ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ №5 Г. ВИТЕБСКА ИМ. И.И. ЛЮДНИКОВА»

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА СИММЕТРИЧНОСТИ И ЧЕТНОСТИ ФУНКЦИЙ

Автор работы:
Буевич Дарья Сергеевна,
учащаяся 10 «Б» класса
Руководитель:
Безлюдова Наталья Петровна,
учитель математики

Витебск, 2021

Содержание

Введение

Решая олимпиадные задания по математике, часто сталкиваешься с задачами нестандартного вида: найти сумму корней уравнения, которое на первый взгляд кажется очень сложным для решения, или найти произведение суммы корней уравнения на какое либо число. Найти значение параметра, при котором уравнение имеет нечетное количество корней. Сначала при решении таких задач я сразу начинала решать само уравнение, рассматривая возможные методы, что было не всегда успешно, данный способ был трудоемкий и иногда я не имела возможности довести решение до ответа, при этом конечно и сумму не найденных мною корней я найти не могла. Тогда я решила узнать какой метод позволит мне решать такие задачи более рациональным способом и стала изучать тему свойства функции.

В математике часто встречаются задачи, при решении которых главную роль играют не сами корни уравнения, а свойства каким они обладают. Например, симметрия корней относительно нуля обращает их сумму в нуль.

Объект исследования: теория чисел.

Предмет исследования - методы решения уравнений, неравенств и систем, основанные на симметричности и четности функций.

Цель исследования - углубить и систематизировать знания по теме «Свойства функции», изучить и научиться применять методы решения уравнений, неравенств и систем, основанные на симметричности и четности функций.

Гипотеза - исследуя функцию на четность, можно:

определить сумму корней уравнения на промежутке, симметричном относительно нуля, определить четность количества корней, ответить на вопросы какова сумма корней, не решая само уравнение.

Задачи:

- изучить определение функции;
- изучить свойства четности функции;
- провести опыты по выдвижении гипотезы и ее проверке;
- формировать исследовательские компетенции;
- формировать практические и обще учебные навыки;
- составить и решить класс целесообразных задач по данной теме;
- сформулировать выводы, подтвердить гипотезу.

В работе использовались следующие методы:

теоретические: изучение дополнительной литературы по теме «Свойства функции», изучение свойств функций;

практические: составлен и решен класс целесообразных, расположенных по мере усложнения задач с применением на практике методов решения уравнений, неравенств и систем, основанных на симметричности и четности функций.

ГЛАВА 1
ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

1.1. Из истории возникновения функций. Определение функции

Функция – это одно из основных математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами. Каждая область знаний: физика, химия, биология, социология, лингвистика имеет свои объекты изучения, устанавливает свойства и, что особенно важно, взаимосвязи этих объектов.

В различных науках и областях человеческой деятельности возникают количественные соотношения, и математика изучает их в виде свойств чисел. Математика рассматривает абстрактные переменные величины и в отвлеченном виде, изучает различные законы их взаимосвязи, которые на математическом языке называются функциональными зависимостями, или функциями.

Например, в соотношении $y = x^2$ геометр или геодезист увидит зависимость площади y квадрата от величины x его стороны, а физик, авиаконструктор или кораблестроитель может усмотреть в нем зависимость силы y сопротивления воздуха или воды от скорости x движения. Математика же изучает зависимость $y = x^2$ и ее свойства в отвлеченном виде. Она устанавливает, например, что при зависимости $y = x^2$ увеличение x в 2 раза приводит к четырехкратному увеличению y. И где бы конкретно ни появилась эта зависимость, сделанное абстрактное математическое заключение можно применять в конкретной ситуации к любым конкретным объектам.

Понятие функции уходит своими корнями в ту далёкую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Они ещё не умели считать, но уже знали, что, чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем сильнее натянута тетива лука, тем дальше полетит стрела, чем дольше горит костёр, тем теплее будет в пещере. С развитием скотоводства и земледелия, ремесла и обмена увеличилось количество известных людям зависимостей между величинами.

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне большую роль в познании реального мира. Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур.

Однако явное и вполне сознательное применение понятия функции и систематическое изучение функциональной зависимости берут своё начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных.

Чёткого представления понятия функции в XVII в. ещё не было, однако путь к первому такому определению проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием аналитического выражения – формулы.

Явное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским математиком Бернулли: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Оно привело в восхищение престарелого Лейбница, увидевшего, что отход от геометрических образов знаменует новую эпоху в изучении функций. Многие из этих функций нельзя было явно выразить с помощью ранее известных операций. Поэтому один из самых замечательных математиков XVII в. Леонард Эйлер (1707 – 1783), вводя в своём учебнике понятие функции, говорит лишь, что «когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых».

