ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ № 5 г. ВИТЕБСКА ИМЕНИ И.И.ЛЮДНИКОВА»

ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Автор работы:
Гурская Мария Сергеевна,
учащаяся 7 «В» класса
Руководитель:
Сакович Галина Николаевна,
учитель математики

Витебск 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решая задачи на уроках математики и факультативных занятиях, я заметила, что иногда одну и ту же задачу разные ученики решают различными способами. Причем, часто выбор того или иного способа является личным предпочтением ученика, которое тот аргументирует тем, что «ему так удобно решать». Мне показалось это интересным! Ведь поиск разнообразных, а возможно и нестандартных способов для решения задач может быть очень увлекателен. Не менее полезно так же знать и уже существующие подходы. Все это не только развивает воображение и логическое мышление, но и позволяет почувствовать себя настоящим исследователем, а возможно и ученым-первооткрывателем.

Не секрет, что все задачи курса математики можно разделить на типы и для каждого будут свои «подходы» к решению или, как их называют иначе, алгоритмы. Причем иногда один и тот же способ может применяться для решения задач нескольких типов, в то время как другие способы оказываются менее универсальными.

Мое внимание привлек тип задач, связанных с переливанием жидкостей с помощью сосудов заданной емкости. Такие задачи часто встречаются на олимпиадах и нередко их решение вызывает массу сложностей. Ведь наиболее простой и доступный способ – способ подбора – в таком случае может оказаться весьма трудоемким и затратным по времени, что вряд ли будет уместно на олимпиаде. Мне стало интересно, какие еще существуют способы решения задач на переливание и как выбрать наиболее удобный, который позволит быстро найти правильное решение и будет мне наиболее понятен.

Так возникла идея проекта, выполнение которого позволило бы изучить разнообразные способы решения задач на переливание и оценить их с точки зрения практического применения для решения задач этого типа учениками 6-х классов.

Гипотеза: при решении задач на переливание могут быть использованы различные способы решения, сложность которых может варьировать.

Актуальность: задачи указанного типа часто встречаются среди олимпиадных заданий. На практике знакомство с различными способами решения задач развивает логическое мышление, показывает вариативность путей решения конкретной задачи.

Цель: на основе анализа отдельных способов решения задач на переливание, выбрать оптимальные для использования учениками 6-х классов.

Объект – логические задачи на переливание.

Предмет – способы решения логических задач на переливание.

Задачи:

1. Выполнить анализ литературных и Интернет источников по теме исследования.

2. Ознакомиться и изучить алгоритм основных способов решения задач на переливание.

4. Разобрать новые для меня способы решения задач и выбрать наиболее удобный.

5. Сформулировать критерии, позволяющие оценить возможность применения каждого из способов решения учащимися 6-х классов.

6. Составить брошюру с подборкой задач на переливание для факультативных занятий, придумать несколько собственных авторских задач для этой брошюры.

ГЛАВА 1
ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Задачи на переливание относятся к числу широко известных головоломок. Несмотря на свою многовековую историю, этот тип задач не теряет своей актуальности и в наше время, испытывая смекалку широкого круга любителей математики.

Одной из наиболее известных старинных задач на переливание является так называемая **«Задача Пуассона»**.

Симеон Дени Пуассон (1781-1840) – известный французский математик, механик и физик (рисунок 1) [1]. Существует мнение, что выбор будущей профессии был сделан им именно после решения задачи на переливание, которую в последствии и назвали его именем.

Рисунок 1 - Симеон Дени Пуассон

Знаменитая задача Пуассона (рисунок 2) имела следующее условие: «Один человек имеет в бочонке 12 пинт вина (пинта – старинная французская мера объема, 1 пинта ≈ 0,586 л) и хочет подарить половину вина, но у него нет сосуда в 6 пинт, однако имеются два пустых сосуда объемом в 8 и 5 пинт. Сможет ли он разделить вино?» В современном виде условие звучит так: «Как из полного сосуда ёмкостью в 12 л отлить половину, пользуясь двумя пустыми сосудами ёмкостью в 8 и 5 л?»

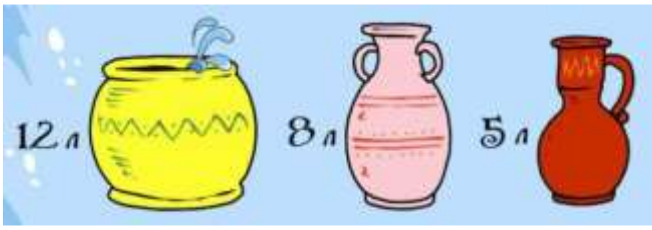


Рисунок 2 - Иллюстрация к задаче Пуассона

Блестяще справившись с решением этой задачи и еще нескольких подобных, Пуассон окончательно определился с выбором профессии.

В настоящее время редкий сборник задач по математике обходится без подобных головоломок. Но все ли задачи на переливание похожи? Или есть какие-то признаки, по которым их можно разделить на группы (то есть классифицировать)?

Как правило, суть этих задач сводится к следующему: имея несколько сосудов разного объема, один из которых наполнен жидкостью, требуется разделить ее в каком-либо отношении или отлить какую-либо ее часть при помощи других сосудов за наименьшее число переливаний. Однако, условия задач часто могут иметь свои особенности.

Выделяют два основных типа задач на переливание:

1. «Открытая система».

Открытая система – это тип задач на переливание, в которых необходимо получить некоторое количество жидкости с помощью нескольких пустых сосудов из бесконечного источника, из которого можно наливать жидкость, и в который ее можно выливать [2]. Так же для задач этого типа можно встретить название – **«Водолей»**.

2. «Закрытая система».

Закрытая система - это тип задач на переливание, в которых необходимо разделить жидкость большей емкости с помощью нескольких меньших по объему емкостей, при чем жидкость можно только переливать из одной емкости в другую [2]. Так же для задач этого типа можно встретить название – **«Переливашка»**. Именно к этому типу относится знаменитая «Задача Пуассона».

В чем же сложность задач на переливание? Почему их относят к числу логических задач или головоломок?

Как правило, основная сложность сводится к некоторому числу ограничений, принятых при решении этих задач.

В задачах на переливание разрешены следующие операции:

- заполнение жидкостью одного сосуда до краев;
- переливание жидкости в другой сосуд или выливание жидкости;

При решении таких задач необходимо учитывать следующие замечания:

- разрешается наливать в сосуд ровно столько жидкости, сколько в нем помещается;
- разрешается переливать всю жидкость из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается;
- разрешается отливать из одного сосуда в другой столько жидкости, сколько необходимо, чтобы второй сосуд стал полным [3].

В задачах на переливание требуется указать последовательность действий, при которой осуществляется требуемое переливание и выполнены все условия задачи. **Если не сказано ничего другого, считается, что:**

- все сосуды без делений,

- нельзя переливать жидкости «на глаз».

Описанные ограничения безусловно усложняют путь к правильному ответу. Но, зная основные способы решения задач такого типа, всегда можно выбрать верное направление.

При работе с задачами на переливание следует также учитывать, что **они не всегда имеют решение**. Можно выделить **несколько критериев разрешимости этого вида задач**:

• если объемы двух меньших сосудов не имеют общего делителя (т. е. взаимно просты), а объем третьего сосуда больше или равен сумме объемов двух меньших, то с помощью этих трех сосудов **можно отмерить любое целое число литров**, начиная с 1 литра и кончая объемом среднего сосуда. Имея, например, сосуды вместимостью 15, 16 и 31 литр, вы сумеете отмерить любое количество воды от 1 до 16 литров. Но такая **процедура будет невозможна, если** объемы двух меньших сосудов имеют общий делитель.

