эти вопросы, в первую очередь, необходимо рассмотреть историю возникновения этих понятий и дальнейшее их развитие.

В ходе работы над проектом появляется возможность не только усвоить формулы для нахождения длины окружности и площади круга, но и приподнять завесу богатейшей истории числа π, которым человечество пользуется уже много веков.

Актуальность проекта заключается в том, что появляется возможность не только усвоить формулы для нахождения длины окружности и площади круга, но и создать информационный продукт в виде буклета, который будет содержать не только основные понятия и формулы по теме «Длина окружности и площадь круга», но и интересные факты и исторические сведения.

Цель работы: изучить теоретические сведения по теме «Длина окружности. Площадь круга» и представить примеры и иллюстрации применения данной теории в решении практико-ориентированных задач, сюжетных задач.

Для реализации данной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Изучить теоретические сведения о круге и окружности.

2. Исследовать изменение длины окружности и площади круга в зависимости от изменения длины радиуса.

3. Опытным путем вычислить число π.

4. Изучить историю числа π.

5. Найти занимательные факты и правила для запоминания числа π.

5. Рассмотреть занимательные задачи и практические ситуации, где необходимо применить данную теорию в решении профессиональных и иных проблем;

6. Рассмотреть значимость теории в прикладных задачах, а также смежных областях науки и техники, где применяется теория по рассматриваемой теме;

7. Ознакомиться с теоретическими материалами по истории математики и определить относящиеся к теме соответствующие приложения;

8. Рассмотреть и решить задачи из банка заданий ОГЭ по математике за 9 класс, где применяются знания по формулам длины окружности и площади круга;

9. Представить в качестве продукта исследовательской деятельности задания сюжетного плана, практического характера,

иллюстрирующие необходимость использования рассматриваемой теории.

Объект исследования: задачи практического характера, а также задачи ОГЭ по математике.

Предмет исследования: задачи на применение теории «Длина окружности. Площадь круга».

Гипотеза исследования: сюжетные иллюстрации, решение задач практического содержания позволят обучающимся воспринимать тему «Длина окружности. Площадь круга» как необходимый и осмысленный инструмент для применения к решению задач определенной области. Многообразие форм представления данной теории позволит усвоить необходимый материал и поможет решить многие геометрические задания с похожим содержанием.

Мы считаем, что формирование навыков решения сюжетных, практических заданий по рассматриваемой теме позволит осмыслить важность прописанной теории и приведет к пониманию через осмысление принадлежности формул к конкретному условию.

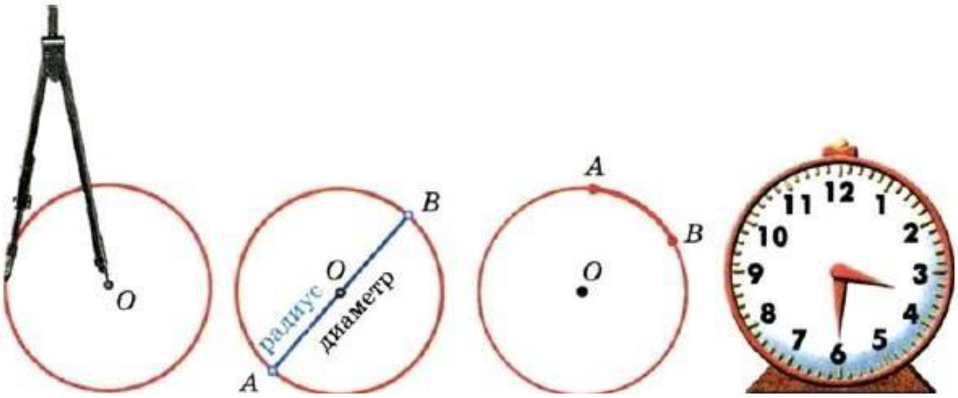
Ожидаемые результаты: некоторые данные и формулы достаточно трудно запоминаются, но с помощью открытия интересных фактов о числах или понятиях, можно лучше запомнить формулы, правила, а задания практического характера позволят уточнить и конкретизировать теорию для получения конкретного результата.

1. Теоретические сведения по теме «Длина окружности. Площадь круга»

1.1 Длина окружности

Понятие окружности и круга

Для построения окружностей имеется специальный инструмент - циркуль.

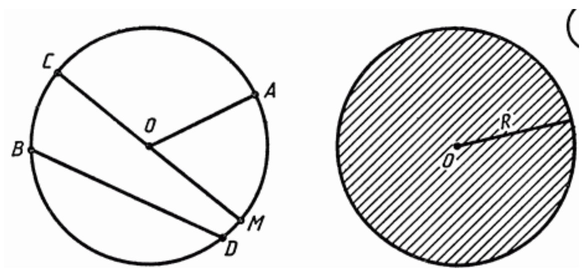


Обратим внимание на то, что при проведении окружности точка B все время находится на одном и том же расстоянии от точки O, называемой центром окружности, а отрезок OA называется радиусом окружности. Следовательно, окружность – это замкнутая кривая линия, все точки которой находятся на одном и том же расстоянии от ее центра.

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

Расстояние от точек окружности до ее центра называется радиусом окружности.

Радиус окружности – это отрезок, соединяющий центр окружности с некоторой точкой окружности.



Часть плоскости, которая ограничивается окружностью, называется кругом.

Окружность представляет собой бесчисленное множество точек, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной единственной, называемой центром окружности. Соединенные между собой точки формируют кривую линию, которая и будет окружностью. Все точки, которые находятся на другом расстоянии от центра окружности, не будут находиться на этой линии, поэтому не будут входить в окружность. Соответственно, окружность – это геометрическая фигура, которая представляет собой определенную линию, а все, что находится внутри нее либо снаружи, к окружности не относится. По этой причине имеется четкое понятие, что окружность делит всю плоскость на две части – внутреннюю, ограниченную линией окружности, и внешнюю, безграничную, поскольку плоскость в общем понимании не имеет границ.

Круг является геометрической фигурой, граница которой состоит из бесчисленного множества точек, равноудаленных от центра круга. Все внутреннее пространство, а также центр круга принадлежат ему, таким образом, можно говорить о том, что круг представляет собой некую площадь пространства, ограниченную множеством точек. А поскольку эти точки равноудалены от центра, то границей круга будет окружность. Все внешнее пространство кругу не принадлежит, зато он охватывает всю ту часть плоскости, которая очерчена при помощи окружности.

Различия между кругом и окружностью не столь велики, поскольку эти фигуры представляют собой неисчисляемое количество точек плоскости, находящихся от одной центральной точки на одинаковом расстоянии. Но важным отличительным признаком является тот факт, что внутреннее пространство не принадлежит окружности, но обязательно является составной частью круга. Иными словами, круг представляет собой не только окружность, которая является его границей, но также и то бесконечное число точек, находящихся внутри этой окружности.

Можно сделать следующий вывод. Разница между кругом и окружностью заключается в следующем:

1. Окружность является лишь частью круга, его границей, в то время как круг является более обширной и полноценной фигурой;

2. Окружность – это кривая линия, состоящая из бесчисленного множества точек, равноудаленных от центра, а круг представляет собой не только сумму этих точек окружности, но также и все те точки, которые расположены внутри этой самой окружности.

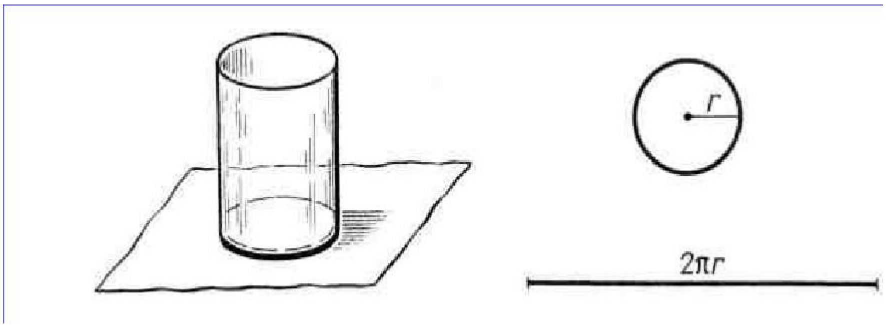
Впервые понятие длины окружности даётся в учебнике математика 6 класса.

«Возьмём круглый стакан, поставим на лист бумаги и обведём его карандашом. На бумаге получится окружность. Если «опоясать» стакан ниткой, а потом распрямить её, то длина нитки будет приближённо равна длине нарисованной окружности». Есть несколько способов непосредственного измерения длины окружности.

1. Вырежьте из картона, фанеры или другого материала круг, поставьте его ребром на лист бумаги, где начерчена прямая линия. Отметьте на прямой и на окружности точку их касания А. Затем плавно катите круг по прямой до тех пор, пока отмеченная точка А на окружности не окажется на прямой в точке В. Отрезок АВ тогда будет равен длине окружности. Измерив его с помощью избранной единицы длины, мы тем самым измерим и длину окружности.

2. Оберните вырезанный из картона (фанеры или другого

материала) круг веревочкой по окружности так, чтобы конец веревочки совпал с началом в одной и той же точке окружности. Затем растяните эту веревочку и измерьте ее длину. Длина веревочки будет равна длине окружности.



Однако эти способы непосредственного измерения длины окружности мало удобные и дают они приближенные результаты измерения.

Поэтому уже с древних времен начали искать более совершенные способы измерения длины окружности. В процессе измерений заметили, что между длиной окружности и длиной ее диаметра имеется определенная зависимость.

Многие математики пытались доказать, что это отношение есть число постоянное, не зависящее от размеров окружности, и найти более точное значение этого отношения. Впервые это удалось сделать древнегреческому математику Архимеду. Архимед установил, что отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, и нашел довольно точное значение этого отношения. Это отношение стали обозначать греческой буквой π - первой буквой греческого слова «периферия» - круг (читается «пи»).

Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число принято обозначать греческой буквой π ("пи").

Обозначим длину окружности буквой C, а ее диаметр буквой d и запишем формулу: $\pi = \frac{C}{d}$

Число π приблизительно равно 3.14

Более точное его значение π = 3,1415926535897932. Исходя из формулы выше, выведем, чему равна длина окружность, если известен диаметр d.

$$C = \pi d$$

Если известен радиус r, то формула длины окружности будет выглядеть так:

$$C = 2\pi R$$

Радиус окружности

Радиус окружности - это отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности. Все радиусы имеют одну и ту же длину (по определению).

Определить радиус окружности можно по формуле:

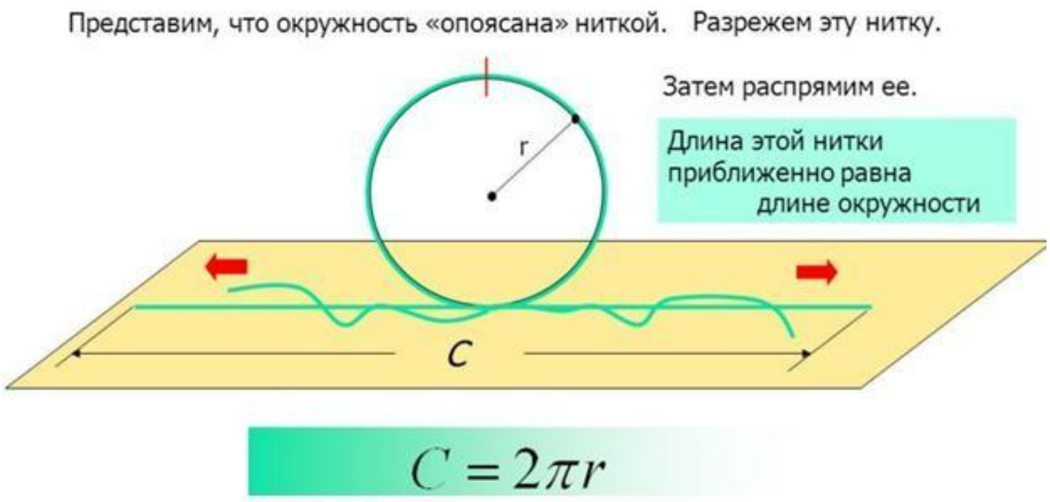
$$r = \frac{c}{2\pi}$$

Диаметр окружности

Хорда - отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром. Центр окружности является серединой любого диаметра. Определить диаметр окружности можно по формуле:

$$d = \frac{c}{\pi}$$

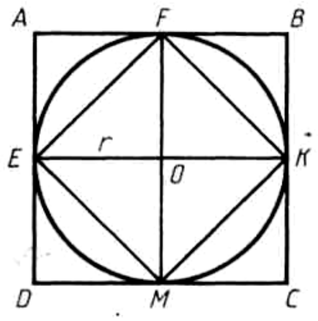
где R - радиус, D - диаметр, π - число π = 3,14......



