Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 имени М. Ф. Леонова с. Приволжье муниципального района Приволжский Самарской области

Изменить.

Открытый региональный конкурс

Исследовательских проектов обучающихся образовательных организаций по отдельным предметным областям им. К.К.Грота.

2018-2019 учебный год

Предметное отделение: математика

Тема: Многочлены n-ой степени

Ф.И.О. Шубина Алена Александровна

Класс: 11

Руководитель:

Ф.И.О. Чернобровкина Ольга Ивановна

Учитель высшей квалификационной категории

Работа допущена к защите

« » 2019г.

Количество баллов\_\_\_\_\_

Самара 2021 год.

Содержание

1. Введение………………………………………………………………. 3-4
2. Основная часть………………………………………………………
   1. . Метод неопределенных коэффициентов для многочленов третьей

степени………………………………………………………………… 5

2.2. Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту для многочленов третьей степени…………………… 6-7

* 1. . Схема Горнера для многочленов третьей степени…………………..8-9

2.4. Метод неопределенных коэффициентов для многочленов четвертой степени………………………………………………………………….. 10

* 1. Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту для многочленов четвертой степени…………… 11
  2. Схема Горнера для многочленов четвертой степени…………… 12

1. Практическая часть…………………………………………………… 13- 20
2. Заключение …………………………………………………………… 21
3. Список литературы…………………………………………………… 22
4. Введение.

Обучаясь в 9 классе в разделе «Для тех, кто хочет знать больше», из учебника алгебры девятого класса, рассматривается тема: «Некоторые приемы решения целых уравнений». Этот материал вызвал у меня большой интерес. Я стала заниматься исследованием этой темы. Узнала, что многочлены третьей и четвертой степени можно разложить на множители применяя различные способы, приемы, которые не совсем привычны для нас. Занимала призовые места в научно – исследовательских работах, научила своих одноклассников применять данные методы. Обучаясь в старших классах и готовясь к экзамену, я обнаружила для себя, что эти приемы можно применять и в решении тригонометрических уравнениях и в заданиях первой и второй части. Существует много уравнений и неравенств, которые считаются задачами повышенной трудности. Для решения таких задач лучше применять не традиционные методы. При знании приведенных приемов многие трудные задачи окажутся вполне посильными. Эти приемы можно применять и в решении уравнений, и в построении графиков функций, и в решении уравнений с параметром. Я стала изучать подробно эту тему, и все свои открытия решила изложить в научно - исследовательской работе. В своей работе буду рассматриваться несколько способов разложения многочленов n-ой степени на множители и нахождения корней уравнений в различных заданиях.

***Цель:***

* Найти самый простой способ разложения на множители многочленов третьей и четвертой степени и применить эти способы в решении уравнений.
* Выпустить буклет.

***Объект исследования***: многочлены n- ой степени.

***Задачи исследования:***

* Изучить литературу, в которой рассматриваются решения разложений многочлена на множители n- ой степени.
* Научиться применять различные способы разложения многочлена на множители третьей и четвертой степени.
* Применять данное разложение на множители в решении уравнений.

***Гипотеза:***  умение применять рассмотренные способы разложения многочлена на множители, помогут сэкономить время для решения более сложных задач.

***Методы исследования:***

* Анализ литературы, в которой рассматриваются решения разложений многочлена на множители n- ой степени.
* Математическая обработка данных
* Решение уравнений n- ой степени, решение уравнений с параметром, построение графика, решение тригонометрических уравнений.
* Обобщение.

***Актуальность темы:*** умение применять любой из данных способов в разложении многочлена на множителиn- ой степени в решении уравнений.

* 1. ***Метод неопределенных коэффициентов***

Суть этого метода состоит в том, [1,2] что заранее предполагается вид множителей – многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Этот метод опирается на следующие утверждения:

1. Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях х.
2. Любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей.