• если объем большего сосуда меньше суммы объемов двух других, **возникают ограничения**. Если, например, объемы сосудов равны 7, 9 и 12 литрам. Несмотря на то, что 7 и 9 взаимно просты, отмерить 6 литров воды оказывается невозможным из-за того, что самый большой сосуд имеет слишком маленький объем.

ГЛАВА 2
СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ

Во Введении мы высказали мысль о том, что любой тип задач имеет свои способы решения. Задачи на переливание не исключение. Несмотря на большое разнообразие условий, все их можно успешно решать, пользуясь несколькими алгоритмами.

В общем случае, можно выделить два основных подхода к решению:

а) начать переливания с большего сосуда;

б) начать переливания с меньшего сосуда.

Какой из способов более рационален (т.е. каким способом мы быстрее получим нужное количество жидкости) зависит от условий задачи.

Как было описано в предыдущей главе, существует два типа задач на переливание. Было бы логично предположить, что решение каждого из них должно иметь свои особенности.

При решении задач первого типа («Водолей») можно использовать такой алгоритм:

1. Наполнить большую емкость жидкостью из бесконечного источника.
2. Перелить из большей емкости в меньшую емкость.
3. Вылить жидкость из меньшей емкости.
4. Повторить действия 1-3 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости.

При решении задач второго типа («Переливашка») можно использовать следующий алгоритм:

1. Из большей емкости наполнить емкость промежуточного объема.
2. Перелить жидкость из промежуточной емкости в самую маленькую емкость.
3. Перелить жидкость из самой маленькой емкости в большую емкость.
4. Повторять действия 2-3 до тех пор, пока емкость промежуточного объема не станет пустой.
5. Если емкость промежуточного объема опустела, то повторить действия 1-5 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости [3].

Однако помимо двух описанных алгоритмов, позволяющих понять конкретные подходы к решению таких задач, **существуют и более общие способы решений**. Так, для решения задач на переливание могут быть использованы некоторые из общих методов решения логических задач:

- ✓ метод рассуждений;
- ✓ метод таблиц;
- ✓ метод граф;
- ✓ метод бильярда;
- ✓ геометрический метод;
- ✓ метод трилинейных координат и др. [4, 5, 6].

Изучив литературу, в которой описаны эти способы решений, мы пришли к выводу, что **последние два способа решения сложны для понимания учениками 5-6 классов** и больше подойдут для применения учащимися старших классов. Поэтому **основное внимание в работе будет уделено первым четырем способам**.

В качестве примера задачи на переливание для решения различными способами, выбрана задача сборника «Математическая шкатулка» №137 [8].

Условие задачи: имеются сосуды вместимостью 12, 9 и 5 л. Первый из них наполнен некоторой жидкостью, а два остальных - пустые. Можно ли с их помощью отлить 6 л?

Таким образом, главный вопрос задачи можно перефразировать так: **можно ли разделить 12 л поровну, используя сосуды емкостью в 5 и 9 л?**

Итак, опишем подробнее каждый из способов и решим с их помощью выбранную задачу.

2.1. Метод рассуждений

Этот метод, по сути, является методом подбора. **Это наиболее простой способ.** С его помощью решаются несложные логические задачи. Идея метода состоит в том, что мы проводим последовательные рассуждения, используя условия задачи, в результате чего через некоторое время приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи.

Следует отметить, что метод не всегда приводит к желаемому результату. К числу других его недостатков можно отнести и то, что он как правило занимает много времени, а, следовательно, **использовать его при решении задач на олимпиадах не эффективно**. Ведь иногда, потратив много времени, ответ в задаче бывает так и не найден.

2.2. Метод таблиц

Метод таблиц – один из не очень сложных и часто используемых приемов решения, который используется при решении текстовых логических задач и заключается в построении таблиц, отвечающих условию задачи.

Этот метод позволяет наглядно представить условие задачи и проследить путь рассуждений, а при необходимости и достаточно быстро найти место в решении, где была допущена ошибка. Таким образом, этот способ решения позволяет наиболее полно проанализировать условие и контролировать путь решения на любом этапе.

Рассмотрим решение выше указанной задачи способом таблиц (таблицы 1 и 2). Возможны два варианта решения (соответственно двум основным направлениям решения: начать переливания с большего сосуда или с меньшего).

Таблица 1 – 1 способ решения

1 способ решения			
Количество переливаний	Сосуды		
	12 л	9 л	5 л
Исходное состояние	12 →	0	0
После 1-го переливания	3	9 →	0
После 2-го переливания	3 →	4	5
После 3-го переливания	0	7	5 ←←
После 4-го переливания	5	7 →	0
После 5-го переливания	5	2	5 ←←
После 6-го переливания	10	2 →	0
После 7-го переливания	10 →	0	2
После 8-го переливания	1	9 →	2
После 9-го переливания	1 →→	6	5
После 10-го переливания	6	6	0

Таблица 2 – 2 способ решения

2 способ решения			
Количество переливаний	Сосуды		
	12 л	9 л	5 л
Исходное состояние	12 →→	0	0
После 1-го переливания	7	0	5 ←
После 2-го переливания	7 →	5	0
После 3-го переливания	2	5	5 ←
После 4-го переливания	2	9 ←	1
После 5-го переливания	11	0	1 ←
После 6-го переливания	11 →→	1	0
После 7-го переливания	6	1	5 ←
После 8-го переливания	6	6	0

2.3. Метод граф

Еще одним часто используемым в решении задач приемом является метод граф. Этот способ также может быть применен и для решения задач на переливание [5].

Графы – это рисунки, которые состоят из точек и линий, соединяющих эти точки (рисунок 3). Каждая **пара точек в графе может быть соединена линиями**. Линия указывает на связь между двумя точками. Точки называются **вершинами графа**, а линии **рёбрами.** Ребро может иметь направление, которое указывается стрелочкой. Тогда оно носит название «дуга». У графа обязательно есть вершины**.** Граф без рёбер называется пустым**.**

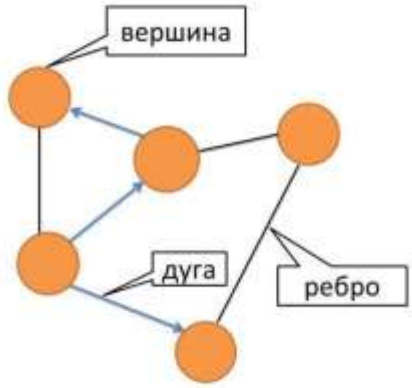


Рисунок 3 - Схематическое изображение графа

Интересна история, с которой связано появление этого метода решения задач. 1736 год, г. Кёнигсберг. Через город протекает река Прегеля. В городе - семь мостов, расположенных так, как показано на рисунке ниже. С давних времен жители Кенигсберга бились над загадкой: «Можно ли пройти по всем мостам, пройдя по каждому только один раз?» (рисунок 4). Эту задачу решали и теоретически, на бумаге, и на практике, на прогулках - проходя по этим самым мостам. Никому не удавалось доказать, что это неосуществимо, но и совершить такую «загадочную» прогулку по мостам никто не мог [7].

Рисунок 4 - Задача о Кенигсбергских мостах

Разрешить проблему удалось знаменитому математику Леонарду Эйлеру. Причем, он решил не только эту конкретную задачу, но придумал общий метод решения подобных задач. При решении задачи о Кенигсбергских мостах Эйлер поступил следующим образом: он "сжал" сушу в точки, а мосты "вытянул" в линии. Такую фигуру, состоящую из точек и линий, связывающих эти точки, называют графом [7].