1.2. Площадь круга

На рисунке изображены круг и два квадрата ABCD и EFKM.

Радиус круга равен r , поэтому длина стороны квадрата ABCD равна 2r, а площадь квадрата $4r^2$. Площадь треугольника EOF вдвое меньше площади



квадрата AEOF, поэтому площадь квадрата EFKM вдвое меньше площади квадрата ABCD, то есть равна $2r^2$.

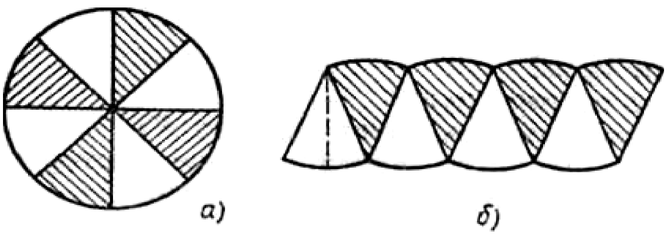
Площадь круга S больше площади квадрата EFKM, но меньше площади квадрата ABCD: $2r^2 < S\text{круга} < 4r^2$

Примерно площадь круга равна $3r^2$. Можно доказать, что **$S = \pi R^2$**

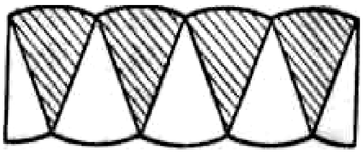
Можно предложить ещё один интересный и понятный способ вычисления площади круга.

Возьмём круг радиуса R и разрежем его на несколько равных секторов (сектор – это часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, соединяющей их концы). Для наглядности половину секторов заштрихуем.

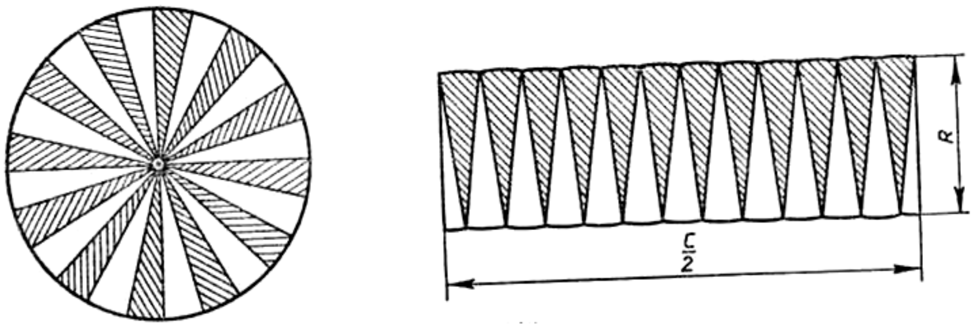
А теперь из этих секторов составим другую фигуру. Боковые стороны фигуры можно сделать вертикальными. Для этого нужно разрезать пополам крайний (например, левый) сектор и приставить одну половинку с другой стороны. Площадь новой фигуры такая же, как у круга. А сама фигура похожа на прямоугольник.



а) б)



Если мы будем разрезать круг на ещё более мелкие секторы, то новая фигура будет ещё более походить на прямоугольник.



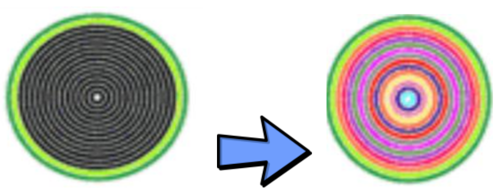
Нам известно, что площадь прямоугольника равно произведению его длины на ширину. Ширина прямоугольника - это радиус данной окружности, значит равна R, а длина образована дугами секторов – закрашенных и не закрашенных. Следовательно, длина равна половине длины окружности, то есть $\frac{C}{2}$. Так как $C = 2\pi R$, то $\frac{C}{2} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$.

Следовательно, площадь прямоугольника равна $S = \pi R \cdot R = \pi R^2$

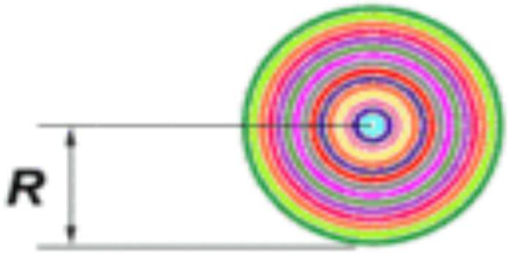
Но у рассматриваемого первоначально круга площадь была такая же. Вот мы и получили формулу для вычисления площади круга $\boldsymbol{S = \pi R^2}$

Другое доказательство площади круга:

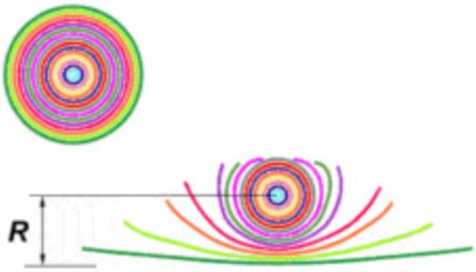
Рассмотрим круг и представим его как бесчисленное множество колец, смещающихся в центр. Для наглядности каждое кольцо представим в цветовой гамме.



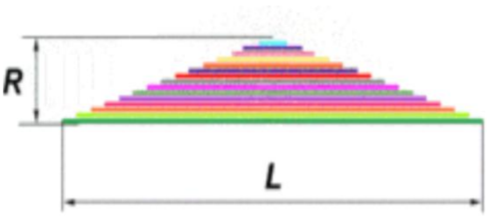
Перед нами представлен круг, состоящий из множества колец, со смещающимся радиусом к центру.



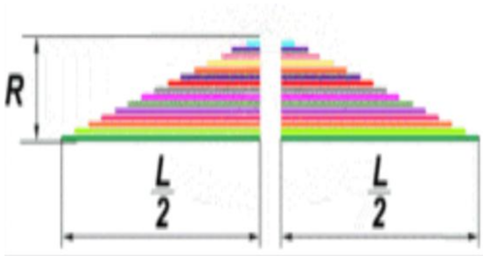
Обозначим радиус этого круга, как показано на рисунке.



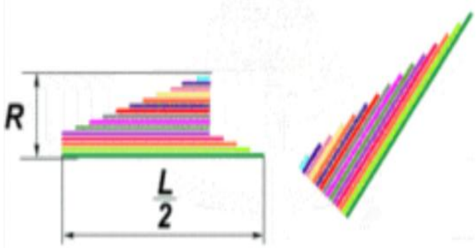
Развернем каждую из окружностей, входящих в восстав круга в свою длину.



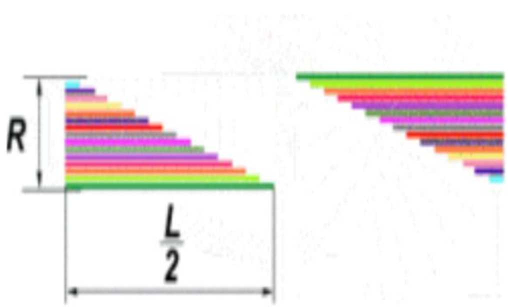
Так как окружности к центру имеют меньший радиус, то множество развернутых окружностей образуют пирамиду. Обозначим длину развернутой окружности L.



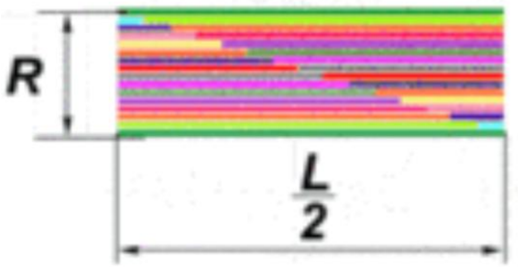
Каждую окружности своей длины разделим на две одинаковые части и обозначим каждую длину части как L/2.



Одну из частей пирамиды, которая образовалась в результате деления перевернем, а в другой части смесим все доли (части) влево как показано на рисунке.

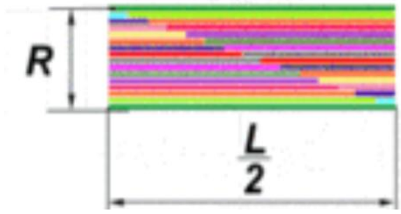


Видим, что в составе некоторых изменений, детали выставились зеркально относительно друг друга, со смещением. Получились две детали одного целого прямоугольника, если их соединить.



Соединив две части, получим известную всем фигуру прямоугольник. У которого обозначена ширина и длина. Можем перейти к нахождению площади прямоугольника.

$$S = R \times \frac{L}{2} = \frac{R \times L}{2}$$



Таким образом, не выбрасывая ни одного звена, у нас получилась фигура разная по форме, но одинаковая по площади. Зная, что $L = 2\pi R,$ то $S = R \cdot \frac{2\pi R}{2} = R \cdot R * \pi = \pi R^2$. Получилась формула для нахождения площади круга.

1.3. Загадочное число ПИ

Число ПИ - самая известная константа в математическом мире, выражающая отношение длины окружности к длине её диаметра. Обозначается буквой греческого алфавита π. Число π также может упоминаться как «круговая постоянная», «архимедова константа» или «число Лудольфа». Впервые обозначением этого числа греческой буквой π воспользовался британский математик Вильям Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало после работ Леонарда Эйлера в 1737 году.

Люди изучают число π уже на протяжении 4000 лет. Одно из первых упоминаний о числе π можно встретить в текстах египетского писца по имени Ахмес (около 1650 года до н. э.), известных сейчас как папирус Ахмеса (Ринда).

В папирусе Ахмеса запечатлена первая попытка рассчитать число π по «квадратуре круга», которая заключалась в измерении диаметра круга по созданным внутри квадратам.

В III веке до н.э. греческий математик Архимед предпринял, вероятно, первую научную попытку вычислить число π. По его подсчетам π приблизительно равнялось 3,14. Он представил это число в виде нескольких дробей. По легенде, Архимед был настолько увлечён расчетами, что не заметил, как римские солдаты взяли его родной город Сиракузы. Когда римский солдат подошел к нему, Архимед закричал по-гречески: «Не трогай моих кругов!». В ответ на это солдат заколол его мечом.

К 200 году н.э. путем вычислений пришли к приближенному значению 3,1416, и к началу VI века н.э. это значение независимо друг от друга подтвердили китайские и индийские математики. В наши дни с помощью мощных компьютеров вычислили миллиарды десятичных знаков числа π. Но, как отмечается в книге «Fractals for the Classroom», при всей важности числа π «трудно найти сферы в научных расчетах, где потребовалось бы больше двадцати десятичных знаков π».

Интересно, но некоторые известные ученые обозначали число π по-разному, например:

- $\frac{22}{7}$ - Архимед,
- $\frac{377}{120}$ - индийский мыслитель и астроном Ариабхат в V веке н. э.,
- $\frac{355}{113}$ - приписывается современнику китайскому астроному Цзу Чунчжи.

Число π появляется в формулах, используемых во многих сферах. Физика, электротехника, электроника, теория вероятностей, строительство и навигация - это лишь некоторые из них. И кажется, что подобно тому как нет конца знакам числа π, так нет конца и возможностям практического применения этого полезного, неуловимого числа π.

Некоторые учёные утверждают, что люди запрограммированы для нахождения закономерностей во всём, потому что только так они могут придать смысл всему миру и самим себе. И именно поэтому нас так привлекает "незакономерное" число π.