В формировании современного понимания функциональной зависимости приняли участие многие крупные математики. Описание функции, почти совпадающее с современным, встречается уже в учебниках математики начала XIX в. Активным сторонником такого понимания функции был Н.И. Лобачевский.

В школьном учебнике математики дается следующее определение функции: Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y.

Переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y – зависимой переменной. Значение y, соответствующее заданному значению x, называют значением функции.

Пусть каждому числу x из множества значений D поставлено в соответствие число y из множества значений E.

Функция является четной, если:

1) область определения данной функции симметрична относительно нуля;

2) При этом равенство $f(x) = f(-x)$ должно выполняться при всех x из области допустимых значений.

Обратите внимание на графики четных функций.

Они симметричны относительно оси ОУ.

Но тогда, если график четной функции пересек ось ОХ в точке x_0, то есть $f(x_0)=0$, то он должен пересечь ось ОХ и в точке $(-x_0)$, то есть $f(-x_0)=0$

Это значит, что сколько раз справа от нуля график четной функции пересечет ось ОХ, столько же в, противоположных точках, и слева.

Значит для четной функции следующие условия:

1) функция имеет нечетное количество корней только в том случае, если *f(0)=0;*

2) если для данной функции *f(0) ≠ 0*, то функция всегда имеет четное количество корней;

3) сумма корней четной функции на симметричном относительно нуля промежутке всегда равна 0.

Исследуя функцию на четность, можно: определить сумму корней уравнения на промежутке, симметричном относительно нуля, определить четность количества корней, ответить на вопросы какова сумма корней, не решая само уравнение.

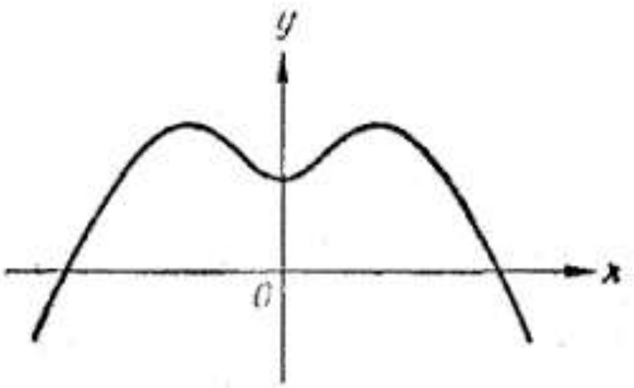


Рис. 279.