Таким образом, **граф – это совокупность множества вершин и связей между вершинами**.

Особым видом графа является дерево (рисунок 5). Этот вид граф как раз и применяется с успехом для решения задач на переливание.

Рассмотрим решение выбранной задачи таким способом:

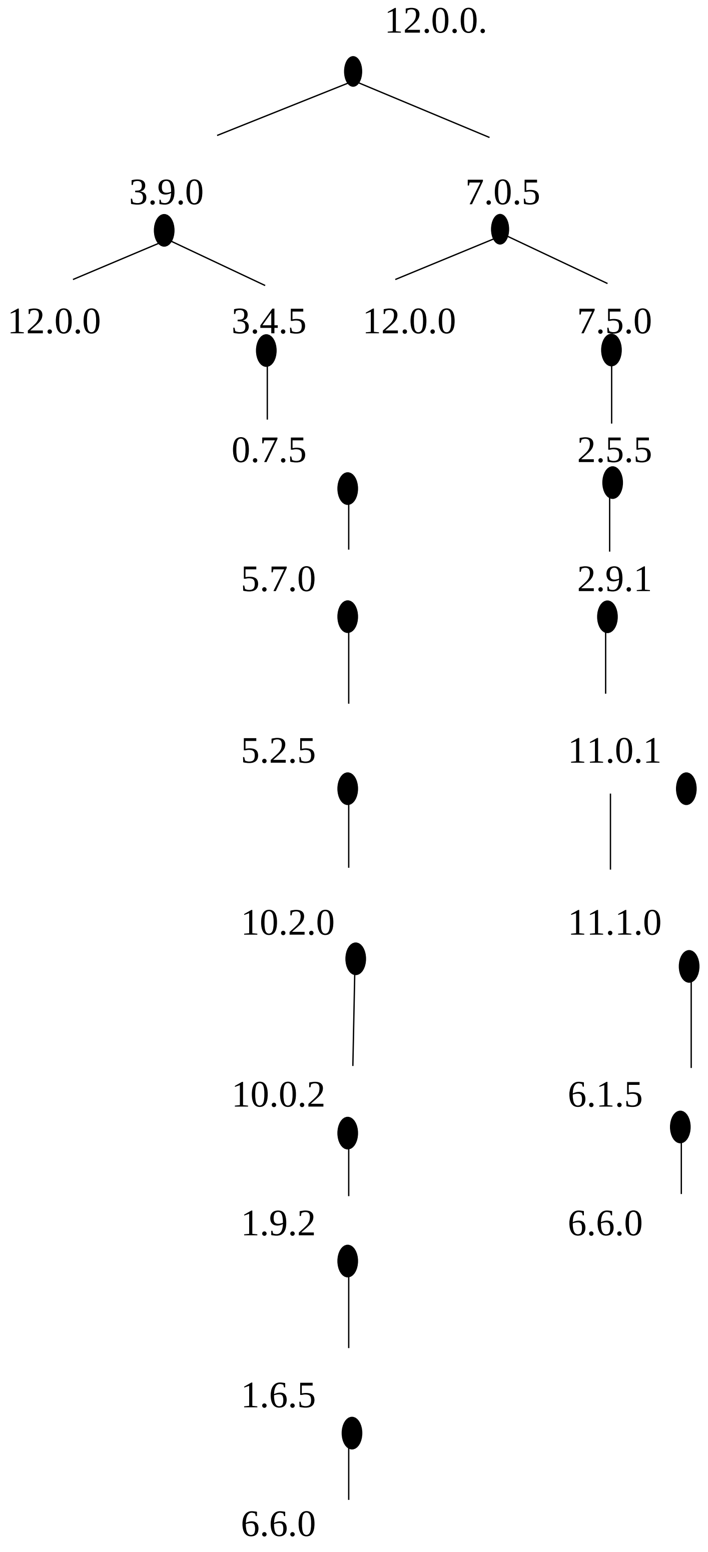


Рисунок 5 – Дерево граф

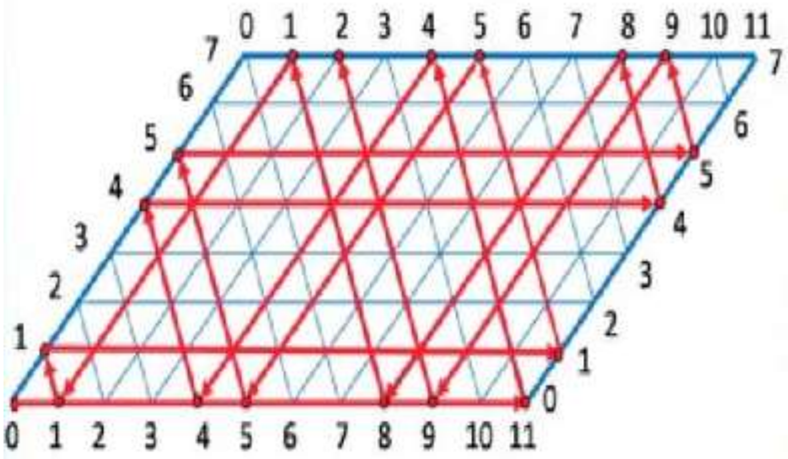
Как видно из схемы решения, данный метод схож с методом таблиц, но все же более нагляден. При использовании метода таблиц мы видим лишь текущий вариант решения, а метод граф позволяет одновременно оценить несколько возможных путей решения и развивать наиболее рациональные из них.

2.4. Метод бильярда

Метод бильярда (рисунок 6) – еще один **универсальный метод для решения некоторых типов логических задач**. **Сформулирован** он был в начале прошлого века **известным русским математиком Яковом Перельманом** [1]. Именно он предложил решать задачи на переливание с помощью «умного» шарика.

Основой для решения задач этим методом служит особый чертеж (рисунок 6). Это параллелограмм (четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны), который символизирует собой бильярдный стол. Длины пересекающихся сторон «стола» численно равны объему двух меньших сосудов. Пространство внутри параллелограмма следует разделить на равносторонние треугольники. Таких заготовок можно сделать две, что позволит вести решение по двум направлениям:

- начать переливания с большего сосуда;
- начать переливания с меньшего сосуда.



№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
11 литров	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2
7 литров	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7

Рисунок 6 - Пример решения задачи на переливание с помощью метода бильярда

Далее, из острого угла этого стола вдоль одной из сторон нужно «запустить» шарик, который по закону «угол падения равен углу отражения» будет сталкиваться с бортами стола, показывая тем самым последовательность переливаний. На бортах стола нанесена шкала, цена деления которой соответствует выбранной единице объема. В результате движения шарик либо ударяется о бортик в нужной точке (тогда задача имеет решение), либо не ударяется (тогда считается, что задача решения не имеет).

Бильярдный шар может перемещаться только вдоль прямых, образующих сетку на параллелограмме. После удара о стороны параллелограмма шар отражается и продолжает движение вдоль выходящего из точки борта, где произошло соударение, что полностью характеризует, сколько воды находится в каждом из сосудов.

Данные о перемещении шарика заносят в таблицу (таблица 3). Таким образом, всегда можно посчитать какое количество перемещений шарику нужно совершить прежде, чем ответ будет найден и выбрать более короткий из двух возможных путей решения задачи этим методом.

Рассмотрим решение нашей задачи про отливание 6 литров жидкости из 12-литрового сосуда при помощи сосудов в 5 и 9 литров способом биллиардного шара (рисунок 7).