Когда решаем уравнение третьей степени, то будем искать многочлены

(x-) ∙1х2 +2х+3) преобразовав получим:

1х3+(2 - 1) х2 +(3- 2) х 3

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях х и получаем систему для нахождения ,1, 2,3

Рассмотрим пример:

разложи на множители: х3 – 5х2 + 7х -3

Будем искать многочлены (x-) ∙1х2 +2х+3), такие, что справедливо тождественное равенство х3 – 5х2 + 7х -3= (x-) ∙1х2 +2х+3),

х3 – 5х2 + 7х -3= 1х3+(2 - 1) х2 +(3- 2) х 3

1=1

2 - 1 = -52=-5+3=-2

3- 2 =73=7+3\*(-2)=1

3 = 3=3:1=3

Легко видеть, что этим равенствам удовлетворяют числа 1=1, 2=-2, 3=1, = 3, отсюда следует вывод: х3 – 5х2 + 7х -3 = (х -3)(х2 -2х +1)=(х-3)(х-1)2

Найдем корни уравнения: х-3=0 х2 -2х +1=0

х=3. D=4-4=0 х=1

Ответ: 3;1.

* 1. ***Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту.***



Этьен Безу. Французский математик (1730г -1783г).

Иногда при разложении многочлена на множители, бывают полезны следующие утверждения: [1,2,3].

1. Остаток от деления многочлена F(x) на линейный двучлен (х - ) равен значению многочлена в точке, т.е. числу F().
2. Для того, чтобы многочлен F(x) делился на двучлен (х - ), необходимо и достаточно, чтобы F() =0, т.е. чтобы было корнем многочлена F.
3. Если все коэффициенты многочлена – целые числа, то каждый его рациональный корень имеет числителем p делитель свободного члена0 , а знаменателем q -делитель старшего коэффициента.

Применим данный способ в разложении на множители: х3 – 5х2 + 7х -3.

Если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа -3, т.е. равен одному из чисел: 1, -1, 3, -3. Сделаем проверку.

F(3) = 27-45+21-3=0, F(1)=1-5+7-3=0,F(-1) =-1-5-7-3=-16,

F(-3) = -27-45-21 -3 = -96.

Значит многочлен х3 – 5х2 + 7х -3 можно представить в виде (х-3)F(x), где F(x) – многочлен второй степени и можно представить в виде (х-1)F(x).

Для того, чтобы найти многочлен F(x), разделим многочлен

х3 – 5х2 + 7х -3 на двучлен (х-3). Деление многочленов выполним уголком.

х3 – 5х2 + 7х -3|х-3\_\_\_\_ х3 – 5х2 + 7х -3|х-1\_\_\_\_

х3 – 3х2 х2 – 2х +1 х3 –х2 х2-4х+3

2х2 +7х -4х2+7х

2х2+6х -4х2+4х

х -3 3х -3

х – 3 3х-3

0 0

Вывод: х3 – 5х2 + 7х -3 =(х -3)(х2 -2х +1)= (х-3)(х-1)2

х3 – 5х2 + 7х -3 =(х-1)(х2-4х+3)=(х-1)(х-1)(х-3).

Ответ:1;3.

* 1. ***Схема Горнера***



Уильям Джордж Горнер. Британский математик, в честь которого названа схема Горнера. (1786г -1837г).

0xn +1xn-1 + 2xn-2 +… +n = (x- )(b0xn-1 + b1xn-2 +…+bn-1) + P()

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 2 | k | n-1 | n |
| b0=0 | b1 =1+b0 | b2 =2+b1 | bk =k+bk-1 | bn-1 =n-1+bn-2 | остаток  =n+bn-1 |

Если нам даны [2,3.4] ( 0…n ) и (b0….bn) – числа, то если мы предполагаем, что число является нашим корнем, то мы записываем слева в таблицу, затем сносим первый элемент таблицы, а для каждого элемента до конца мы умножаем предыдущий элемент строки на и прибавляем к строке. Если в конце ( в остатке на деление на ) мы получили 0, то тогда число является корнем уравнения, а получившиеся элементы строки – коэффициентами перед соответствующими х, смещенными на один влево.

Рассмотрим тот же многочлен: х3 – 5х2 + 7х -3

Для этого записываем коэффициенты в таблицу

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -5 | 7 | -3 |
|  |  |  |  |  |

Находим предположительные корни. Они равны делителям свободного члена, то есть 1,-1,3,-3. Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -5 | 7 | -3 |
| 1 | 1 | -5+1\*1=-4 | 7+1\*(-4)=3 | -3+1\*3=0 |
| -1 | 1 | -5-1\*1=-6 | 7-1\*(-6)=13 | -3-1\*8=-11 |
| 3 | 1 | -5+3\*1=-2 | 7+3\*(-2)=1 | -3+3\*1=0 |
| -3 | 1 | -5-3\*1=-8 | 7-3\*(-8)=31 | -3-3\*31==96 |

Что означает полученный результат?