На протяжении всей истории изучения числа π, вплоть до наших дней, велась своеобразная погоня за десятичными знаками этого числа. Первый миллион знаков после запятой в числе π состоит из: 99959 нулей, 99758 единиц, 100026 двоек, 100229 троек, 100230 четвёрок, 100359 пятёрок, 99548 шестёрок, 99800 семёрок, 99985 восьмёрок и 100106 девяток.

Леонардо Фибоначчи (около 1220г.) определил три первых точных знака числа π.

1) Андриан Антонис - 6 точных десятичных знаков (в XVI в.);
2) Цзу Чун-чжи (Китай) – 7 десятичных знаков (V в.н.э.);
3) Франсуа Виет – 9 десятичных знаков;
4) Андриан ван Ромен – 15 десятичных знаков (1593г.);
5) аль-Каши – 17 знаков после запятой (XV в.)
6) Лудольф ван Келён – 20 десятичных знаков;
7) Лудольф ван Цейлену – 30 десятичных знаков (1596г.);

В его честь число π было названо современниками "Лудольфово число". Людольф ван Цейлен (род.1540 – ум.1610 гг.) провёл большую часть своей жизни над расчетами первых 36 цифр после запятой числа **π** (которые были назваными «цифрами Лудольфа»). Согласно легенде, эти цифры были выгравированы на его надгробной плите после смерти.

8) Авраам Шарп – 75 десятичных знаков
9) Джон Мечин – 100 десятичных знаков (1706 г.)
10) З. Дазе – 200 десятичных знаков (1844г.)
11) Т. Клаузен – 248 десятичных знаков (1847г.)

12) Рихтер - 330 знаков, З. Дазе - 440 знаков и У.Шенкс – 513 знаков (1853г.)

Но загадка таинственного числа не разрешена вплоть до сегодняшнего дня, хотя по-прежнему волнует ученых.

В сентябре 2010 года Николас Чже из технологической компании «Yahoo» смог определить 2 000 000 000 000 000 цифр π после запятой - два квадриллиона знаков. Если бы эта работа велась на одном компьютере, она потребовала бы 500 с лишним лет. Но Чже использовал технологию так называемых облачных вычислений «Hadoop» — было задействовано «облако» из тысячи компьютеров одновременно. И даже при этом как калькуляцию ушло 23 дня**.**

Забавные факты

1. Первый миллион знаков после запятой в числе Пи состоит из: 99959 нулей, 99758 единиц, 100026 двоек, 100229 троек, 100230 четвёрок, 100359 пятёрок, 99548 шестёрок, 99800 семёрок, 99985 восьмёрок и 100106 девяток.

2. Если рассчитать длину экватора с точностью до 1 см – предполагая, что мы знаем длину его диаметра вполне точно – нам достаточно было бы взять π всего с 9 цифрами после запятой. А взяв вдвое больше цифр (18) , мы могли бы вычислить длину окружности, имеющей радиусом расстояние от Земли до Солнца, с погрешностью не свыше 0,0003 мм (волос в 100 раз толще этой возможной ошибки!)

3. В штате Иллинойс (США) официально принят закон о том, чтобы чисто Пи считать равным 4!

4. Многие математики утверждают, что правильным будет такая формулировка:«круг – фигура с бесконечным количеством углов».

5. Есть такая поговорка английского математика Моргана: «Число π лезет в дверь, в окно и через крышу».

6. 14 марта объявлено Всемирным днем числа π.

Международный праздник «День числа Пи» отмечается 14 марта, которое в американском формате дат (месяц/день) записывается как 3.14, что соответствует приближённому значению числа π. Этот неофициальный праздник придумал в 1987 году физик из Сан-Франциско Ларри Шоу. Примечательно, что Международный день числа «Пи», случайно или умышленно, совпадает с днем рождения одного из наиболее выдающихся физиков современности - днем рождения Альберта Эйнштейна (Albert Einstein). Ученые очень любят этот праздник, отмечая его разнообразными физико-математическими и кулинарными мероприятиями. Кулинария здесь приходится как раз очень кстати - обычно выпекаются большие круглые торты, и вся команда рассаживается вокруг «магического» круга (как правило, с нарисованным «Пи» в центре), угощаясь и рассуждая об относительности этого необычного числа.
Ещё одной датой, связанной с числом π, является 22 июля, которое называется «Днём приближённого числа Пи» (англ. *Pi Approximation Day*), так как в европейском формате дат этот день записывается как 22/7, а значение этой дроби является приближённым значением числа π.

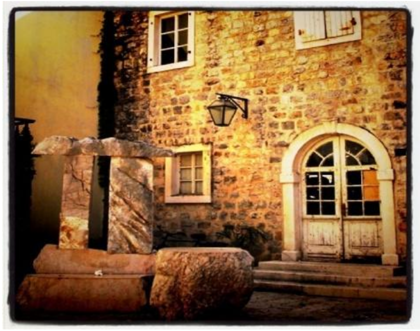
Как пишет "Die Welt", существует и «Пи-клуб», члены которого, являясь фанатами загадочного математического феномена, собирают все новые сведения о π и пытаются разгадать его тайну. Чтобы вступить в него, для начала надо вызубрить наизусть как можно большее количество чисел π после запятой. Пока рекорд принадлежит японцу Акира Харагучи, запомнившему 83 431 цифру.

В Париже под руководством Александра Маккуина (Alexander McQueen) был создан аромат, названный в честь загадочного числа «пи». Поэтому он не мог не получиться неординарным и уникальным, ведь в нем смешалось два мира: английское спокойствие и французская любовь к праздникам. Флакон аромата - отдельное произведение искусства. Он был создан знаменитым дизайнером Сержем Мансо (Serge Mansau) и представляет собой прозрачную пирамиду с вытесненными геометрическими узорами.

Некоторые иллюстрации числа ПИ

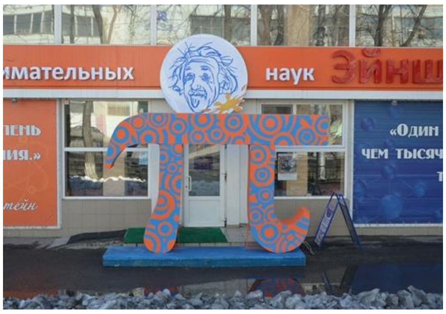
Памятник числу "Пи" на южном побережье Крыма близ поселка Кацивели:

Памятник числу "Пи" в городе Озерске Челябинской области.



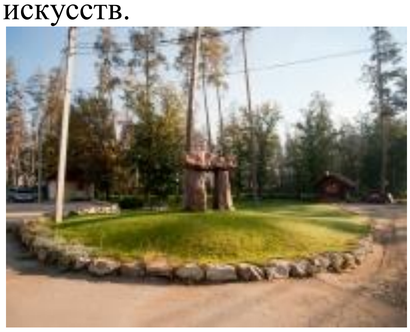
В Черногории, в городе Будва находится еще один памятник числу "Пи":

Один памятник, посвященный числу " Пи " точно стоит в Сиэтле, США, перед Музеем искусств.



Памятник в городе Волгограде.

Еще один памятник, но уже в штате Нью - Джерси, США, в Парке скульптур.



Тольятти. Памятник числу ПИ.

Аромат Pi.

Острова Пи Пи (Пи Пи лей и Пи пи Дон).

1.4. Эксперимент 1. Нахождение длины окружности с помощью нити

Практическая работа состояла в том, чтобы найти отношение длины окружности к её диаметру.

Берём шесть круглых предметов, в частности вазу, несколько стаканов и чашек разных размеров.

С помощью нити измеряем длину окружности.

Поставив предмет на лист бумаги, обводим его карандашом, вырезаем бумажный круг, сгибаем пополам и линейкой измеряем длины диаметров.

Составим таблицу с измеренными данными, последний столбец таблицы вычислительного характера: вычислим с помощью калькулятора отношение длины окружности (столбец 2) к диаметру (столбец 3) .

	Длина окружности (длина нити в см)	Диаметр окружности	Отношение длины окружности к диаметру
1	**2**	**3**	**4**
Измерение №1	30,2	9,5	**3,17894**
Измерение №2	26,5	8,4	**3,15476**
Измерение №3	24	7,6	**3,15795**
Измерение№4	37,7	12,5	**3,11362**
Измерение №5	20,5	6,3	**3,15068**
Измерение № 6	66,7	33,1	**3,12035**

Вывод: Результаты оказались близки к числу 3,14 но с числом 3,14 ни одно измерение не совпало.

Я представила, что если бы мне попалась, например, ваза с круглым дном, диаметром в 100 мм, а длиной окружности 314мм, то при измерении ниткой длины окружности ошибка хотя бы в 1 мм весьма вероятна, тогда число π окажется равным 3,13 или 3,15, а если принять во внимание, что и диаметр вазы нельзя измерить вполне точно, для «пи» получаются довольно широкие пределы: в дробях число от 3,09 до 3,18. И это измерение с погрешностью всего в 1 мм.

Изменение радиуса окружности при изменении её длины на данное число

Пусть первоначальный радиус окружности равен R1метров, тогда первоначальная длина окружности равна C1 = 2πR1 метров.

Увеличим длину окружности на а метров, то есть она станет С2 = С1 + а (метров), тогда увеличится и радиус окружности, он станет равен

$$R_2 = \frac{C_2}{2\pi} = \frac{C_1 + a}{2\pi} = \frac{C_1}{2\pi} + \frac{a}{2\pi} = \frac{2\pi R_1}{2\pi} + \frac{a}{2\pi} = R_1 + \frac{a}{2\pi}$$ (метров)

Найдём увеличение радиуса:

$$R_2 - R_1 = R_1 + \frac{a}{2\pi} - R_1 = \frac{a}{2\pi}$$

Интересно, что в окончательный ответ не входит величина первоначального радиуса. Поэтому результат получится одинаковый для любой окружности. Вообще, разность длин двух концентрических окружностей не зависит от их радиусов, а только от расстояния между ними. Прибавка одного сантиметра к радиусу земной орбиты увеличила бы её длину настолько, насколько удлинится от такой же прибавки радиуса окружность, например, пятака. На этом геометрическом парадоксе (парадокс – истина, кажущаяся неправдоподобной) основано много любопытных задач.

Математические парадоксы

Задача №1 «По экватору»

Вообразите, что Вы обошли Земной шар по экватору. На сколько при этом верхушка Вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик Вашей ноги, если Ваш рост 1,7м?

Ответ: на 10,7 м

Решение. Пусть R – радиус Земного шара, тогда ноги прошли путь 2πR. Верхушка же головы при этом прошла путь 2π(R + 1,7). Разность пройденных расстояний равна $2\pi(R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi R + 3,4\pi - 2\pi R = 3,4\pi \approx 3,4 \cdot 3,14 = 10,676 \approx 10,7$, то есть рост человека, умноженный на 2 π.

Задача №2 «Земной шар и мышь»

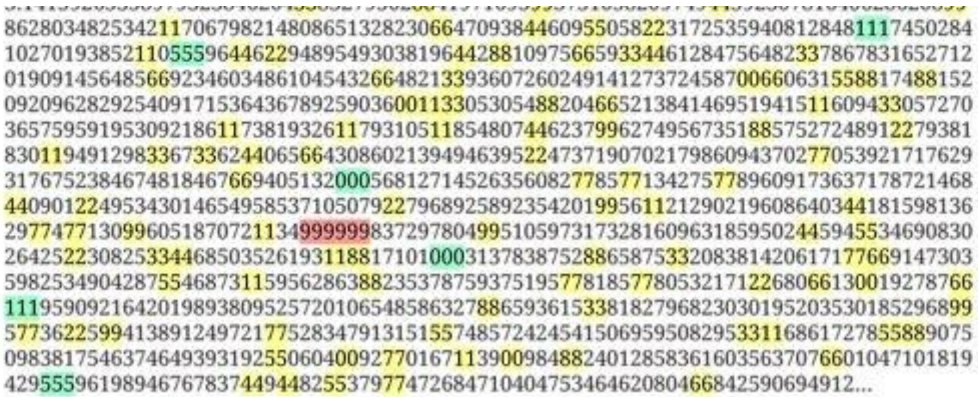
Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к её длине 1м, то сможет ли между проволокой и землёй проскочить мышь?