Рисунок 1 – График четной функции

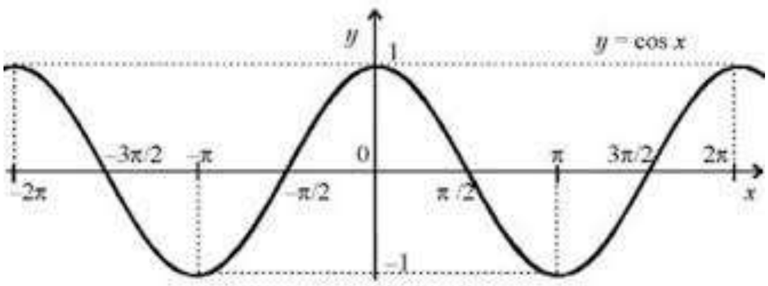


Рисунок 2 – График симметричной функции

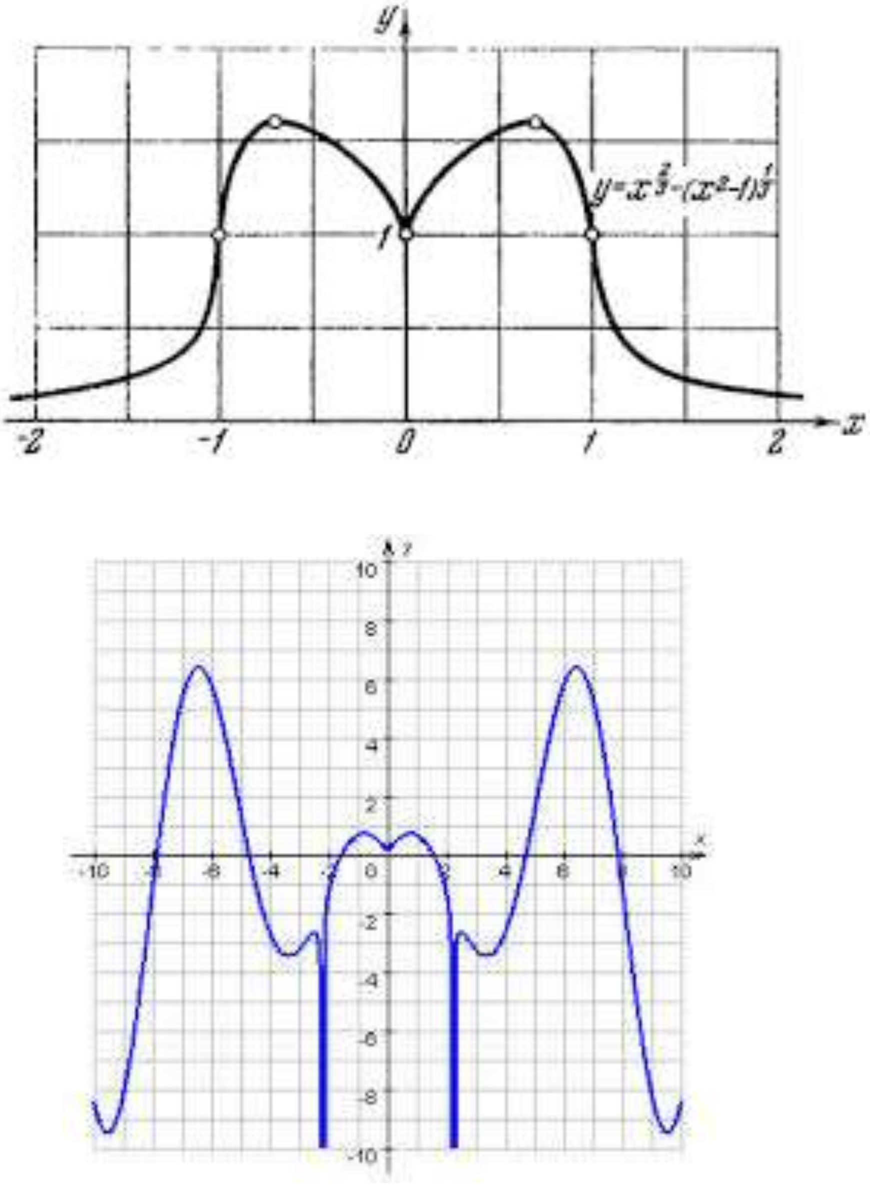


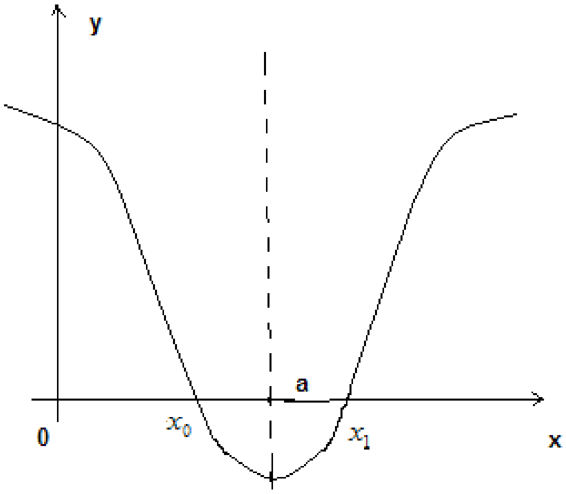
Рисунок 3 – График четной функции симметричен относительно оси ординат

Рассмотрим уравнение с параметром *f(x,a)=0.* (1)

В случае, когда функция *f* является четной относительно переменной *x* и если известен корень x_0 уравнения (1), то - x_0 также является корнем этого уравнения.

Следовательно, если стоит задача: «При каких значениях параметра *a* уравнение (1) имеет единственный корень?», либо «При каких значениях параметра *a* у уравнения (1) есть нечетное число корней?», то искомыми значениями могут быть только те значения параметра *a*, при которых значение $x_0 = -x_0 = 0$ является корнем уравнения (1). Отметим, что это условие является необходимым, но не достаточным для ответа на подобный вопрос. Однако в большинстве задач существует лишь несколько конкретных значений параметров, при которых нуль является корнем. В дальнейшем решении останется лишь проверить каждое из найденных значений параметров.

Аналогичные рассуждения позволяют получить необходимые условия и в некоторых системах с параметрами.



Рассмотрим уравнение

f(x)=0. (2)

В случае, когда функция *f(x)* является симметричной относительно $\frac{1}{x}$ (то есть после замены

$y = \frac{1}{x}$ функция не меняется), то при наличии у уравнения корня $x_0 \neq 0$ корнем является так же $\frac{1}{x_0}$.

Если (2) график *y = f(x)* симметричен относительно прямой *x = a* (см. рис.) и известен корень x_0 уравнения (2), то значение $x = x_1$, расположенное симметрично относительно *a*, также является корнем уравнения

(т.е. $x_0 - a = a - x_1$, откуда $x_1 = 2a - x_0$).

Это значит, что в уравнении (2) можно осуществить замену переменной $y = x - a$ и функция *f(y)* будет являться четной.