В двух строчках получился 0. Остаток от деления многочлена на (х-1) равен 0, то есть 1 – корень нашего уравнения.

Остаток от деления многочлена на (х-3) равен 0, то есть 3 – корень нашего уравнения.

Действительно нетрудно проверить, что

(х-1)(х2-4х+3)=(х-1)(х-1)(х-3),

(х-3)(х2-2х+1)=(х-3)(х-1)(х-1).

Ответ:1;3.

Применим все найденные мною способы разложения на множители в многочлене четвертой степени.

***2.4 Метод неопределенных коэффициентов.***

Рассмотрим многочлен: х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6

Выведем формулу: [1,2]

(х-2)(ах3+х2+сх+d)=ах4 + х3 +сх2 +dх-2ах3 -2х2 -2сх -2d =ах4 +х3(-2а)+х2(с-2)+х(d -2с)-2d

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6=а4 +(-2а) х3 +(с-2) х2 +(d -2с) х- 2d.

а=1 а=1

-2а=-5 =-3

с-2=7 с-2(-3)=-7 с=1

d -2с=-5d-2(-13)=-5

- 2d.=6d=-3

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6=(х-2)(х3-3х2+х-3).

Применим метод группировки в многочлене х3-3х2+х-3.

х3-3х2+х-3=(х3-3х2)+(х-3)=х2(х-3)+(х-3)= (х-3)(х2+1),

тогда окончательный результат: х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6=(х-2)(х-3)(х2+1).

Корни уравнения: 3; 2;

***2.5. Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту.***

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6

Поскольку коэффициент при х4=1, [2,3] то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 6, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

F(1)=4, F(-1)=23,F(2)=0 , тогда числа 1 и -1 не являются корнями многочлена.

Значит, данный многочлен делиться на двучлен х-2.

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6|х-2

х4-2х3х3-3х2+х-3

-зх3+7х2

3х3+6х2

х2-5х

х2-2х

-3х+6

-3х+6

0

Вывод: х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6=(х-2)(х3-3х2+х-3)=(х-2)(х-3)(х2+1)

Применим метод группировки: х3-3х2+х-3=х2(х-3) +(х-3)=(х-3)(х2+1).

Ответ: 2;3.

* 1. ***. Схема Горнера***

0xn +1xn-1 + 2xn-2 +… +n = (x- )(b0xn-1 + b1xn-2 +…+bn-1) + P()

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 2 | k | n-1 | n |
| b0=0 | b1 =1+b0 | b2 =2+b1 | bk =k+bk-1 | bn-1 =n-1+bn-2 | остаток  =n+bn-1 |

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6. Находим предположительные корни. [2,3,4]. Они равны делителям свободного члена, то есть 1,-1, 2, -2, 3, -3. Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -5 | 7 | -5 | 6 |
| 1 | 1 | -5+1\*1=-4 | 7+1\*(-4)=3 | -5+1\*3=-2 | 6+1\*(-2)=4 |
| 2 корень | 1 | -5+2\*1=-3 | 7+2\*(-3)=1 | -5+2\*1=-3 | 6+2\*(-3)=0 |
| 3 корень | 1 | -5+3\*1=-2 | 7+3\*(-2)=1 | -5+3\*1=-2 | 6+3\*(-2)=0 |
| -1 | 1 | -5-1\*1=-6 | 7-1\*(-6)=13 | -5-1\*13=-18 | 6-1\*(-18)=24 |
| -2 | 1 | -5-2\*1=-7 | 7-2\*(-7)=21 | -5-2\*21=-47 | 6-2\*(-47)=101 |

Что означает полученный результат? Во второй и третьей строчке получился 0. Остаток от деления многочлена на (х-2) равен 0, то есть 1 – корень нашего уравнения.

Остаток от деления многочлена на (х-3) равен 0, то есть 3 – корень нашего уравнения. Действительно нетрудно проверить, что

х4 – 5х3 +7х2 - 5х +6=(х-2)(х-3)(х2+1)

х3-3х2+х-3 |х- 3

х3-3х2

х2+1

х-3

х-3

0

Практическое применение

Применим схему Горнера при решении уравнений с параметром. Рассмотрим два уравнения.