Ответ: да

Решение: Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса: что значит прибавка в один метр по сравнению с 40 миллионами метров земного экватора. В действительности же величина промежутка равна (100 : 2π)см ≈ 16см. Не только мышь, но и крупный кот проскочит в такой промежуток.

1.5. Точка Фейнмана или несколько интересных фактов про число пи

Точка Фейнмана - последовательность из шести девяток, начинающаяся с 762-ой цифры десятичной записи числа пи. Носит имя американского физика Ричарда Фейнмана (1918—1988), который сказал на одной лекции, что хотел бы запомнить цифры числа пи до этой позиции, чтобы заканчивать рассказ кому-либо словами «девять, девять, девять, девять, девять, девять и так далее», как бы предполагая, что значение π рационально


8628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284
1027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712
0190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152
0920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270
3657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381
8301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629
3176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468
4409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136
2977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830
2642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
5982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766
1119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899
5773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075
0983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076601047101819
429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842590694912...

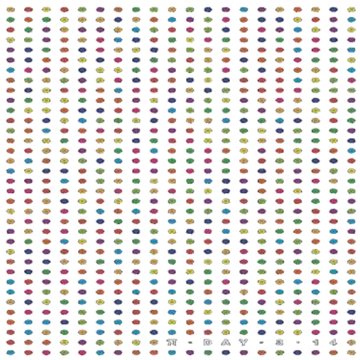
На изображении сверху представлены первые 1300 цифр числа πи. Две повторяющиеся цифры помечены жёлтым, три - зелёным, а шесть - красным.

Из случайно выбранных чисел частота встречаемости шести цифр подряд равна приблизительно 0,08 % (на данный момент неизвестно, является ли π нормальным числом)

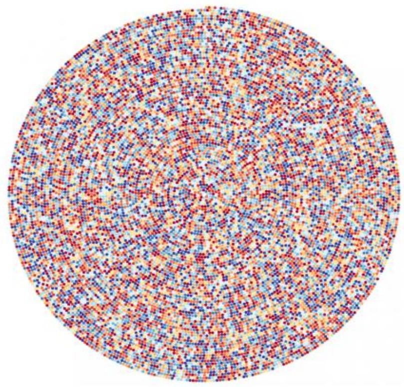
Следующая комбинация шести цифр подряд, опять девяток, в числе пи встречается на позиции 193 034. На позиции 222 299 можно найти шесть восьмёрок. Нуль повторяется шесть раз в позиции 1 699 927. Последовательность же «12345678» встречается уже в позиции 186 557 266. Последовательность цифр «141592», которая находится сразу после запятой, повторяется в позиции 821 582. Последовательность «123456789», можно встретить уже только на позиции 523 551 502.

1.6. Шесть удивительных визуализаций числа ПИ

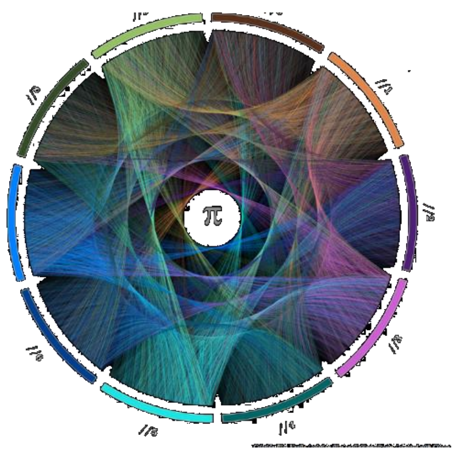
1. Одним из таких специалистов стал Мартин Крживинский (Martin Krzywinski) – биоинформатик, который при помощи компьютерной науки и статистики анализирует геном человека. Вот как выглядит его визуализация числа Пи:



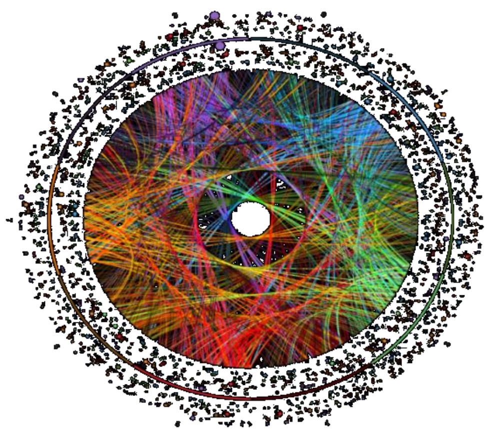
2. На рисунке каждая цифра числа представлена точкой определенного цвета: 3 – оранжевого, 1 – красного, 4 – желтого и т.д. Затем Крживинский сложил цветные точки в спираль. Переход от центра круга к его внешнему краю – первые 13 689 цифр Пи:



3. Совместно с канадским ученым Кристианом Илисом Василом (Christian Ilies Vasile), который называет себя «художником по случаю», Крживинский также создал серию представлений Пи в виде круга, где цифры соединены друг с другом разноцветными «струнами». Художник соединил тройку с единицей, затем с четверкой и так далее, меняя цвет с каждой новой цифрой.



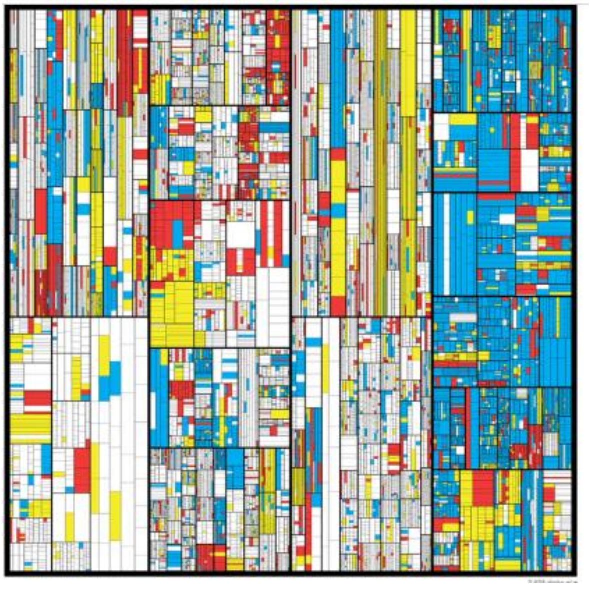
4. Следующая визуализация изображает тот же процесс, однако в ней авторы вынесли повторяющиеся цифры (точки) на внешний край круга. Чем больше раз цифра повторяется, тем больше точка:



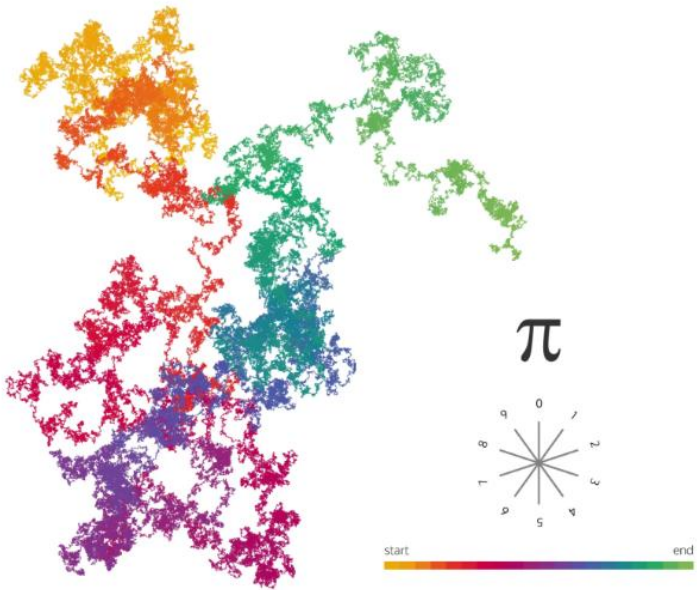
5. Ниже – новая визуализация

6. Но что больше всего раздражает математиков –

Крживинского, датированная 2015 годом и представленная в виде древовидной карты (treemap). Сначала он поделил лист тремя вертикальными линиями (цифра 3); затем первую секцию разделил одной горизонтальной линией (цифра 1); вторую секцию разграничил четырьмя горизонтальными линиями (цифра 4).



им не известно, действительно ли последовательность цифр в Пи является случайной. «Противоречие между порядком и случайностью – самый изысканный аспект Пи», — считает Строгац. Эта случайность отображена в другой визуализации, созданной астрономом и аналитиком Надие Бремер (Nadieh Bremer). В ней она изображает, как Пи «преодолевает барьеры» в 100 000 цифр:



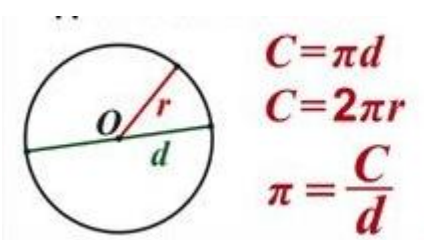
2. Иллюстрации теоретической значимости темы «Длина окружности. Площадь круга» в окружающей действительности

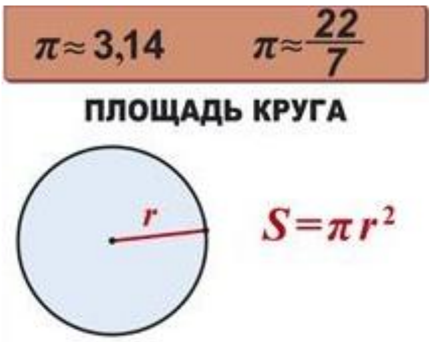
2.1. Окружность в архитектуре. Подсчеты

Исследуя геометрические объекты и узоры Самарского деревянного зодчества, мы обратили внимание на то, что в системе объектов, изображенных в деревянной архитектуре, в достаточной мере встречаются фигуры, напоминающие окружность, круг. Поэтому дальнейшим нашим исследованием являлась не только удивительная история узора, но и его математический смысл. Так, мы задались целью, измерив объекты, определить их площадь, то есть посчитать чему равны площади представленных окружностей.



Вместе с учителем, в рамках темы «Длина окружности и площадь круга», изучив все формулы, позволяющие сделать расчеты, мы приступили к решению поставленной задачи.





Изображение

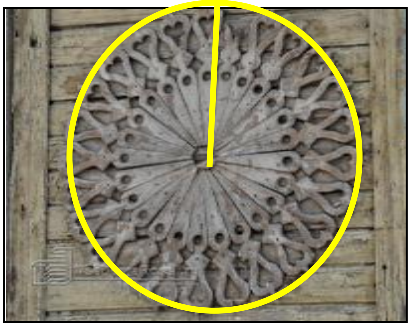
Расчеты

Длина окружности:

$$r = 39\ см$$

$$\pi = 3{,}14$$

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 39 = 245\ см$$



Площадь круга

$$r = 39\ см$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 39 \cdot 39 = 4775\ см^2$$
$$\approx 48 дм^2$$

Длина окружности:

$$r = 27\ см$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 27 \approx 169\ см$$

Площадь круга

$$r = 27\ см$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 27 \cdot 27 = 2289\ см^2$$
$$\approx 23 дм^2$$

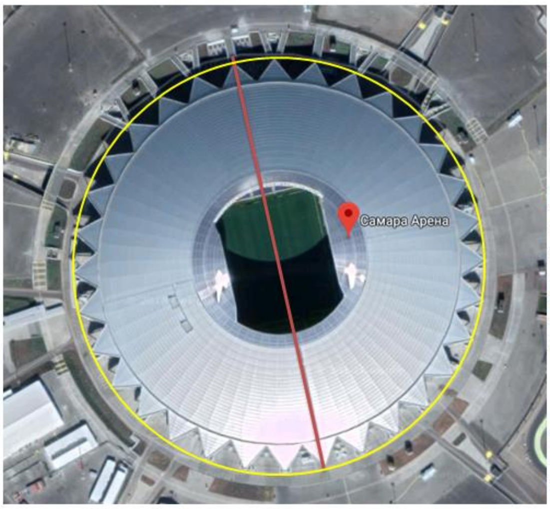
Длина окружности:

$$r = 29\ см$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 29 \approx 182\ см$$

Площадь круга

$$r = 29\ см$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 29 \cdot 29 = 2640\ см^2$$
$$\approx 26 дм^2$$

2.2. Окружности в достопримечательностях городов. Интересные экскурсии.