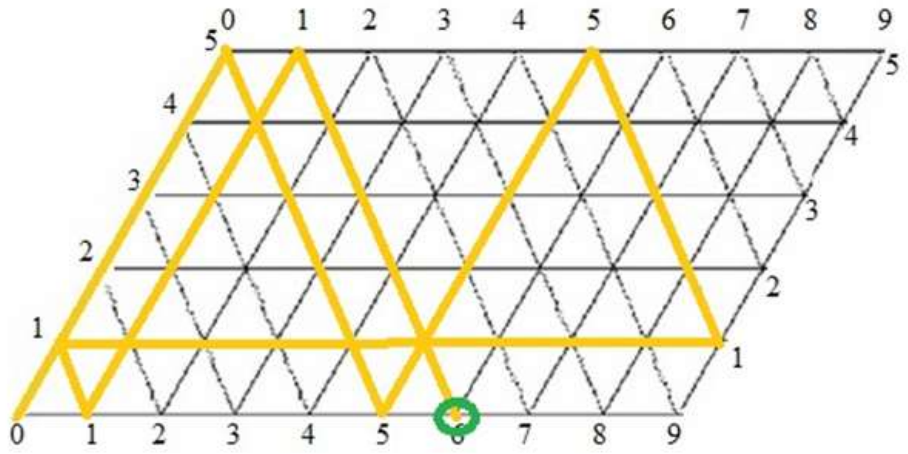


Рисунок 7 - Пример решения задачи на переливание с помощью метода бильярда (2)

В данном случае в начале решения жидкость была перелита из сосуда емкостью 12 л в меньший сосуд на 5 л. Как известно, начать решение можно и с переливания жидкости в сосуд на 9 л (рисунок 8).

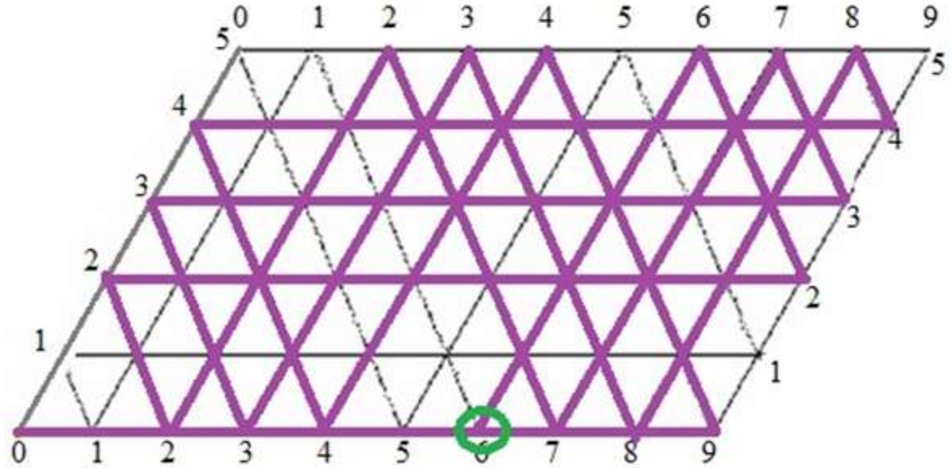


Рисунок 8 - Пример решения задачи на переливание с помощью метода бильярда (3)

По «координатам» перемещения шарика можно составить таблицу, в которой будут отражены закономерности переливаний и объемы жидкости в каждом их сосудов на разных этапах решения.

Таблица 3 – Закономерности переливаний

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12 л	12	7	7	2	2	11	11	6	6
9 л	0	0	5	5	9	0	1	1	6
5 л	0	5	0	5	1	1	0	5	0

2.5. Метод векторов

Существует также метод решения задач на переливание с помощью векторов [9].

Для того, чтобы решить задачу данным способом, строится прямоугольная система координат Oxy. На оси Ox отмечают точки, координаты которых кратны объему a одного из двух меньших сосудов. Через отмеченные точки необходимо провести пунктирные прямые:

$x = a$, $x = 2a$, …, $x = ka$

Эти прямые показывают, что сосуд объемом a полон и его нужно опорожнить. На оси Oy отмечают точку, координата которой равна объему b, то есть объему второй меньшей емкости. Проводят пунктиром прямую $y=b$, которая впоследствии поможет определить точки наполнения второго сосуда.

Наполнение емкости, объем которой ранее отметили на оси Oy, следует показать векторами, направленными вертикально вниз. Переливание из этого сосуда, в сосуд, объем которого располагается на оси Ox, необходимо показывать векторами, направленными по диагонали вниз. Опорожнение последней емкости изображают в виде вектора, направленного вертикально вверх. Рядом с концами векторов постепенно записывают остаток или то, что перелили. Для удобства эти данные можно впоследствии занести в таблицу.

Если в итоге искомое число получилось на оси Ox, то это количество жидкости в емкости объемом a; если оно окажется на одной из вертикальных линий, то необходимое количество жидкости находится в сосуде b. Изображенные таким образом векторы являются последовательными шагами решения задачи.

Решение выбранной нами задачи данным способом выглядит так (рисунок 9):

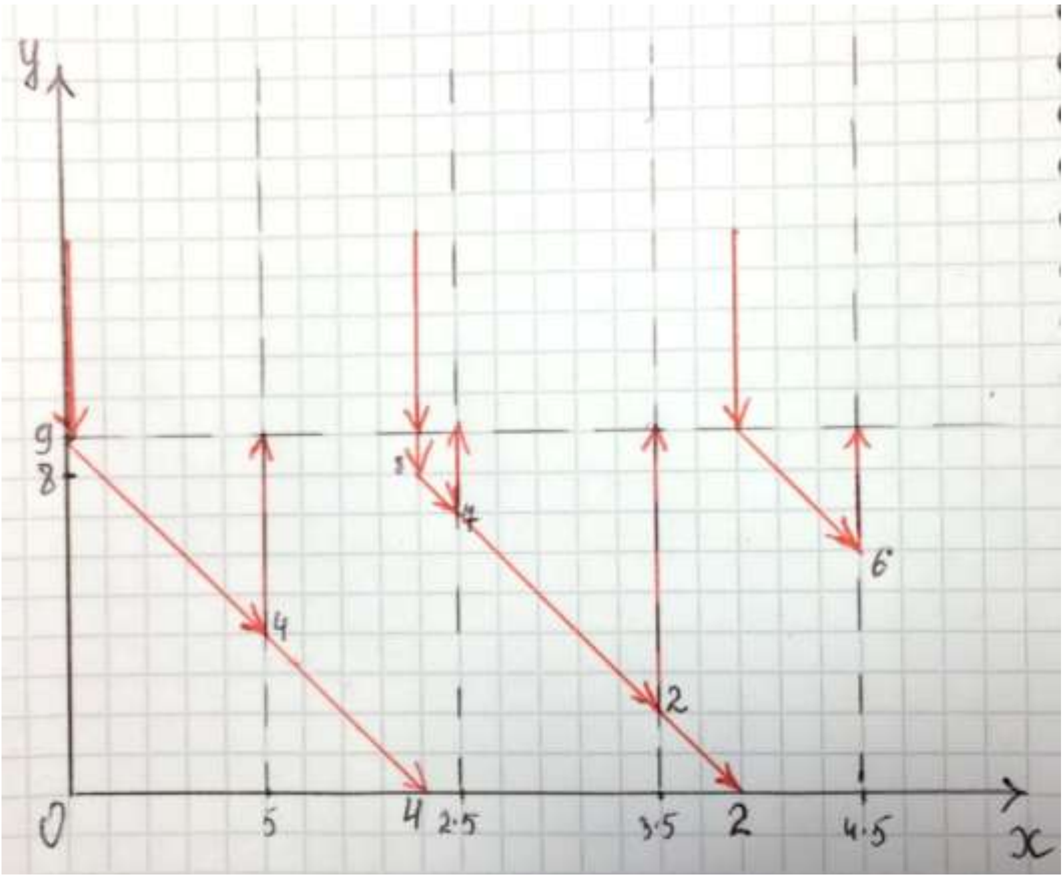


Рисунок 9 – Решение задачи методом «векторов»