1. Найдите наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнениеf(x)=0 имеет три различных корня, один из которых х0.

f(x)= х3 +8х2+ах+b,х0=-3

Так как один из корней -3, то применим схему Горнера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 8 | а | b |
| -3 | 1 | 8-3\*1=5 | а-3\*5=-15+а | 0 |

-3(-15+a)+b=0

45-3a+b=0

b=3a-45

х3 +8х2+ах+b=(x+3)(x2+5x+(a-15))

x2+5x+(a-15)=0

a=1 b=5 c=(a-15)

D=b2-4ac=25-4(a-15)=25+60-4a>0

85-4a>0

4a<85

a<21

Вывод: наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнениеf(x)=0 имеет три корня, а=21.

Ответ: 21.

1. Найдите наибольшее целое значение параметра а, при котором уравнениеf(x)=0 имеет три различных корня, один из которых х0.

f(x)=х3-11х2+ax+b, x0 =4

Так как один из корней 4, то применим схему Горнера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -11 | a | b |
| 4 | 1 | -11+4\*1=-7 | a+4\*(-7)=-28+a | 0 |

х3-11х2+ax+b=(x-4)(x2-7x+(a-28))

f(x)=0, если х=4 или x2-7x+(a-28)=0

D=b2-4ac=49-4(a-28)=49+112-4a=161-4a>0

161-4a>0

-4a<-161

a<40

Вывод: уравнение имеет три корня при наибольшем целом значении а=40.

Применим схему Горнера при построении графика.

Постройте график функции, у=

И определите, при каких значениях параметра с прямая у=с имеет с графиком ровно одну общую точку.

Разложим числитель дроби ( х4 -5х2 +4) на множители

Поскольку коэффициент при х4=1, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 4, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2, 4, -4.

Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | -5 | 0 | 4 |
| 1 корень | 1 | 0+1\*1=1 | -5+1\*1=-4 | 0+1\*(-4)=-4 | 4+1\*(-4)=0 |
| -1 корень | 1 | 0-1\*1=-1 | -5-1\*(-1)=-4 | 0-1\*(-4)=4 | 4-1\*4=0 |
| 2 корень | 1 | 0+2\*1=2 | -5+2\*2=-1 | 0+2\*(-1)=-2 | 4+2\*(-2)=0 |
| -2 корень | 1 | 0-2\*1=-2 | -5-2\*(-2)=-1 | 0-2\*(-1)=2 | 4-2\*2=0 |
| 4 | 1 | 0+4\*1=4 | -5+4\*4=11 | 0+4\*11=44 | 4+4\*44=180 |
| -4 | 1 | 0-4\*1=-4 | -5-4\*(-4)=11 | 0-4\*11=-44 | 4-4\*(-44)=180 |

х4 -5х2 +4 =(х-1)(х+1)(х+2)(х-2).

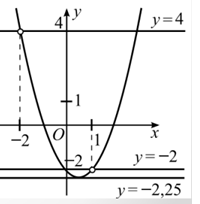
При х≠1 и х≠-2 функция примет вид: у=(х+1)(х-2)

Графиком функции является парабола, ветви направлены вверх.

выколоты точки (1;-2) и (-2;4)

вершина параболы (0,5;-2,25).

Прямая у=с имеет с графиком ровно одну общую точку, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота.



Вывод: с=-2,25; с=-2; с=4.

Ответ:с=-2,25; с=-2; с=4.

Применим схему Горнера при решении уравнений

Рассмотрю уравнение из раздела «Для тех, кто хочет знать больше» алгебра 9 класс под редакцией С. А. Теляковского. [2]

х3-8х2 +13х -2=0

Поскольку коэффициент при х4=1, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа -2, т. е. могут быть целыми числами 1, -1, 2, -2.

Проверяем очевидные корни. Записываем его в таблицу. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -8 | 13 | -2 |
| 1 | 1 | -8+1\*1=-7 | 13+1\*(-7)=6 | -2+1\*6=4 |
| -1 | 1 | -8-1\*1=-9 | 13-1\*(-9)=22 | -2-1\*22=-24 |
| 2корень | 1 | -8+2\*1=-6 | 13+2\*(-6)=1 | -2+2\*1=0 |
| -2 | 1 | -8-2\*1=-10 | 13-2\*(-10)=-7 | -2-2\*(-7)=12 |

Поделим данный многочлен на (х-2)

х3-8х2 +13х -2 |x-2

х3-2х2 x2-6x+1

- 6х2+13х

- 6х2+12х

-x-2

x-2

0

Исходное уравнение можно представить в виде: х3-8х2 +13х -2=(х-2)(x2-6x+1).