Конструкция сферической оболочки стадиона состоит из 32 стальных консолей, каждая из которых весит по 277 тонн.
Вместе они создают купол *диаметром 612 метров.*

Найдите длину купола, зная, что П=3,14. Ответ округлите до целых.

Найдите площадь круга, зная, что диаметр площади Ленина составляет 38 м.

Решение:

$$d = 38\,м$$
$$d = r \div 2 = 19\,м$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 19 \cdot 19 = 1133{,}54\,м^2$$

Кольцо Московского шоссе

Длина сооружения составляет 333 м. Найдите диаметр окружности и площадь построения. Диаметр и площадь округлите до целых.

Решение:

1) Найдем диаметр построения:

$$c = 333\,м$$
$$c = \pi d = 333м$$
$$\pi = 3{,}14$$
$$3{,}14 \cdot d = 333м$$
$$d = 333м \div 3{,}14 = 106м$$
$$r = d \div 2 = 53м$$

2) Найдем площадь построения: $S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 53 \cdot 53 = 8820м^2$

Топ «Колесо обозрения»

1. 117 метров. Diamond and Flower Ferris Wheel

Колесо имеет диаметр 111 метров.

$$d = 111\ м$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 111м \approx 348{,}54м$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 55{,}5^2 =$$
$$= 3{,}14 \cdot 3080{,}25$$
$$= 9671{,}985м^2$$

Очередной высотный «бриллиант» был открыт в 2001 году в токийском парке Kasai Rinkai. Спустя годы колесо обозрения закрыли, но и по сей день оно все же остается самым «высотным» аттракционом в Японии.

2. 120 метров. Sky Dream Fukuoka

Колесо имеет диаметр 112 метров.

$$d = 112 \text{ м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 112\text{м} \approx 351{,}68\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 56^2 == 3{,}14 \cdot 3136 = 9847{,}04\, м^2$$

Очередная крутящаяся «высотка» долгое время показывала людям японский город Фукуока с высоты полета птиц. Проработала она недолго - с 2002 по 2009 год. «Небесная мечта», а именно так и переводится название аттракциона, считается самым большим классическим обзорным колесом в мире.

3. 120 метров. Zhengzhou Ferris Wheel

Колесо имеет диаметр 112 метров.

$$d = 112 \text{ м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 112\text{м} \approx 351{,}68\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 56^2 == 3{,}14 \cdot 3136 = 9847{,}04\, м^2$$

Высотный аттракцион был открыт в 2004 году в китайском городе Чанша. А это что-нибудь, да значит для мирового небесного господства.

4. 135 метров. London Eye

Колесо имеет диаметр 120 метров.

$$d = 120 \text{ м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 120\text{м} \approx 376{,}8\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 60^2 = 3{,}14 \cdot 3600 = 11304\, м^2$$

Еще одно большое колесо обозрения открыли в Лондоне в 2000 году. Оно удерживало статус «громадины небесной» вплоть до 2006-го года.

5. 160 метров. Star of Nanchang

Колесо имеет диаметр 153 метра.

$$d = 153\text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 153\text{м} \approx 480{,}42\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 76{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 5852{,}25 = 18376{,}065\, м^2$$

Это колесо построили в Китае, в провинции Цзянси. Оно всего на 5 метров ниже и меньше аналогичного сингапурского аттракциона.

6. 165 метров. Singapore Flyer

Колесо имеет диаметр 150 метров.

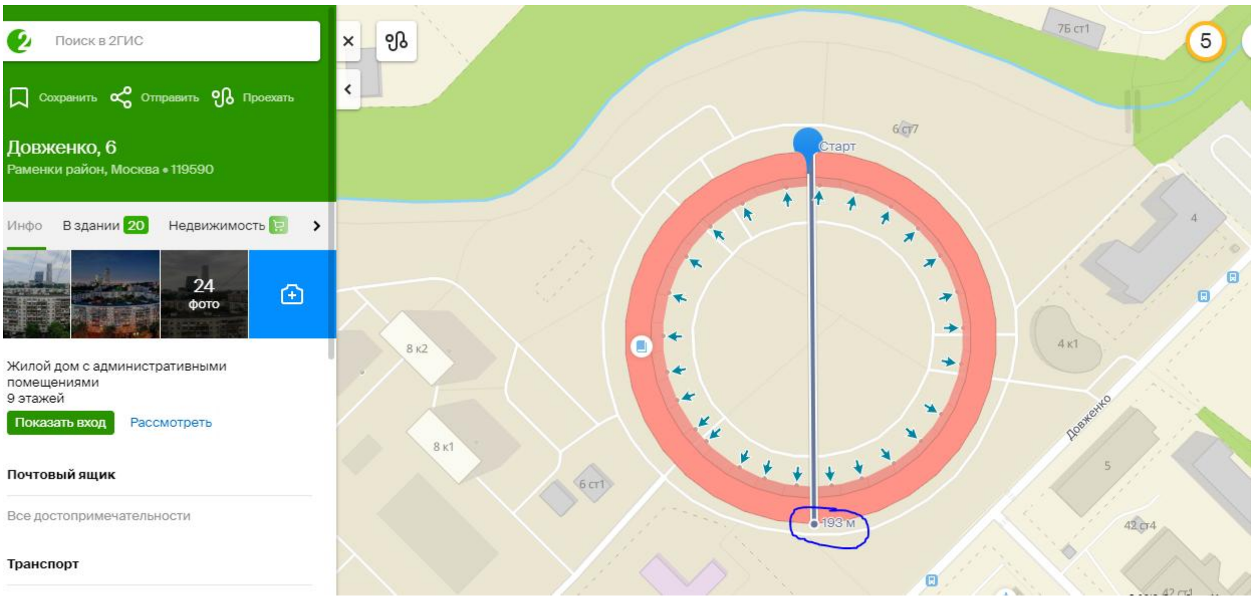
$$d = 150\text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 150\text{м} \approx 471\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 75^2 = 3{,}14 \cdot 5625 = 17662{,}5\, м^2$$

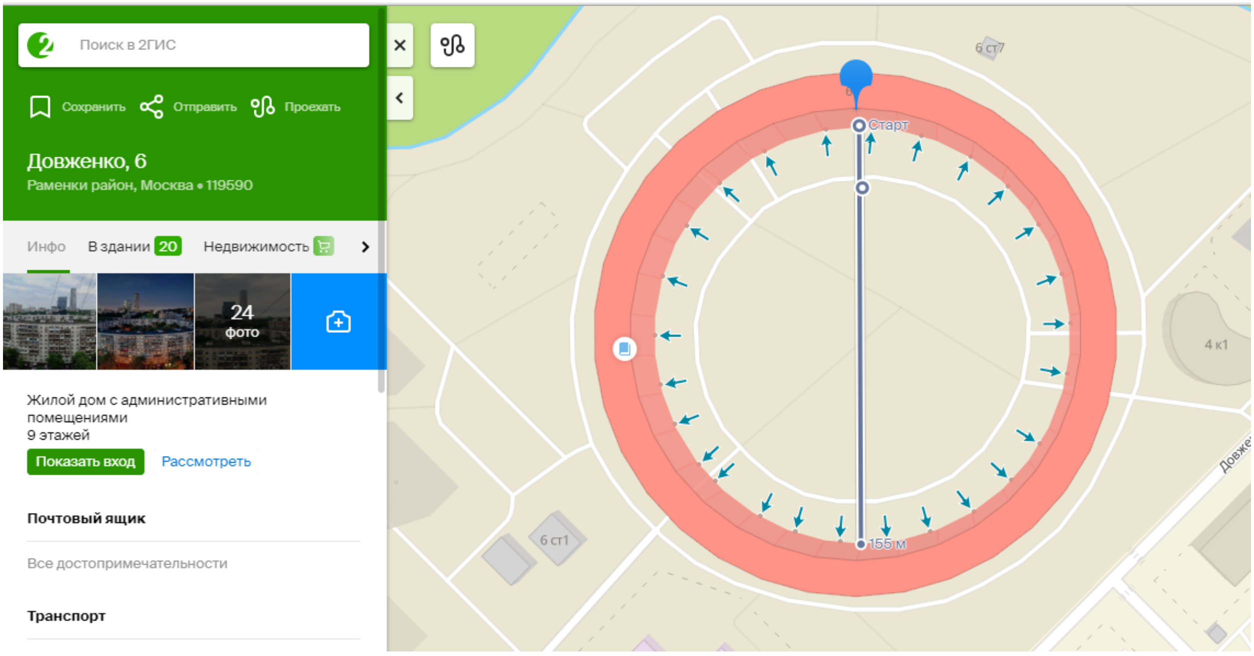
Это колесо обозрения работает в Сингапуре с 2008 года. В данный период оно является самым большим обзорным аттракционом, существующим в мире.

Необычный дом в г. Москва. Работа с картой.

Замер на карте: диаметр всего круга равен 193 м.



Диаметр двора: $d = 155$ м



Площадь кольца: $S = \pi R^2{}_1 - \pi R^2{}_2 = \pi(96{,}5^2 - 77{,}5^2) = \pi(96{,}5 -$

77,596,5+77,5=3,14·19·174≈10380,84м2

$$R_1 = 193 \div 2 = 96{,}5\text{м}$$

$$R_2 = 155 \div 2 = 77{,}5\text{м}$$

Круглые дома в Москве - жилые панельные девятиэтажные дома кольцевой в плане формы, возведённые на западе Москвы в 1970-х годах по экспериментальному проекту советского архитектора Евгения Стамо и инженера Александра Маркелова. Здания диаметром в 155 метров были построены из типовых деталей панельной серии I-515/9М.

Московский цирк Никулина на Цветном бульваре

Диаметр манежа - 13 метров.

$$d = 13\text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 13\text{м} \approx 40{,}82\text{м}$$

$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 13^2 = 3{,}14 \cdot 169 = 530{,}66\,м^2$$

Часы Биг-Бен в Лондоне

Диаметр циферблата – 7 метров.

$$d = 7\ \text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 7\text{м} \approx 21{,}98\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 7^2 = 3{,}14 \cdot 49 = 153{,}86\ м^2$$

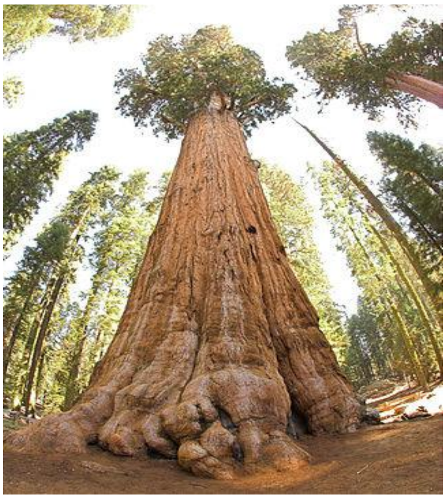
2.3. Окружности в мире живой природы. Далекие и близкие берега.

Недалеко от Пензы находится озеро, которое местные жители называют Мертвым. Там совершенно нет жизни, но это не самая главная его особенность. Дело в том, что Мертвое озеро представляет собой идеальный круг. Кажется, что окружность диаметром 450 метров начертили гигантским циркулем. При этом ученые говорят, что человек здесь ни при чем, просто так сложилось в природе.

Озеро имеет диаметр 450 метров.

$$d = 450\text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 450\text{м} \approx 1413\text{м}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 225^2 = 3{,}14 \cdot 50625 = 158\,962{,}5\ м^2$$



Существует интересный подвид секвой - секвойядендроны, отличающиеся меньшей высотой, но большим диаметром стволов. Самая объёмная секвойя в мире относится именно к этому подвиду, это 83,8-метровый "Генерал Шерман"

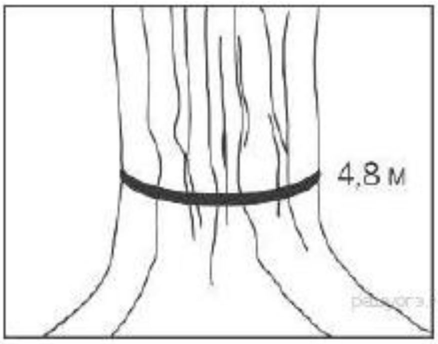
Диаметр основания секвойи Генерал Шерман равен 11,1 метров.

$$d = 11{,}1\ \text{м}$$

$$c = \pi d = 3.14 \cdot 11{,}1\text{м} \approx 34{,}854 \text{ м (в обхвате).}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 11{,}1^2 = 3{,}14 \cdot 123{,}21 = 389{,}8794\, м^2$$

Похожая задача из ОГЭ по математике. Сайт «Решу ОГЭ»

Обхват ствола секвойи равен 4,8 м. Чему равен его диаметр (в метрах)? Ответ округлите до десятых.