Вертикальный вектор, направленный вниз к метке 9 — это первый шаг: наполнение 9-литрового сосуда из 12-литрового. Вектор 9–4 по диагонали вниз — переливание воды из 9-литрового сосуда в 5-литровый. Метка 4 означает, что в среднем (9-литровом) сосуде осталось 4 литра жидкости. Так как меньшая емкость полна (мы дошли до пунктирной линии), то ее следует опорожнить, то есть вылить содержимое в 12-литровый сосуд — вектор направлен вертикально вверх. Следующий ход — вылить оставшиеся в среднем (9-литровом) сосуде 4 литра жидкости в меньший (5-литровый) (вектор 4–4). Поскольку вектор показывает на ось Ох, то это означает, что 9-литровый сосуд пуст, его нужно вновь наполнить (вектор направлен вертикально вниз до метки 8, так как после переливания 4 литров в 12-литровом сосуде осталось 8 литров жидкости). Продолжаем при помощи среднего сосуда наполнять меньший (вектор по диагонали), оценивая каждый раз при наполнении одного из них содержимое другого и указывая оставшееся число литров рядом с концом вектора. Продолжая действовать таким образом, скоро обнаруживаем в среднем сосуде необходимые 6 литров жидкости.

ГЛАВА 3
ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ

В процессе изучения литературы по теме исследования мы нашли немало оснований для подтверждения нашей гипотезы: при решении задач на переливание могут быть использованы различные способы решения логических задач, сложность которых может варьировать. Действительно, для решения данного типа задач существуют различные способы. Однако при более подробном знакомстве с ними стало очевидно, что не все они могут применяться при решении учениками 6-х классов. Можно предположить, что основными критериями для выбора того или иного способа этими учащимися, должны стать:

- соответствие математическим знаниям и умениям учеников этого возраста;
- наглядность метода;
- личные предпочтения ученика.

После работы над решением задач этого типа различными способами, я сделала вывод, что наиболее удобными для меня являются метод таблиц и метод бильярда. Причем, метод бильярда, несмотря на кажущуюся сложность, позволяет выполнять решение достаточно быстро и точно. Применение указанных методов не вызвало у меня сложностей и позволило расширить кругозор.

Также практическим результатом работы по освоению методов решения задач на переливание и выбора наиболее оптимальных из них явилось создание брошюры «Математические головоломки. Задачи на переливание» (Приложение А). В брошюре представлены тексты 15 задач, 5 из которых составлены мной, а также приведены решения некоторых из них различными способами. Это пособие может быть использовано для работы на факультативных занятиях по математике для учащихся 5 и 6 классов или для самостоятельной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи на переливание, безусловно, являются одним из наиболее популярных видов математических головоломок. Несмотря на то, что данные задачи выделены в отдельный тип, для их решения вполне могут применяться общие способы решения логических задач, такие как метод подбора, метод таблиц, метод граф, метод бильярда и др.

Выполняя исследование по теме, я познакомилась с этими методами, научилась применять их для решения задач на переливание, выбрала наиболее удобные для меня. Личный опыт в решении многих задач на переливание позволил мне сформулировать критерии, позволяющие оценить возможность применения каждого из способов учениками 6-х классов, а также помог в создании брошюры по теме исследования, в которой представлены 10 задач из различных источников, показавшиеся мне наиболее интересными, к которым я выполнила решения разными способами. Также я включила туда 5 авторских задач, составленных мною, решения к которым методом биллиарда представлены в Приложении Б.

Таким образом, в процессе работы над проектом гипотеза была подтверждена. А само исследование позволило сделать выводы о том, что применение нескольких методов при решении задач будет полезно для расширения кругозора учащихся и развития мышления, а также познакомит школьников с новыми для них подходами к решению логических задач.

Список использованных источников

1. Интернет-энциклопедия «Википедия» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.wikipedia.org. Дата доступа: 18.10.2019
2. Комогоров, В. Задачи на переливание : от головоломки к алгоритму / В. Комогоров, М. Сизова // Юный ученый. – 2017. – №3. – С.4-6.
3. Сайт физико-математической школы «Успех» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://phys-mathschool.blogspot.com/p/8-9. – Дата доступа: 14.11.2019.
4. Коксетер, С. Задача о трех кувшинах / С. Коксетер, С. Грейтцер // Квант. - 1978. - № 7.
5. Барболин, М. Головоломки и графы / М. Барболин // Квант. - 1975. - № 2.
6. Перельман, Я. Занимательная геометрия / Я. Перельман. – Д. : ВАП. - 1994 – 232 с.
7. Сайт глобальной школьной лаборатории «Globallab» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://globallab.org/ru/project/covCer/reshenie_zadatch_s_pomoshju_grafa.ru. Дата доступа: 27.11.2019.
8. Нагибин, Ф. Математическая шкатулка: пособие для учащихся 4-8 кл. ср. шк. / Ф. Нагибин, Е. Канин – 5-е изд. – М. : Просвещение, 1988. – 160 с.: ил.
9. Кузнецова, О. Решение задач на переливание векторным способом / Кузнецова О. // Математика. – 2010. – №10. – С. 31-32.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

•

ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ

Предисловие

Уважаемый читатель! Предлагаем вашему вниманию сборник задач на тему переливания жидкостей.

Брошюра выполнена в трех частях:

- задачи из тематических сборников;
- авторские задачи;
- решения задач.

Задания подобраны таким образом, чтобы читатель мог получить общее представление о данной разновидности логических задач и основных способах их решения. Причем подробные решения приведены только лишь для задач тематических сборников. Для авторских задач поиск решений предлагается осуществить самостоятельно по аналогии.

Применение различных способов решения полезно для расширения кругозора и развития мышления, а также дает возможность заинтересованным математикой учащимся познакомиться с новыми подходами к решению логических задач.

Желаем успеха!

Задачи тематических сборников

1. Можно ли, имея лишь 2 сосуда емкостью 3 и 5 литров, набрать из водопроводного крана 4 литра воды?

2. Как разделить поровну между двумя семьями 12 литров хлебного кваса, находящегося в двенадцатилитровом сосуде, воспользовавшись для этого двумя пустыми сосудами: восьмилитровым и трехлитровым?

3. Бидон, емкость которого 10 литров, наполнен керосином. Имеются еще пустые сосуды, емкостью 7 и 2 литра. Как разлить керосин в два сосуда по 5 литров каждый?

4. Имеются два сосуда. Емкость одного из них 9 литров, а другого – 4. Как с помощью этих сосудов набрать из бака 6 литров некоторой жидкости (жидкость можно сливать обратно в бак)?

5. Как имея два сосуда емкостью 5 и 9 л набрать из водоема ровно 3 литра воды?
6. Имеются три сосуда вместимостью 8, 5 и 3 литра. Первый из них наполнен водой. Как разлить воду в два из этих сосудов так, чтобы в каждом было по 4 литра?

7. Некто имеет 12 пинт сока и хочет подарить половину своему другу. Но у него нет сосуда в 6 пинт, а есть два сосуда в 8 и 5 пинт. Каким образом можно налить 6 пинт в сосуд емкостью в 8 пинт?