Приравниваем множители к нулю: х-2=0

х=2

x2-6x+1=0

D=36-4=32>0 2 корня.

Первый корень: 3- ; второй корень: 3+

Ответ: 2; 3-; 3+.

Применим схему Горнера в решении заданий ЕГЭ

№1

2sin3x – sin2xcosx – 13sinxcos2x – 6cos3x = sin + x) – cos ( - x)

Углы ( + x) и ( - x) дают в сумме 900, т. е. дополнительные по свойству дополнительных углов sin + x) = cos ( - x), т.е. правая часть исходного уравнения =0.

2sin3x – sin2xcosx – 13sinxcos2x – 6cos3x=0./ : cos3x.

Это однородное уравнение третьей степени.

2tg3x – tg2x - 13 tgx -6 =0; Пусть tgx =t, тогда получаем уравнение

2 t3 – t2 - 13 t – 6=0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | -1 | -13 | -6 |
| 3 | 2 | 5 | 2 | 0 |

-1+32=5 ; -13+35=2; -6+32=0.

2 t2 +5 t + 2=0, D =25-16=9, t1=-2; t2=

1. tgx = =

х= -arctg + πn n€Z

1. tgx = -2

х= -arctg 2 + πn n€Z

1. tgx = 3

х= arctg 3 + πn, n€Z

x€ [; ]

б) -arctg 2; -arctg ; arctg 3.

№2

(х2 + 21х +90)( х2 - 7х +10)=28х2

х4 +14х3-75х2-420х +900=0

Схема Горнера:

Возможные целые корни уравнения – делители 900, т.е.

±1; ±2; ±3; ±4; ±5; ±6….

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | -75 | -420 | 900 |
| -5 | 1 | 9 | -120 | 180 | 0 |
| 6 | 1 | 15 | -30 | 0 |  |

х=-5 – корень.

х=6- корень.

Решаем квадратное уравнение: х2 + 15х – 30 =0

D =225 +120 =345 х=

Ответ: -5: 6; .

№3

Найди значение выражения:

+=А

Возведем в куб обе части (а+в)3= а3+в3 +3ав(а+в)

20 +14 +20- 14 +3 -96\*2 \*А=А3

3 \* А +40 = А3

А3-6А – 40=0

Схема Горнера:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | -6 | -40 |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 0 |

А=4.

А2 +4А + 10=0

D=16-40 =-24 <0; корней нет.

Ответ: 4.

№4

≥ 0.

≥ 0.

≥ 0.

≥ 0.

≥ 0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | -15 | 39 | -36 |
| 3 | 2 | -9 | 12 | 0 |

2х2-9х+12=0

D=81-96=-15 <0, корней нет.

≥ 0

+ - +

0 3

Ответ (-∞; 0] U(3;+∞)

***Заключение.***

В своей работе, я описала несколько способов разложения многочленов на множители третьей и четвертой степени.

И применила их в решении уравнений. Эта исследовательская работа для меня была очень интересна. Ведь я научилась применять нестандартные способы в подготовке к экзамену. Убедилась, что применяя разные способы, я получаю один и тот же ответ. Это здорово!

Каждый из этих способов, по- своему интересен. Для меня оказался самый простой способ с применением схемы Горнера.

Изучив эту тему, я могу быстро разложить многочлены n-ой степени на множители и применить это в решении уравнений, в построении графиков, в решении уравнений с параметрами, тригонометрических уравнений, в заданиях на вычисления.

Я считаю, что цель моей работы достигнута. Готово выступление для своих одноклассников и выпуска буклета по этой теме.

***СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ***

1. Математика для старшеклассников. Домашний репетитор. Д. Т. Письменный. Айрис Рольф 1996.
2. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства( пособие для учащихся 10-11 классов) Экзамен. Москва 1998г. С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасмченко.
3. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. - М.: Наука, 1987. - 432 с.
4. Числа и многочлены. Методическая разработка для заочного отделения МММФ/ Автор - составитель А.В. Деревянкин. - М., Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008 - 72 с.