Поскольку длина окружности выражается через её диаметр формулой $c = \pi d$ имеем $D = \frac{C}{\pi} = \frac{4{,}8}{3{,}14} \approx 1{,}5$ м.

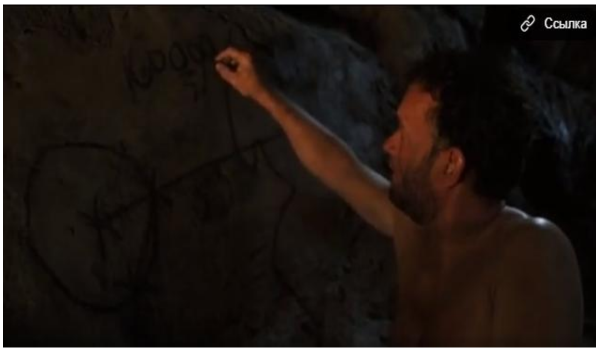
Аризонский кратер. Мексика.

Представляет собой гигантскую земляную чашу диаметром 1219 метров.

$$d = 1219 \text{ м}$$
$$c = \pi d = 3.14 \cdot 1219 \approx 3827{,}66 \text{ м} \approx 3{,}8 \text{ км}$$
$$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 3{,}8^2 = 3{,}14 \cdot 14{,}44 = 45{,}3416\, км^2$$

Математика может пригодиться всегда. Рассмотрим пример из кинофильма «Изгой», где герою пригодились знания по математике в том числе и определение радиуса поиска.

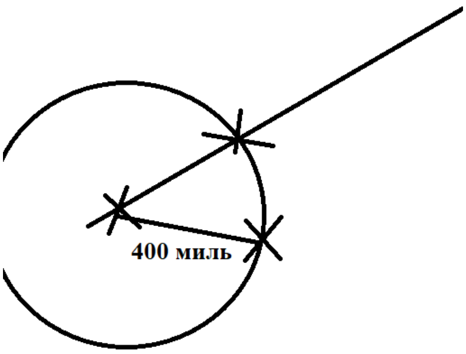
Можно привести ряд примеров, когда математика помогла человеку дать понять важные вещи: радиус поиска, если ты на необитаемом острове, количество веревок для плота, если брусьев, например 22 штуки, рассчитать время, когда ветер будет дуть от берега, чтобы плот мог отплыть. Иногда даже на простых примерах из жизни, можно реализовать плодотворный образовательный процесс.

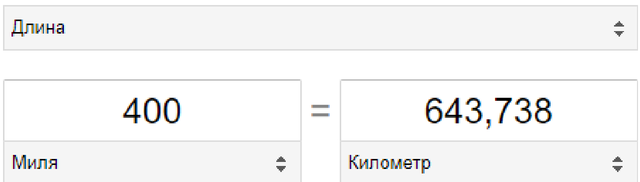


Мы летели из Мемфиса 11,5 часов со скоростью около 175 миль в час. Но мы потеряли связь, нас носило штормом около часа….. Наш герой проводит построение и получает окружность радиуса 400 миль.

$$R = 400 \text{ миль}$$

$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 400^2 = 3{,}14 \cdot 160000 = 502400 \text{ миль}^2$ - зона поиска нашего героя.



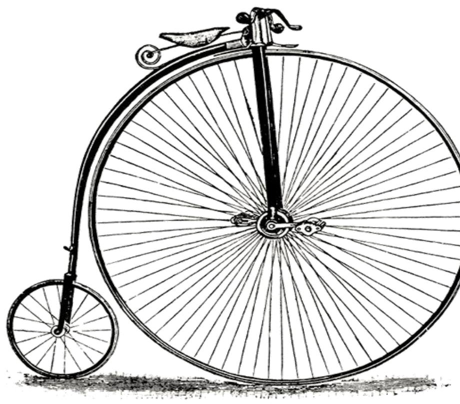


$$R \approx 673,7 \text{ км}$$

$S = \pi R^2 = 3{,}14 * 673{,}7^2 = 3{,}14 \cdot 453871{,}69 = 1\,425\,157{,}1 \text{ км}^2$ - зона поиска нашего героя.

2.4. Не изобретая свой велосипед. Длина колеса.

1870-1885 годы. Время «пауков», т. е. высоких велосипедов с разновеликими колесами. Также они назывались «Hige bicycle» и «Penny-farting». Желание изобретателей увеличить расстояние, пройденное велосипедом за один оборот колеса, приводило к увеличению диаметра ведущего колеса. Ограничивать этот рост могла только длина ног ездока. Прогресс «пауков» шел по пути уменьшения веса и увеличения надежности узлов машин. Рассмотрим некоторые иллюстрации и рассчитаем некоторые задачи, связанные с ними.



Задача № 1. Найдите длину большего и наименьшего колеса, если известно, что радиус большего колеса в 2,5 раза больше радиуса наименьшего. Диаметр большего колеса составляет 28 дюймов.

1 дюйм = 2,54 см.

Решение: определим для начала величину радиуса (в см) для большего и наименьшего колес. Известно, что диаметр большего колеса составляет 28 дюймов. Определим радиус большего колеса: $r = d : 2 = 14$ дюймов.

Переведем дюймы в см: $14 \text{ дюймов} = 14 \cdot 2{,}54 \text{ см} = 35{,}56 \text{ см}$. Известно, что радиус меньшего колеса в 2,5 раза меньше, то есть составляет величину: $35{,}56 \text{ см } : 2{,}5 = 14{,}224 \text{ см}$ - радиус меньшего колеса. Итого: $R = 35{,}56$ см и $r = 14{,}224$ см, где R - радиус большего колеса, r - радиус меньшего колеса.

Определим длину колес по формуле: $c = 2\pi R$, где C - длина большего колеса, c- длина меньшего колеса.

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 35{,}56 = 223{,}3168$ см- *длина большего колеса*

$c = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 14{,}224 = 89{,}32672$ см - *длина меньшего колеса*

Задача № 2. Определите, какое колесо делает больше оборотов и на сколько больше, если велосипед проехал 1 км.

Решение: В предыдущей задаче мы находили длину в см каждого из колес.

По сути, длина окружности это есть путь, который преодолевает колесо за один оборот. Поэтому, зная дистанцию и длину окружности, можно определить количество оборотов, сделанное этим колесом.

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 35{,}56 = 223{,}3168$ см- *длина большего колеса.*

$c = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 14{,}224 = 89{,}32672$ см - *длина меньшего колеса.*

Так как в задаче мы имеем дело с десятичными числами с большими долями, то расчеты будем производить с погрешностью.

1 км = 100 000 см.

Большое колесо: $100\,000 : 223{,}3168 \approx 448$ оборотов.

Меньшее колесо: $100\,000 : 89{,}32672$ ≈1119 оборотов.

Колесо меньшего радиуса будет крутиться быстрее, чтобы успеть пройти прокрутку колеса большего радиуса, поэтому оборотов будет маленькое колесо делать больше во столько раз, во сколько раз будет больше радиус большего колеса радиуса меньшего колеса. То есть: $1119 : 448 \approx 2{,}4977$ раз, т.е. 2,5 раза.

Таким образом, колесо с меньшим радиусом сделает на 671 оборот больше колеса с большим радиусом.

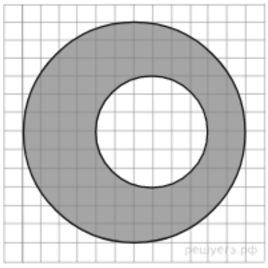
Задача № 3. Определите укол между двумя соседними спицами.

Решение: Вся окружность составляет 360 градусов.

Спицы разделяют все колесо по секторам: в данном случае всего 14 спиц. Таким образом, угол между двумя соседними спицами найдем, если разделим 360 градусов на количество этих спиц, то есть: $360 : 14 \approx 25{,}71^0$.

2.5. Решение задач ОГЭ на элементы нахождения длины окружности и площадь круга

Задача № 1



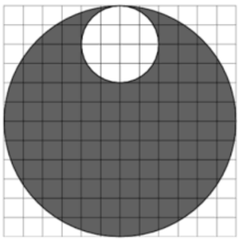
$R_1=6$ $S_1= \pi r^2=3{,}14*(6^2)= 3{,}14*36= 113{,}04$

$R_2=3$ $S_2= \pi r^2=3{,}14*(3^2)= 3{,}14*9= 28{,}26$

$S_3=S_1-S_2=113{,}04-28{,}26= 84{,}78$

Ответ: 84,78

Задача № 2



$S_3=S_2-S_1$

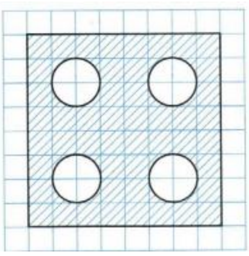
$R_1=2$ $S_1= \pi r^2=3{,}14*(2^2)= 3{,}14*4 = 12{,}56$

$R_2=6$ $S_2= \pi r^2=3{,}14*(6^2)= 3{,}14*36=113{,}04$

$S_3=113{,}04-12{,}56=100{,}48$

Ответ: 100,48

Задача № 3



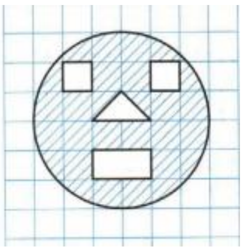
$a=8$ $S_1=a^2=(8^2)=64$

$R=1$ $S_2= \pi r^2=3{,}14*(1^2)=3{,}14*1=3{,}14$

$S_3=S_1-S_2=64-3{,}14=61{,}86$

Ответ: 61,86

Задача № 4



$R=3$

$S_1= \pi r^2=3{,}14*3^2=3{,}14*9=28{,}26$(круг)

$a=2;\ h=1$ $S_2=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}*2*1=1$(треугольник)

$a_1=1;\ a_2=1$ $S_{3,4}=a^2=1^2+1^2=2$(два квадрата)

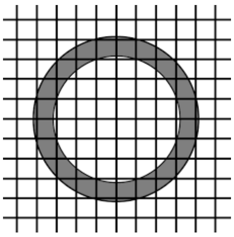
$a=2;\ b=1$ $S_5=a*b=2*1=2$(прямоугольник)

$S_6=S_2+S_3+S_4+S_5=1+1+1+2=5$

$S_7=S_1-S_6=28{,}26-5=23{,}26$

Ответ: 23,26

Задача № 5



$S_3=S_1-S_2$

$R_1=4$ $S_1=3{,}14*(4^2)= 3{,}14*16=50{,}24$

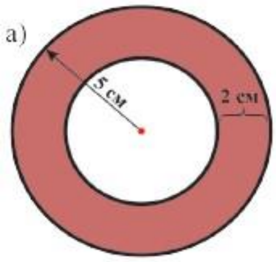
$R_2=3$ $S_2=3{,}14* (3^2)=3{,}14*9=28{,}26$

$S_3=50{,}24-28{,}26=21{,}98$

Ответ: 21,98

Задача № 6

$R_1=7$

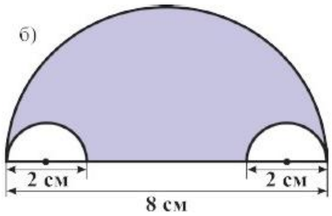


$R_2=5$

$$S=\pi {r^2}_1-\pi {r^2}_2=\pi({r^2}_1-{r^2}_2)$$
$$=\pi(49-25)=\pi\cdot 24=75{,}36$$

Ответ: 75,36

Задача № 7



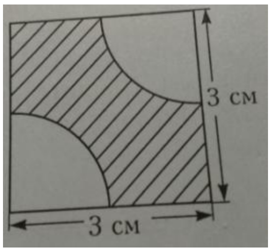
$R_1=1$ $S_1=\pi r^2$=3,14* (1^2)=3,14*1=3,14