8. Разделить на две равные части воду, находящуюся в полном 16 литровом сосуде, пользуясь этим и пустыми 11- и 6-литровыми сосудами.

9. Какое наименьшее число переливаний необходимо для того, чтобы с помощью 7- и 11-литровых сосудов и крана с водой отмерить 2 л?

10. Имеется три бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас на две равные части.

Авторские задачи

1. В школьной столовой сварили компот в кастрюле емкостью 12 литров. Для подачи надо разлить этот компот пополам по 6 л. Дополнительно имеются кастрюли на 2 и 7 литров. Какое наименьшее количество действий надо совершить, чтобы получить заданный объем?

2. Бабушка собирается консервировать огурцы. У нее есть три кастрюли емкостью 10, 5 и 3 литра. 10-литровая кастрюля наполнена рассолом. Как бабушке с помощью двух оставшихся кастрюль отлить 6 литров рассола?
3. Чтобы полить теплицу, необходимо 8 ведер воды. Есть 2 емкости объемом 7 и 9 ведер. Как с помощью этих емкостей получить заданный объем (воду можно выливать обратно в колодец)?
4. Два товарища делили 8 литров «Колы». У них были 2 емкости на 3 и 5 литров. Удастся ли товарищам поделить напиток поровну?
5. В столовой пионерского лагеря приготовили суп в 14-литровой кастрюле. Как с помощью кастрюль на 9 и 5 литров разлить суп поровну для двух отрядов?

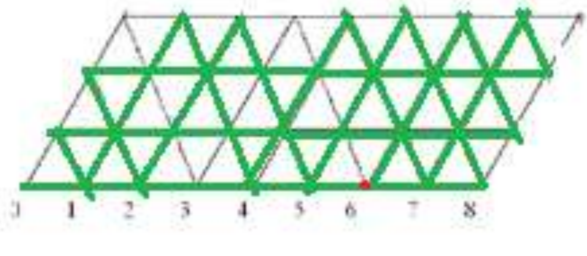
Решения к задачам тематических сборников

1. **Можно.**
Для решения задачи достаточно воспользоваться методом таблиц.

	3 л	5 л
Исходное состояние	0	5
После 1-го переливания	3	2
После 2-го переливания	0	2
После 3-го переливания	2	0
После 4-го переливания	2	5
После 5-го переливания	3	**4**

Описать переливания можно так:
- наливаем воду в 5-литровую емкость,
- отливаем из нее 3 литра и выливаем их (остается 2 литра в 5-литровой емкости),
- переливаем эти 2 литра в 3-литровую емкость,
- 5-литровую снова наполняем,
- доливаем из 5-литровой емкости 1 литр до края в 3-литровой, остается 4 л.

2. **Деление можно осуществить за 17 действий.** Для решения этой задачи можно воспользоваться методом бильярда.



12л	12	4	4	7	7	10	10	2	2	5	5	8	8	11	11	3	3	6
8л	0	8	5	5	2	2	0	8	7	7	4	4	1	1	0	8	6	6
3л	0	0	3	0	3	0	2	2	3	0	3	0	3	0	1	1	3	0

3. **К решению можно прийти, выполнив 3 действия по переливанию.** Для решения задачи достаточно воспользоваться методом таблиц.

Количество переливаний	Сосуды		
	10 л	7 л	2 л
Исходное состояние	10	0	0
После 1-го переливания	3	7	0
После 2-го переливания	3	5	2
После 3-го переливания	**5**	**5**	0

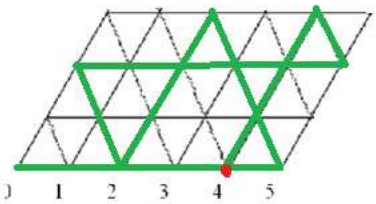
4. **К решению можно прийти, выполнив 7 действий по переливанию.** Для решения задачи достаточно воспользоваться методом таблиц.

	9 л	4 л
Исходное состояние	9	0
После 1-го переливания	5	4
После 2-го переливания	5	0
После 3-го переливания	1	4
После 4-го переливания	1	0
После 5-го переливания	0	1
После 6-го переливания	9	1
После 7-го переливания	6	**4**

5. **К решению можно прийти, выполнив 7 действий по переливанию.** Для решения задачи достаточно воспользоваться методом таблиц.

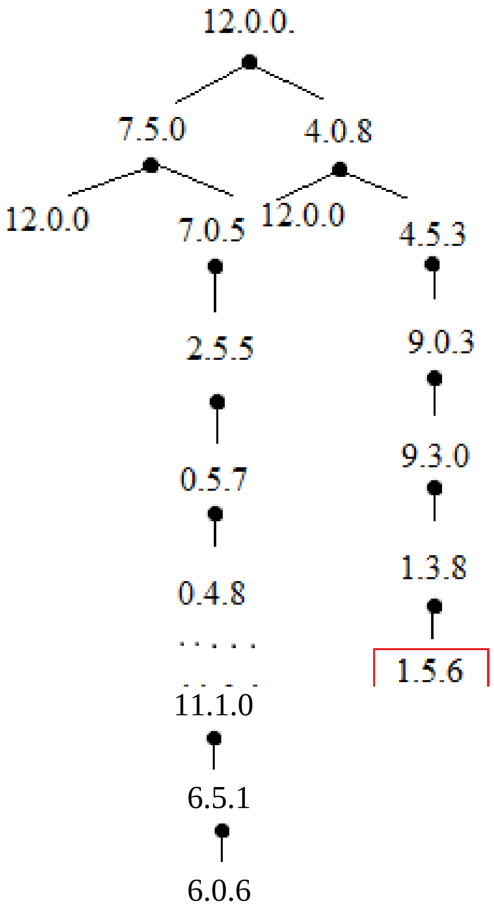
	9 л	5 л
Исходное состояние	9	0
После 1-го переливания	4	5
После 2-го переливания	4	0
После 3-го переливания	0	4
После 4-го переливания	9	4
После 5-го переливания	8	5
После 6-го переливания	8	0
После 7-го переливания	**3**	5

6. **Деление можно осуществить за 7 действий.** Для решения этой задачи можно воспользоваться методом бильярда.



8л	8	3	3	6	6	1	1	4
5л	0	5	2	2	0	5	4	4
3л	0	0	3	0	2	2	3	0

7. Деление можно осуществить за 7 действий. Для решения этой задачи **можно воспользоваться методом граф**.



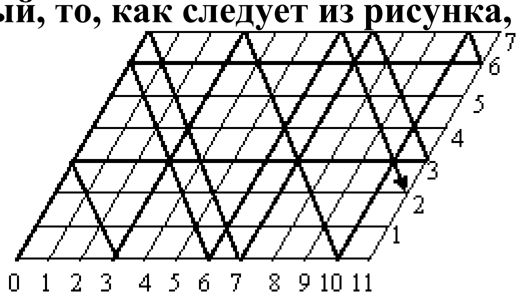
Очевидно, что всего **за 6 переливаний можно налить 6 пинт в сосуд емкостью в 8 пинт**.

8. К решению можно прийти, выполнив 14 действий по переливанию. Для решения задачи можно воспользоваться методом таблиц.

