Муниципальное образовательное учреждение

«Гимназия №12 Краснооктябрьского района Волгограда»

Исследовательская работа на тему:

**Метод рекуррентных соотношений**

Выполнил:

Учащийся 10 «В» класса

Передирей Артем Павлович

Научный руководитель:

Учитель математики

Рожкова Олеся Валерьевна

Волгоград 2021

**СОДЕРЖАНИЕ**

**ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………………………….3**

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ……………………………………………………………………...5

* 1. Рекуррентные соотношение в школьном курсе математики…………………5
  2. Последовательность Фибоначчи………………………………………………..7

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ……………………………………………………………………...9

2.1. Примеры решения задач методом рекуррентных соотношений……………..9

2.2. Применение метода рекуррентных соотношений при решении задания № 19 в ЕГЭ по профильной математике и решении олимпиадных задач……………………………………………………………………………………11

ЗАКЛЮЧЕНИЕ………………………………………………………………………..16

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…………………………………………………………….17

**ВВЕДЕНИЕ**

В школьном курсе математики, начиная с девятого класса учащиеся знакомятся с арифметической и геометрической прогрессией, которая построена на поиске n члена через предыдущий член последовательности. Далее в задачах по теории вероятности и комбинаторике также можно увидеть похожую последовательность действий.

Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений*, который является удобным в применении при решении задач.

К сожалению, учителя редко пользуются данным соотношением, так как в базовых учебниках такого понятия не вводится, хотя подобным образом некоторые задачи решаются.

В данной работе будет подробно рассмотрен метод рекуррентных соотношений и приведены примеры решения комбинаторных задач данным методом, а также представлено решении задач, которые встречаются под номером 19 в ЕГЭ по профильной математике и решение задач олимпиадного уровня.

**Объект исследования:** рекуррентные соотношения в школьном курсе математики.

**Предмет исследования:** решение задач методом рекуррентных соотношений.

**Цель исследования** состоит в том, чтобы показать применение метода рекуррентных соотношений на примере решения задач на числовые последовательности и комбинаторных задач.

**Задачи:**

1. Дать определение рекуррентным соотношениям;
2. Определить место рекуррентных соотношений в школьном курсе математики;
3. Определить последовательность Фибоначчи;
4. Показать решение некоторых задач под №19 из ЕГЭ по профильной математике методом рекуррентных соотношений.
5. Составить подборку задач, которые решаются методом рекуррентных соотношений и будут полезны при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня.

**Методы исследования.** Анализ и синтез научной литературы, поиск информации в электронных ресурсах, систематизирования информации.

**ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ.**

* 1. **Рекуррентные соотношение в школьном курсе математики.**

Перед тем как ответить на вопрос о месте рекуррентных соотношений в школьном курсе математики, обратимся к определению рекуррентного соотношения.

*«Говорят, что последовательность задана рекуррентным соотношением, если указана формула, в одной части которой находится только n-й член последовательности, а в другой – буквенное выражение, содержащее предыдущие члены последовательности.»*

Не составит труд заметить сходство рекуррентного соотношения с основными формулами арифметической и геометрической прогрессией.

Арифметическая прогрессия задается одним из рекуррентных соотношений. Числовую последовательность *а1,а2,а3,….аn,…* называют арифметической прогрессией, тогда, когда для всех натуральных n выполняется равенство

Из этого следует, что

Число называют разностью арифметической прогрессии.[12]

*Например:*

1) Натуральный ряд чисел *1,2,3,4,…,n,…* является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии .

2) Последовательность целых отрицательных чисел *-1,-2,-3,…,-n,-*арифметическая прогрессия с разностью .

3) Последовательность *3,3,3,…,3,…-*арифметическая прогрессия с разностью

Формула *n-го* члена арифметической прогрессии:

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии равна

Геометрическая прогрессия также задается рекуррентным соотношением. Числовая последовательность *b1,b2,b3,….bn,…*является геометрической прогрессией*,* если для всех натуральных n выполняется равенство:

– рекуррентная формула, где – некоторое число, не равное 0 – это и есть геометрическая прогрессия.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем q1 равна

[3]

Таким образом делаем вывод, что прогрессия является рекуррентным соотношением, с данной темой школьники встречаются в 9 классе.

Уже в старших классах учащиеся знакомятся с разделом «Комбинаторика», в котором метод рекуррентных соотношений имеет место, но редко используется учителями при объяснении материала.

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и  принципы  комбинаторики  используются  в  теории  вероятностей для подсчета  вероятности  случайных  событий и,  соответственно, получения законов распределения случайных величин.

При решении многих комбинаторных задач пользуются методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов.

Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений* (от латинского recurrere — возвращаться). Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу об *п* предметах к задаче об *n -1* предметах, потом к задаче об *n - 2* предметах и т. д.

Последовательно уменьшая число предметов, можно дойти до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Можно сделать вывод о том, что рекуррентные соотношения встречаются в школьном курсе математики при решении задач на арифметическую и геометрическую прогрессию, а так же в старших классах при решении комбинаторных задач.