$R_2=4$ $S_2=\pi r^2$=3,14*(4^2)* $\frac{1}{2}$= 3,14*16*$\frac{1}{2}$= $\frac{50{,}24}{2}$ = 25,12

$S_3=S_2-S_1$=25,12-3,14=21,98

Ответ: 21,98

Задача № 8



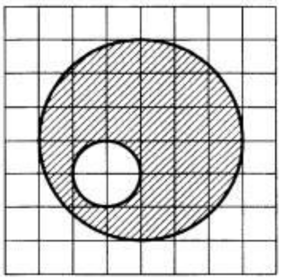
a=3 $S_1=a^2$=(3^2)=9

R=1,5 $S_2=\pi r^2$=3,14*($1{,}5^2$)=3,14*2,25=7,065 ≈ 7,1

$S_3=S_1-S_2$=9 -7,1=1,9

Ответ: 1,9

Задача № 9



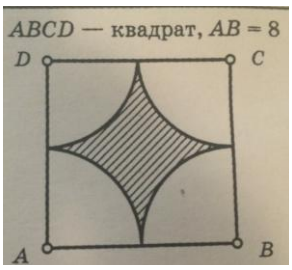
$R_1=3$ $S_1=\pi r^2$ =3,14*(3^2)=3,14*9=28,26

$R_2=1$ $S_2=\pi r^2$ =3,14*(1^2)=3,14*1=3,14

$S_3=S_1-S_2$=28,26-3,14=25,12

Ответ: 25,12

Задача № 10



a=8 $S_1=a^2$=(8^2)=64

R=2 $S_2=\pi r^2$=3,14*(2^2)=3,14*4=12,56

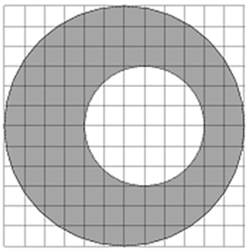
$S_3=S_1-S_2$=64-12,56=51,44

Ответ: 51,44

Задача № 11

R=3 $S_1=\pi r^2$ =3,14*(3^2)=3,14*9=28,26

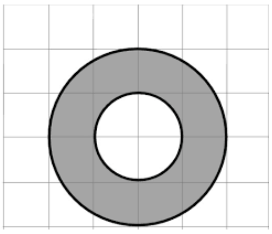
R=6 $S_2=\pi r^2$ =3,14*(6^2)=3,14*36=113,04



$S_3=S_2-S_1=113,04-28,26=84,78$

Ответ: 84,78

Задача № 12



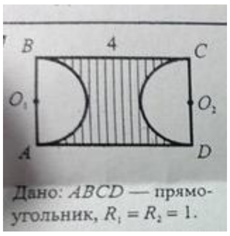
$R_1=2$ $S_2=\pi r^2=3,14*(2^2)=3,14*4=12,56$

$R_2=1$ $S_2=\pi r^2=3,14*(1^2)=3,14*1=3,14$

$S_3=S_1-S_2=12,56-3,14=9,42$

Ответ: 9,42

Задача № 13



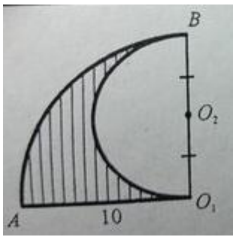
$a=4;\ b=2$ $S=a*b=4*2=8$

$R_1=1$ $S_2=\pi r^2=3,14*(1^2)=3,14*1=3,14$

$S_3=S_1-S_2=8-3,14=4,86$

Ответ: 4,86

Задача № 14



$R_1=10$

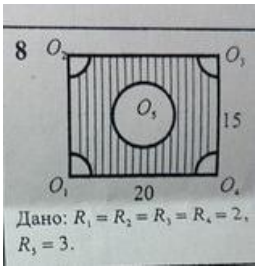
$S_1=\pi r^2*\frac{1}{4}=3,14*(10^2)*\frac{1}{4}=3,14*25=78,5$

$R_2=5$ $S_2=\pi r^2*\frac{1}{2}=3,14*25*\frac{1}{2}=3,14*12,5=39,25$

$S_3=S_1-S_2=78,5-39,25=39,25$

Ответ: 39,25

Задача № 15



$a=20;b=15$ $S_1=a*b=20*15=300$

$R_1=3$ $S_2=\pi r^2=3,14*(3^2)=3,14*9=28,26$

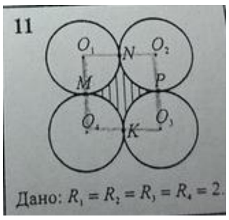
$R_2=2$ $S_3=\pi r^2=3,14*(2^2)=3,14*4=12,56$

$S_4=S_2+S_3=28,26+12,56=40,82$

$S_5=S_1-S_4=300-40,82=259,18$

Ответ: 259,18

Задача № 16



$R_1=R_2=R_3=R_4=2$

$S_1=\pi r^2=3,14*(2^2)=3,14*4=12,56$

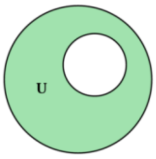
$S_2=a^2=4^2=16$

$S_3=S_2-S_1=16-12,56=3,44$

Ответ: 3,44

Задача № 17

Внутри большой окружности расположена маленькая, радиус которой в 2,5 раза меньше, чем радиус большой окружности. Найдите отношение площади зеленой области U к площади круга, ограниченного большой окружностью.



Обозначим радиус меньшей окружности за r, тогда радиус большей окружности 2,5r.

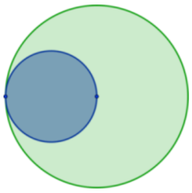
Площадь круга, ограниченного окружностью радиуса R, равна πR^2.

Площадь меньшего круга равна πR^2, а площадь большего круга равна $\pi(2{,}5r)^2 = 6{,}25\pi R^2$. Площадь области U равна разности площадей большего и меньшего кругов и равна$6{,}25\pi R^2 - \ \pi R^2 = 5{,}25\pi R^2$.

Искомое отношение площадей равно: $\frac{5{,}25\pi R^2,}{6{,}25\pi R^2,} = 0{,}84$.

Задача № 18

Две окружности касаются внутренним образом так, что один из радиусов большей окружности совпадает с диаметром меньшей окружности (смотри рисунок). Найдите радиус большей окружности, если площадь зеленой области равна 48π.



Обозначим R - радиус большей окружности и одновременно диаметр меньшей. Тогда площадь зеленой области S можно выразить через площади кругов следующим образом : S= $\pi R^2 - \frac{\pi R^2,}{4} = \frac{3}{4}\pi R^2$. Так как S=48 π, из этого следует, что $\frac{3}{4}\pi R^2 = 48\ \pi$. Из этого можно утверждать, что $R^2 = 64,$ *то есть* $R = 8$.

2.6. Разбор 1-5 задачи из демоверсии 2019 года ОГЭ по математике на расчеты по теме «Длина окружности и площадь круга»

Часть 1.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.

Для маркировки автомобильных шин применяется единая система обозначений (см. рис. 1). Первое число означает ширину ***B*** шины (ширину протектора) в миллиметрах (см. рис. 2)

Второе число - высота боковины H в процентах к ширине шины.

Рис. 1

Последующая буква означает конструкцию шины. Например, буква ***R*** значит, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции.

За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). По сути, это диаметр ***d*** внутреннего отверстия в шине. Таким образом, общий диаметр колеса ***D*** легко найти, зная диаметр диска и высоту боковины.

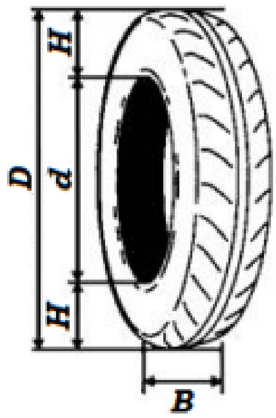


Рис. 2

Последний символ в маркировке - индекс скорости. Возможны дополнительные маркировки, означающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования и тип дорожного покрытия, где рекомендуется использовать шину.

Завод производит автомобили и устанавливает на них шины с маркировкой 185/70 R14. Завод допускает установку шин с другими маркировками. В таблице показаны разрешенные размеры шин.

Ширина шины \ Диаметр диска, дюймов	14	15	16
185	185/70	185/65	–
195	195/70	195/65, 195/60	195/60
205	–	205/60	205/55, 205/50

1. Какой наименьшей ширины шины можно устанавливать на автомобиль, если диаметр диска равен 16 дюймов?

Ответ: ____________.

2. Найдите диаметр колеса автомобиля, выходящего с завода. Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: ____________.

3. На сколько миллиметров увеличится диаметр колеса, если заменить шины, установленные на заводе на шины 195/70 R14?

Ответ: ____________.

4. На сколько метров увеличится путь, пройденный автомобилем, когда колесо сделает 1000 оборотов, если заменить шины установленные на заводе шинами с маркировкой 195/70 R14? Округлите результат до целых.

Ответ: ____________.

Решение:

<u>1 задание.</u> Анализируя данные таблицы, можно утверждать, что наименьшее удовлетворяющее значение, подходящее под все требования задачи, является ширина, равная 195.

Ширина шины \ Диаметр диска, дюймов	14	15	16
185	185/70	185/65	–
195	195/70	195/65, 195/60	195/60
205	–	205/60	205/55, 205/50

<u>2 задание.</u> Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно внимательно изучить текст задачи и все показатели в том числе и схему. Анализируя данные, можно утверждать, что переменные в задании следующие:

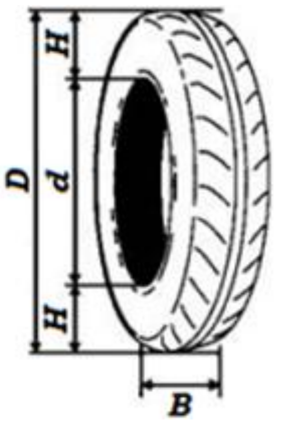
B- ширина шины в мм;

H - высота боковина, выражена в процентах, показывающая отношение высоты боковины к ширине шины;

R - тип шины. Радиальная шина;

R14 или d - диаметр диска колеса. Выражено в дюймах. 1 дюйм - 25,4 мм.

D - общий диаметр колеса.



Таким образом, общий диаметр колеса можно найти, зная высоту боковины и диаметр диска.

Завод выпускает шины с маркировкой **185/70 R14.**

Это означает, что шина радиальная, 70% - это есть отношение высоты боковины к ширине шины. Шина радиальная, а диаметр диска равен 14 дюймов.

Из всего заключаем, что необходимо знать для решения задачи два компонента: диаметр диска и высоту боковины.

$$d = 14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6 \text{ мм}$$

$$D = d + 2H$$

$$H = ?$$

Диаметр диска, дюймов / Ширина шины	d= 14	15	16
B= 185	185/70	185/65	–
195	195/70	195/65, 195/60	195/60
205	–	205/60	205/55, 205/50

Отношение высоты боковины к ширине колеса составляет 70%, то есть H $= \frac{70}{100} \cdot 185 = 129{,}5$ мм. У колеса в диаметре высота боковины используется два раза, поэтому $D = d + 2H = 355{,}6 + 2 \cdot 129{,}5 = 614{,}6$ мм.

Ответ: 614,6 мм.

<u>3 задание.</u>

В задании 3 предлагается сравнить шины двух типов: шину с параметрами **185/70 R14 и 195/70 R14.** Просят показать на сколько увеличится диаметр колеса при замене заводской на другую.

Рассмотрим диаметр колеса с параметрами: **185/70 R14. Известно, что** $D_1 = d + 2H = 355{,}6 + 2 \cdot 129{,}5 = 614{,}6$ мм. Из условия в пункте задачи № 2.