Количество переливаний	Сосуды		
	16 л	11 л	6 л
Исходное состояние	16	0	0
После 1-го переливания	10	0	6
После 2-го переливания	10	6	0

После 3-го переливания	4	6	6
После 4-го переливания	4	11	1
После 5-го переливания	15	0	1
После 6-го переливания	15	1	0
После 7-го переливания	9	1	6
После 8-го переливания	9	7	0
После 9-го переливания	3	7	6
После 10-го переливания	3	11	2
После 11-го переливания	14	0	2
После 12-го переливания	14	2	0
После 13-го переливания	8	2	6
После 14-го переливания	**8**	**8**	**0**

9. Для решения этой задачи можно воспользоваться методом бильярда. **Если сначала наполнить 11-литровый сосуд, то потребуется 18 переливаний, а если 7-литровый, то, как следует из рисунка, – всего 14**.



10. **К решению можно прийти, выполнив 5 действий по переливанию.** Для решения задачи воспользуемся методом таблиц.

Решение 1

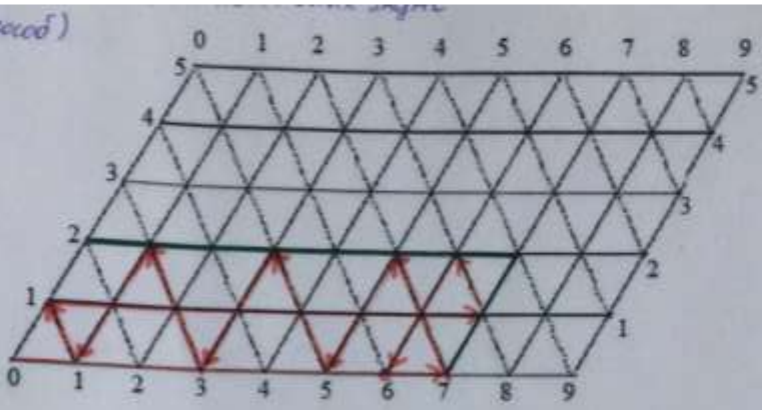
Количество переливаний	Сосуды		
	6 в.	3 в.	7 в.
Исходное состояние	4	0	6
После 1-го переливания	1	3	6
После 2-го переливания	1	2	7
После 3-го переливания	6	2	2
После 4-го переливания	5	3	2
После 5-го переливания	5	0	5

Решение 2

Количество переливаний	Сосуды		
	6 в.	3 в.	7 в.
Исходное состояние	4	0	6
После 1-го переливания	4	3	3
После 2-го переливания	6	1	3
После 3-го переливания	2	1	7
После 4-го переливания	2	3	5
После 5-го переливания	5	0	5

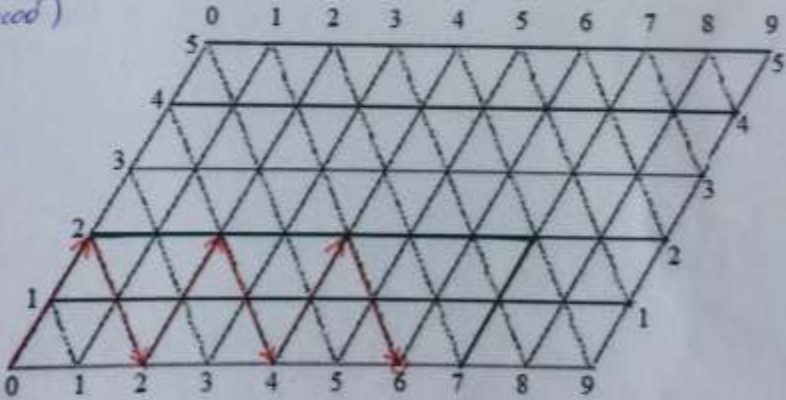
Решение авторских задач

№1 (I способ)



12	12	5	5	7	7	9	9	11	11	4	4	6			
7	0	7	5	5	3	3	1	1	0	7	6	6			
2	0	0	2	0	2	0	2	0	1	1	2	0			

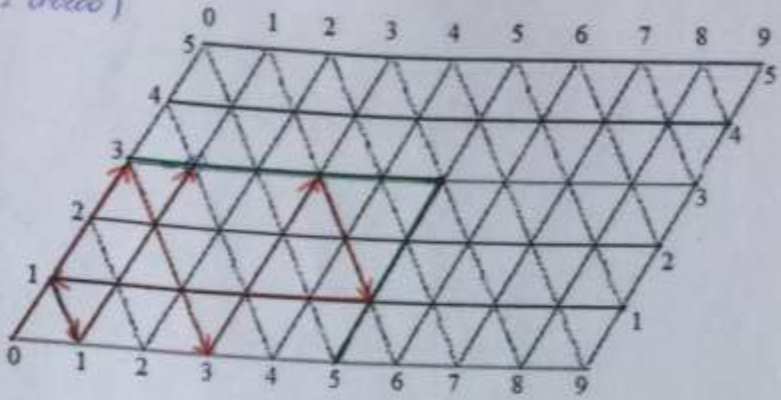
№1 (II способ)



12	12	10	8	8	6	6									
7	0	2	2	4	4	6									
2	0	0	2	0	2	0									

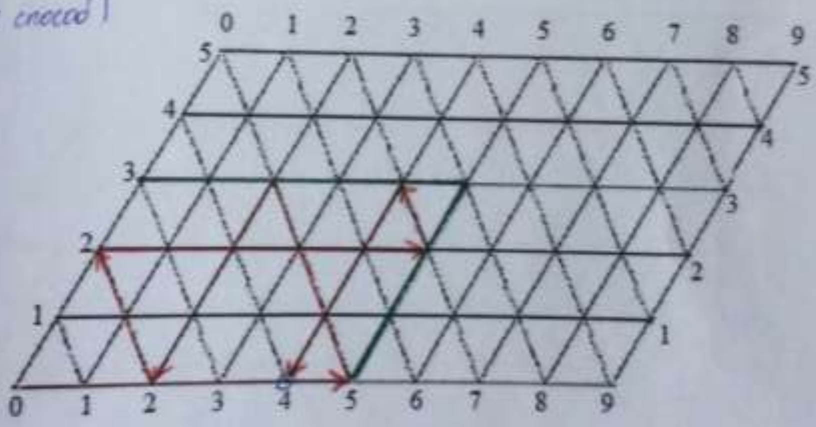
Ответ: наименьшее количество действий – 6.

№2 (I способ)



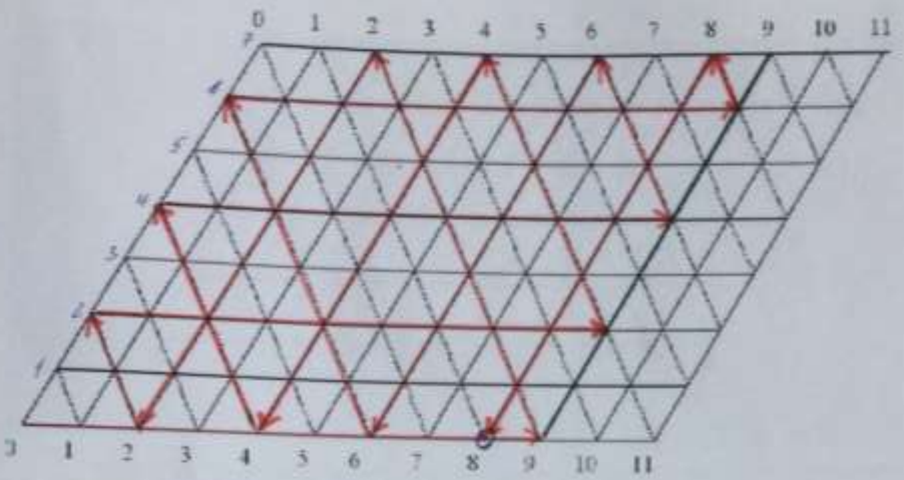
10	10	7	7	4	4	9	9	6							
5	0	0	3	3	5	0	1	1							
3	0	3	0	3	1	1	0	3							