* 1. **Последовательность Фибоначчи.**

Известную многим задачу о разведении кроликов приводил итальянский математик Леонардо Фибоначчи в 1202 году, данная задача была первой в истории математики, приведшей к рекуррентному соотношению, в котором *k*-й член выражается через предыдущие члены.

**Задача 2.**

*«Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько пар кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов и ни одна пара за год не погибла?»*

*Решение. Определим условия задачи.*

Условия задачи таковы: У вас есть пара кроликов - он и она. Сколько пар кроликов может родится через год, с учетом следующих условий:

* Нужно начать с кролика самца и кролика самки, которые только что родились.
* Кролики достигают половой зрелости через один месяц.
* Период беременности кролика - один месяц.
* После достижения половой зрелости самки рожают каждый месяц.
* Самка рожает одного самца-кролика и одну самку-кролика.
* Кролики не умирают.

Покажем решения данной задачи.

* В первом месяце была одна пара: P(1)=1 пара.
* Во втором месяце по условию новорожденные не появились: Р(2)=1 пара.
* В третьем месяце появился приплод: Р(3) = 2 пары.
* В четвертом месяце первая пара дает приплод, а вторая нет: Р(4)=3.
* В пятом месяце приплод дают две первых пары: Р(5) = 5

Таким образом выводим последовательность Фибоначчи Можем вывести формулу: (k)=, которая является рекуррентным соотношением. То есть, к началу каждого месяца имеем пары, которые родились месяц назад и не могут размножаться . И пары которые родились два месяца назад, которые принесут приплод

Продолжим пользоваться формулой, чтобы найти ответ на вопрос, сколько пар кроликов будет через год, т.е. к началу 13 месяца.

Продолжаем решать задачи, используя последовательность. Решение вы можете увидеть на экране.

Ответ: 233

С помощью решения данной задачи получилось вывести последовательность Фибоначчи (k)=,, которая является основой теории рекуррентных соотношений и помогает при решении задач. [1]

**ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ.**

**2.1. Примеры решения задач методом рекуррентных соотношений.**

После того, как стал понятен принцип метода рекуррентных соотношений, не составит труда решить комбинаторные задачи с использованием последовательности Фибоначчи.

**Задача 1. Наклеивание марок.**

*«Сколькими способами можно наклеить на конверт в одну линию марки на 40 рублей, используя марки достоинством в 5, 10, 15 и 20 рублей (расположения, отличающиеся порядком марок, рассматриваются как различные; число марок не ограничено)»*

Решение:

Имеем марки стоимостью только 5, 10, 15 и 20 рублей. Значит рекуррентное соотношение запишем путем исключения каждого вида марок.

Рекуррентное соотношение имеет вид:

По условию задачи нужно заплатить сумму 40 рублей, значит:

Для начала воспользуемся перебором.

(Данное условие справедливо для всех задач, так как учитывается исход, когда не происходит никаких действий.)

(Так как марок стоимостью 1 рубль нет)

P

P

P

P

Ответ: 108. [4]

**Задача 2. Размен купюр.**

*«Мужчине необходимо снять в банкомате 800 рублей. Банкомат выдает купюры номиналом в 100, 200, 500 рублей. Сколько комбинаций различных купюр может получить мужчина?»*

Решение.

Запишем рекуррентное соотношение:

Тогда

Ответ: 44.

**Задача 3.**

*«Для того, чтобы украсить торт необходимы следующие продукты: мастика стоимостью 150 рублей, шоколадная глазурь – 100 рублей и разноцветная посыпка стоимостью – 50 рублей. Сколькими способами можно украсить торт на сумму 250 рублей, не учитывая количество определенных продуктов»*

*Решение.*

Рекуррентное соотношение будет иметь вид:

*Ответ: 14.*

Таким образом, были приведены одни из самых популярных комбинаторных задач на поиск количества различных комбинаций. Можно заметить, что методом рекуррентных соотношений решать задачи просто и интересно.

**2.2. Применение метода рекуррентных соотношений при решении задания № 19 в ЕГЭ по профильной математике и решении олимпиадных задач.**

Уже в старших классах учащиеся активно готовятся к сдачи профильного ЕГЭ по математике. Самым последним и одним их самых сложных заданий является №19, который основан на применении знаний о числах и их свойствах, а также о последовательности чисел. При решении некоторых задач целесообразно использовать метод рекуррентных соотношений.

Далее приведены примеры решения некоторых задач с использованием метода рекуррентных соотношений.

**Задача 1.** *Целые числа от 1 до n записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и записанного под ним есть точный квадрат при n = 1996.*

*Решение:*

Используем метод сведения к аналогичной задаче для меньшего *n.*

Разобьем решение задачи на части. Ближайшее число после 1996 из которого можно вынести корень – 2025. Нам необходимо, чтобы числа снизу не повторялись. , значит пишем А под ними запишем числа , там образом будем получать каждый раз .

Таким образом сведем задачу к задаче для Следующим числом после 28, имеющим квадрат является 49, получим , запишем , а под ними .