Рассмотрим диаметр колеса с параметрами **195/70 R14.**

Ширина шины \ Диаметр диска, дюймов	d=14	15	16
185	185/70	185/65	–
B=195	195/70	195/65, 195/60	195/60
205	–	205/60	205/55, 205/50

$$d = 14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6 \text{ мм}$$

$$H = \frac{70}{100} \cdot 195 = 136{,}5 \text{ мм.}$$

$$D_2 = d + 2H = 355{,}6 + 2 \cdot 136{,}5 = 628{,}6 \text{ мм}$$

Разница в диаметрах: $\mathrm{D} = \mathrm{D}_2 - \mathrm{D}_1 = 628{,}6 \text{ мм} - 614{,}6 \text{ мм} = 14 \text{ мм.}$

Ответ: 14.

4 задание.

В задаче 4 спрашивают на сколько метров увеличиться путь, при условии, что колесо сделает 1000 оборотов, при условии, что будут сравниваться две поездки в 1000 оборотов с колесами разных параметров.

Для решения задачи необходимо найти длину окружности (колеса) с покрышкой маркировки 185/70 R14 и 195/70 R14.

Для этого необходимо знать диаметры колес.

Пусть D_1 - диаметр покрышки 185/70 R14.

$$D_1 = d + 2H = 355{,}6 + 2 \cdot 129{,}5 = 614{,}6 \text{ мм.}$$

Тогда D_2 - диаметр покрышки 195/70 R14.

$$D_2 = d + 2H = 355{,}6 + 2 \cdot 136{,}5 = 628{,}6 \text{ мм.}$$

C_1 обозначим длину колеса 185/70 R14.

C_2 обозначим длину колеса 195/70 R14.

$\mathrm{C}_1 = \pi D_1 = \pi \cdot 614{,}6$ -*длина одного оборота.*

$\mathrm{C}_2 = \pi D_2 = \pi \cdot 628{,}6$ -*длина одного оборота.*

$1000 \cdot \mathrm{C}_1 = 1000 \cdot \pi \cdot 614{,}6 = 614600 \cdot \pi$ - длина в 1000 оборотов в мм.

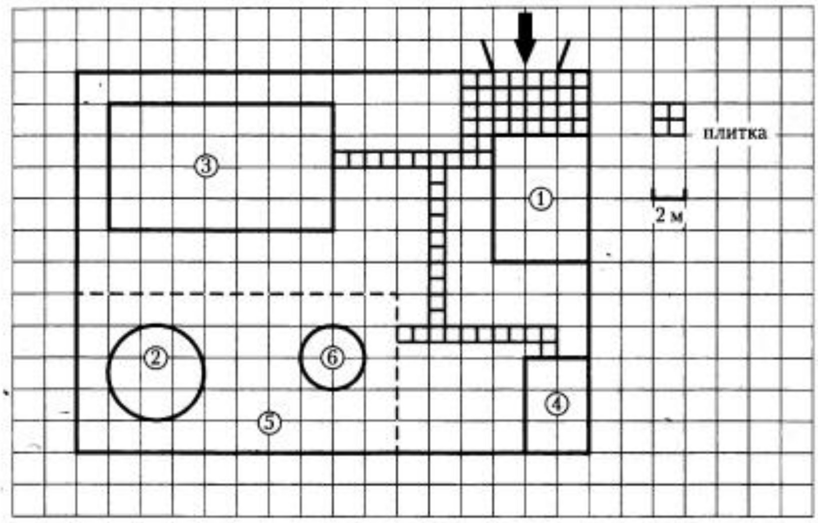
$1000 \cdot \mathrm{C}_2 = 1000 \cdot \pi \cdot 628{,}6 = 628600 \cdot \pi$ - длина в 1000 оборотов в мм.

Разница в длине при смене колес: $\mathrm{C} = \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 = 628600 \cdot \pi - 614600 \cdot \pi$ $= \pi(628600 - 614600) = 14000 \cdot 3{,}14 = 14\text{м} \cdot 3{,}14 = 43{,}96\text{м.} \approx 44\text{м.}$

Ответ: 44 м.

Разбор 1-5 задачи из демоверсии 2019 года ОГЭ по математике на расчеты по теме «Длина окружности и площадь круга»

1.18. Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1.18.1—1.18.5.



На плане изображено домохозяйство по адресу с. Перевёрткино, 6-й Грушевый пер, д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляется через единственные ворота.

При входе на участок напротив ворот находится гараж, а справа — жилой дом. Площадь, занятая гаражом, равна 48 кв. м. Прямо за гаражом расположен сарай. Помимо гаража, жилого дома и сарая, в глубине участка, имеются газон, обозначенный на плане цифрой 5. На газоне находятся круглая беседка и большой надувной бассейн, который обозначен цифрой 2. Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м × 1 м. При въезде на участок имеется площадка, вымощенная той же плиткой.

1.18.1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк перенесите последовательность четырёх цифр.

Объекты	сарай	беседка	гараж	жилой дом
Цифры				

1.18.2. Найдите общую площадь, вымощенную тротуарной плиткой (площадка перед гаражом и дорожки вместе). Ответ дайте в квадратных метрах.

1.18.3. Найдите расстояние между противоположными углами участка (длину диагонали) в метрах.

1.18.4. Во сколько раз площадь бассейна больше площади беседки?

В структуре задач ОГЭ по математике с достаточной частотой встречаются задачи на подсчет площади круга или длины окружности. Рассмотрим задачу **1.18.4.** По условию задачи требуется определить во сколько раз площадь беседки круглой формы меньше площади бассейна круглой формы. Или наоборот. Таким образом, возникает необходимость в правильных расчетах площади круга.

Рассмотрим площадь бассейна. На рисунке определяем радиус круга. $R_1 = 3$ м. Определим радиус беседки: $R_2 = 2$ м. Таким образом, зная радиусы, мы определим искомые площади для определения их отношения.

$$S_1 = \pi {R_1}^2 = 9\pi$$

$$S_2 = \pi {R_2}^2 = 4\pi$$

Площадь бассейна больше площади беседки в $\frac{S_1}{S_2}$ раз. То есть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9\pi}{4\pi} = 2{,}25$ раз.

2.7. Задачи со спицами и часами на ОГЭ по математике

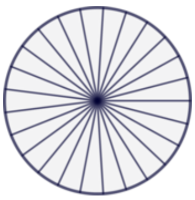
Задача № 1

Колесо имеет 5 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите угол, который образуют две соседние спицы. Ответ дайте в градусах.

Решение: Градусная мера окружности равна 360^0. Каждый угол между двумя соседними спицами – это центральный угол, который равен дуге, на которую он опирается. Следовательно, 5 равных углов разбивают окружность на 5 равных дуг. Значит, градусная мера каждой дуги, следовательно и угла, равна $360^0 : 5 = 72^0$.

Задача № 2

Колесо имеет 25 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите угол, который образуют две соседние спицы. Ответ дайте в градусах.



Решение: Градусная мера окружности равна 360^0. Каждый угол между двумя соседними спицами – это центральный угол, который равен дуге, на которую он опирается. Следовательно, 25 равных углов разбивают окружность на 25 равных дуг. Значит, градусная мера каждой дуги, следовательно, и угла, равна 360^0:25=14,4^0.

Задача № 3

На рисунке для примера изображено колесо с пятью спицами. А сколько спиц в колесе, в котором угол между любыми двумя соседними спицами равен 8^0?

Решение: Градусная мера окружности равна 360^0. Каждый угол между двумя соседними спицами – это центральный угол, который равен дуге, на которую он опирается. Следовательно, n равных углов разбивают окружность на n равных дуг. Если градусная мера каждого угла, а значит и дуги, равна 8^0 то $8^0 \cdot m$ $=360^0$, откуда m=45.

Задача № 4

Найдите меньший из углов, который образуют минутная и часовая стрелки часов в 7:00. Ответ дайте в градусах.

Заметим, что деления циферблата разбивают окружность на 12 равных дуг, градусная мера каждой равна 360^0:12=30^0. Наименьшее “расстояние” между часовой и минутной стрелками – это 5 таких дуг, то есть 5·30^0=150^0.

Задача № 5

Найдите угол, который минутная стрелка описывает за две минуты. Ответ дайте в градусах.

Заметим, что деления циферблата разбивают окружность на 12 равных дуг, градусная мера каждой равна 360^0:12=30^0. Расстояние между двумя соседними делениями для минутной стрелки соответствует пяти минутам. Следовательно, одной минуте соответствует дуга 30^0:5=6^0. Тогда двум минутам соответствует дуга

12^0.

Задача № 5

На какой угол (в градусах) поворачивается минутная стрелка, пока часовая стрелка проходит 2^0?

Заметим, что деления циферблата разбивают окружность на 12 равных дуг, градусная мера каждой равна 360^0:12=30^0 Расстояние между двумя соседними делениями соответствует для часовой стрелки 1 часу, или 60 минутам. Следовательно, если 30^0соответствует 60 минутам, то 2^0соответствует 4 минутам (пропорция 30:2=60:x). Значит, минутная стрелка будет двигаться 4 минуты. Расстояние между двумя соседними делениями для минутной стрелки соответствует 5 минутам. Следовательно, если 5 минут – 30^0, то 4 минуты – 24^0. Следовательно, минутная стрелка повернется на 24^0.

Задача № 6

На сколько градусов повернется Земля вокруг своей оси за 8 часов? Считать, что за 24 часа Земля совершает полный оборот вокруг своей оси.

Полный оборот вокруг своей оси – это поворот на 360^0. Так как 8 часов – это треть от 24 часов, то за 8 часов Земля повернется на 360^0:3=120^0.

Заключение

В процессе работы над проектом нам удалось отыскать несколько интересных визуализаций, практических ситуаций, в которых необходимо было применить теоретические знания, что позволило мне утверждать, что знания, полученные нами, можно применить на практике даже в ситуациях, от которых зависит исход важного дела. В работе мы представили как теоретические описание с доказательством отдельных утверждений, так и практические иллюстрации. Доказали длину окружности, площадь круга, показались связь диаметра и длины окружности посредством выявления числа пи экспериментальным путем. Рассмотрели интересные факты про число пи, показали его интересные иллюстрации с точки зрения и художественных образов. Исследовательским компонентом работы стали задачи, которые можно встретить в повседневной жизни на применение изученной теории. Более того, некоторые задачи на данную теорию встречаются и в ОГЭ по математике, что также является на сегодня актуальным, поскольку осуществляется подготовка к экзаменам и такие задачи тоже необходимо уметь решать, что и вызвало необходимость их решать.

Продуктом нашего исследования будет является журнал по теме «Длина окружности и площадь круга», где представлены интересные задания и иллюстрации, показывающие и доказывающие необходимость применения данной теории в практических условиях.

Многообразие форм представления данной теории позволяет лучше усваивать необходимый материал и помогает решать многие геометрические задания с похожим содержанием. Мы показали, что наглядно-образный прием подачи материала на конкретных примерах и ситуациях, позволяет усваивать его не только интересней, но и качественней.

Таким образом, считаем, что цель исследования достигнута, задачи решены, гипотеза подтверждена.

Список литературы

1. Атанасян «Геометрия 7-9», Москва, «Просвещение», 1998
2. Виленки Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбург С.И. Математика, 6 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Мнемозина, 2014г.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. С. 32.
4. Гусев В.А. Геометрия 5-6 классы: Учеб. пособие.- М.: ООО «Русское слово», 2002. С.118-142.
5. Епифанов Е. «Портрет» числа π. Коллекция головоломок // Квант, научно - популярный журнал . №4, 2014г.
6. Игнатьев Е. И. «Математическая смекалка». Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы. Москва, «Омега», 1994.
7. Кессельман В.С. «Занимательная МАТЕМАТИКА» - М.: АСТ: Астрель, 2008. — 224 с
8. Колосов Д.Г. Первый шаг в робототехнику. Практикум для 5-6 кл. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.
9. Панчищина В.А., Гельфман Е.Г. Геометрия, Томск 1999.
10. Перельман Я. И.«Занимательная геометрия», Москва, "Тезис", 1994
11. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика., М: 1989 г
12. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия, Москва «Дрофа», 2000.
13. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия: Учеб. пособие для учащихся 5-6 классов. – М.: МИРОС, 1995. С. 72—83.
14. Шеврин Л.Н и др. «Математика, 5-6, учебник-собеседник», Москва, «Просвещение», 1989.
15. Якушева Г.М. «Большая энциклопедия школьника» -М.: Слово, Эксмо, 2006.