№2 (II способ)



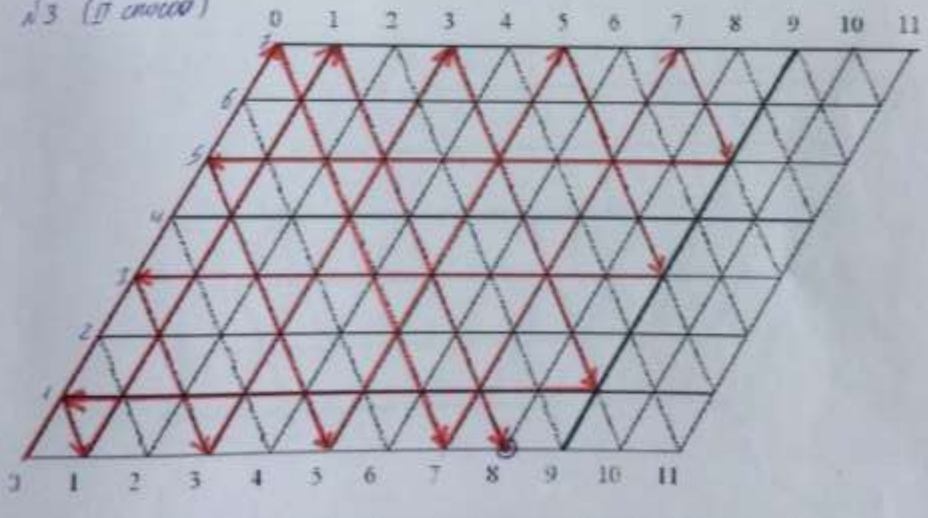
10	10	5	5	8	8	3	3	6							
5	0	5	2	2	0	5	4	4							
3	0	0	3	0	2	2	3	0							

№3 (I способ)



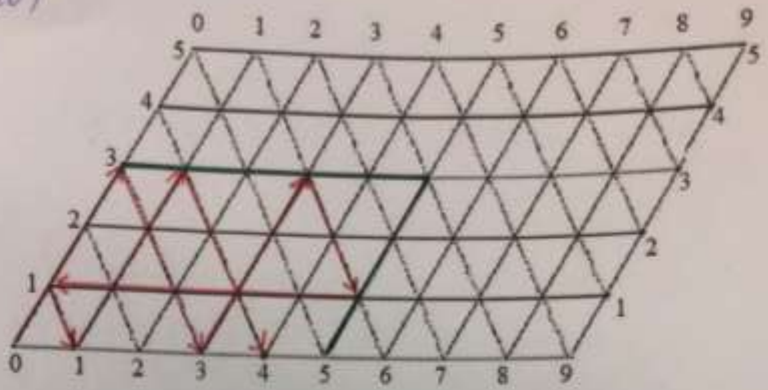
9	0	9	2	2	0	9	4	4	0	9	6	6	0	9	8	8			
7	0	0	7	0	2	2	7	0	4	4	7	0	6	6	7	0			

№3 (II способ)



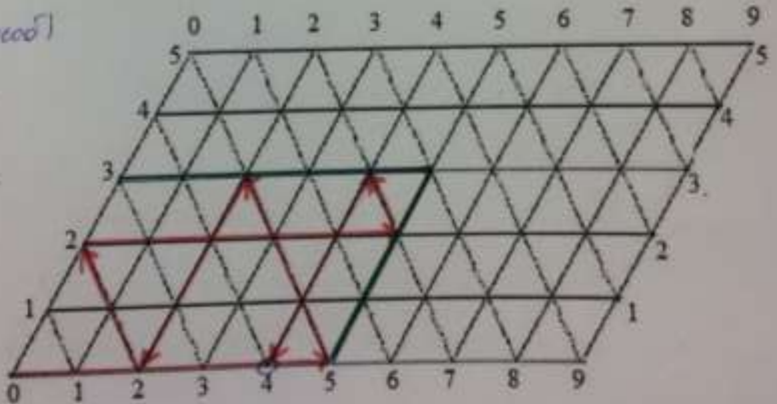
9	0	0	7	7	9	0	5	5	9	0	3	3	9	0	1	1	8		
7	0	7	0	7	5	5	0	7	3	3	0	7	1	1	0	7	0		

№4 (I способ)



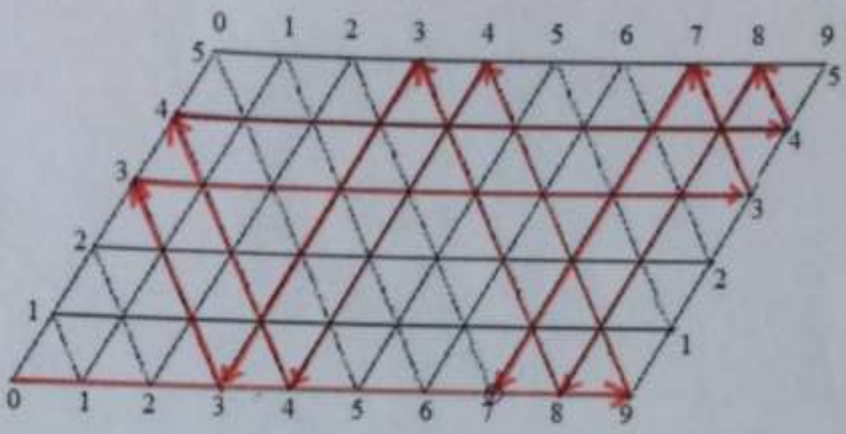
8	8	5	5	2	2	7	7	4	4						
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4						
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0						

№4 (II способ)



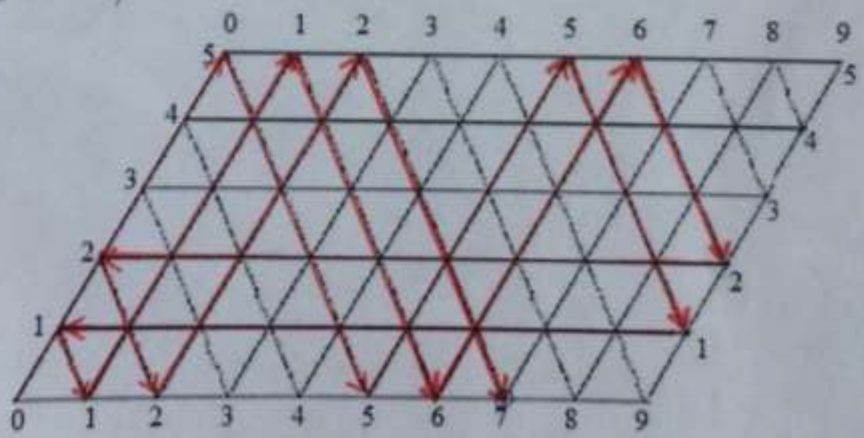
8	8	3	3	6	6	1	1	4							
5	0	5	2	2	0	5	4	4							
3	0	0	3	0	2	2	3	0							

№5 (I способ)



14	14	5	5	10	10	1	1	6	6	11	11	2	2	7	
9	0	9	4	4	0	9	8	8	3	3	0	9	7	7	
5	0	0	5	0	4	4	5	0	5	0	3	3	5	0	

№5 (II способ)



14	14	9	9	4	4	13	13	8	8	3	3	12	12	7	7
9	0	0	5	5	9	0	1	1	6	6	9	0	2	2	7
5	0	5	0	5	1	1	0	5	0	5	2	2	0	5	0