Таким образом сводим задачу до . Берем числа , так как необходимо под ними записать числа . Свели задачу к случаю , осталось только расположить число от 0 до 15, в порядке убывания, т. е. .

**Задача 2.** Последовательность состоит из натуральных чисел, причем при всех натуральных .

1. Может ли выполнятся равенство
2. Может ли выполняться равенство
3. При какой наибольшем натуральном может выполнятся равенство

Решение:

1. Пусть Тогда
2. Предположим, что Тогда и где Имеем . Противоречие.
3. Пример последовательности 3, 3, 6, 9, 15, 24, … показывает, что равенство может выполняться при Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и

Пусть и . Предположим Тогда

Имеем

Так как . Следовательно, Полученное противоречие показывает, что при равенство выполняться не может. [6]

**Олимпиадные задачи для 10 класса.**

Кроме подготовки к ЕГЭ некоторые ученики старших классов заинтересованы в участии в олимпиадах по математике. И, естественно, в задачах олимпиадного уровня нередко можно встретить задачи, которые решаются методом рекуррентных соотношений.

**Задача 1***:*

*Сколько существует строк длины 10, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?*

*Решение:*

Обозначим через число строк длины *n*. Ясно, что (это строки 0 и 1), (это строки 01, 10 и 11).

*Будем искать рекуррентное соотношение, задающее последовательность*

Предположим, что .

Пусть число строк длины n, которые начинаются с единицы

Вторым числом в строке может быть либо 0, либо 1. То есть к единице присоединяется другая строка длины .

Поэтому строк, начинающихся с единицы, столько же, сколько существует строк длины

Теперь число строк длины n, которые начинаются с 0. Значит, следующим числом обязана быть 1, а к единице присоединяются любая строка длины Запишем рекуррентное соотношение

С учетом начальных условий, что

=5

Ответ: 144 способа записать строку из 10 чисел, так что бы рядом не стояло два нуля.

**Задача 2.**

*Сколько слов длины 5 можно составить из букв так, чтобы буквы не стояли радом?*

Решение:

Пусть – число слов длины .

*,* тогда для возможно составить различные комбинации из пар чисел, таких, что не стоят рядом, то есть

Обозначим число слов длины , которые начинаются с букв соответственно.

Значит,

Пусть слово длины начинается с буквы , значит можно приставить любое слово, без буквы *,* то есть длины *,* где на втором месте может быть либо *,* либо *.*

*.*

Аналогично, если слово начинается с буквы *:*

*.*

А после буквы может располагаться любая из трех букв, поэтому

*.*

Далее необходимы преобразования.

Подставим в первоначальную формулу.

*.*

Таким образом получили рекуррентное соотношение вида:

*.* Зная, что *,* находим остальные члены последовательности.

*Ответ: 99.*

Исходя из всего вышесказанного, делаем вывод о том, что

1. Метод рекуррентных соотношений достаточно часто применяется при решении школьных задач, например, при решении комбинаторных задач и задач на последовательности чисел.
2. Методом рекуррентных соотношений можно решать задачи под №19 в ЕГЭ профильного уровня по математике, примеры которых были приведены.
3. При подготовке к олимпиаде по математике целесообразно изучить принцип использования метода рекуррентных соотношений, так как задачи на поиск последовательности встречаются достаточно часто.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Таким образом, было дано определение рекуррентного соотношения, которое представляет собой последовательность в одной части которой находится только n-й член последовательности, а в другой – буквенное выражение, содержащее предыдущие члены последовательности.

Не трудно было догадаться, что с такой последовательность школьники встречаются в девятом классе при изучении арифметической и геометрической последовательности. Далее уже в старших классах школьники знакомятся с методом сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов, которое называется *методом рекуррентных соотношений*. Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу об *п* предметах к задаче об *n -1* предметах, потом к задаче об *n - 2* предметах и т. д.

Чтобы показать принцип работы метода был приведен пример решения задачи «О кроликах Фибоначчи» с помощью которой получилось определить последовательность Фибоначчи. Далее, пользуясь последовательностью Фибоначчи, показаны примеры решения некоторых комбинаторных задач.

Далее были приведены примеры практического применения метода рекуррентных соотношений на примере решения задач под номером 19 из профильного ЕГЭ по математике, а также решены некоторые задачи олимпиадного уровня.

Таким образом делаем вывод о том, что метод рекуррентных соотношений имеет большое значение в школьном курсе математики, так как его применении помогает при решении многих задач. Сам метод является доступным для понимания школьниками и удобным в применении.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н, Виленкин П.А. «Комбинаторика». -М.: «ФИМА», 2006.
2. Матыцина Т. Н. «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ. Практикум» Кострома, 2010.
3. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. «Алгебра. Учебник для 9 класса» М.: 2014.
4. Студенецкая В.Н. «Решение задач по статистике, комбинаторике, теории вероятности». Волгоград: «Учитель», 2005
5. Холкина Е.И «Методы решения рекуррентных соотношений. Рекуррентные соотношения в школьном курсе математики. Курсовая работа». «УГПУ», 2015
6. Электронный ресурс: Режим доступа: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (Дата обращения: 13.02.2021)