Применение свойств четности функции значительно облегчает решение задач разной степени сложности.

1.2. Лестница уравнений

1.1. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 8} = 3$$

1.2. Решить систему уравнений. В ответ записать сумму всех решений.

$$\begin{cases} 2\acute{o}^8 = \tilde{o}^4\acute{o}^4 + 1, \\ 3\acute{o}^8 = \tilde{o}^4\acute{o}^4 + 2. \end{cases}$$

1.3. Решите уравнение $(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2} + x\sqrt{x^2+7} = 0$.

1.4. Вычислить сумму корней уравнения $|x-2| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+2| = x^2 - 4$

1.5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет нечетное количество корней $8^x + 8^{-x} = 5 + a(6|x| - 4\cos x)$

1.6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$ имеет три корня

1.7. Решить уравнение $\dfrac{\left(x^2 - x + 1\right)^3}{\left(5 - \sqrt{5} + 1\right)^3} = \dfrac{x^2(x-1)^2}{5\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}$

1.8. При каких значениях параметра a система неравенств имеет единственное решение?

$$\begin{cases} (y-x)^2 + x - 3y - 9a \le 0, \\ (x+y)^2 - x - 3y - 9a \le 0 \end{cases}$$

1.9. Найти произведение суммы корней уравнения и числа 2020.

$$(x^2 + 27)^2 - 5 \cdot (x^2 + 27) \cdot (x^2 + 3) + 6 \cdot (x^2 + 3)^2 = 0$$

Рассмотрим решение данных заданий.

Пример 1.1.Найти сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 8} = 3$

Решение. 1)Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 8} - 3$

D(y)=R

f(x) = f(-x)

Значит, функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 8} - 3$ - четная.

Следовательно, сумма корней уравнения равна нулю.

Ответ: 0

Пример 1.2. Решить систему уравнений. В ответ записать сумму всех решений.

$$\begin{cases} 2\tilde{o}^8 = \tilde{o}^4 \acute{o}^4 + 1, \\ 3\acute{o}^8 = \tilde{o}^4 \acute{o}^4 + 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $f(x) = 2x^8 - x^4 y^4 - 1$. Тогда *f(x)* – четная функция.

$g(y) = 3y^8 - x^4 y^4 - 2 \quad \Rightarrow$ *g(y)* – четная.

Следовательно, сумма всех решений системы равна нулю.

Ответ: 0

Пример 1.3. Решите уравнение $(2x+1))\sqrt{7 + (2x+1)^2} + x\sqrt{x^2 + 7} = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(y)= y\sqrt{y^2+7}$.

Тогда исходное уравнение можно представить в виде $f(2x+1)+f(x)=0$.

Заметим, что функция *f(x)* является нечетной, поэтому можно переписать это уравнение так: *f(2x+1)=f(-x).* Поскольку кроме того функция *f(y)* монотонно возрастает на всей своей области определения, то из предыдущего уравнения следует $2x+1=-x$, откуда находим корень исходного уравнения.

Ответ: $x=-\frac{1}{3}$.

Подчеркнем, что переход от уравнения *f(2x+1)=f(-x)* к уравнению $2x+1=-x$ является равносильным в том случае (но не только в том), когда функция *f(y)* является монотонной на своей области определения и ее область определения – вся числовая ось!

Пример 1.4. Вычислить сумму корней уравнения $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|=x^2-4$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|-x^2+4$,

1) *D(y)=R*

2) $f(-x)=|-x-2|+|-x-1|+|-x|+|-x+1|+|-x+2|-(-x)^2+4=$
$=|x+2|+|x+1|+|x|+|x-1|+|x-2|-x^2+4$; *f(x) = f(-x)*

Значит, функция *f(x)* четная. Следовательно, сумма корней на симметричном промежутке (в данном случае R) равна нулю. **Ответ:** 0

Пример 1.5. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение имеет нечетное количество корней $8^x+8^{-x}=5+a(6|x|-4\cos x)$

Решение. Рассмотрим функцию *f(x)=* $8^x+8^{-x}-5+a(6|x|-4\cos x)$

1) *D(y)=R*

2) *f(x) = f(-x)*

Значит, функция *f(x)* – четная. Следовательно, имеет нечетное число корней только если *f(0)=0.*

f(0)=1 + 1 – 5 – a(0-4cos 0)= -3 – a(-4)= 4a - 3 = 0

$a=\frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Пример 1.6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^{10}-a|x|+a^2-a=0$ имеет три корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{10}-a|x|+a^2-a$

1) *D(y)=R*

2) *f(x) = f(-x)*

Значит, функция *f(x)* – четная.

Нечетное число корней она имеет только если *f(0)=0*, то есть $a^2-a=0$.

a = 0 или *a = 1*.

Проверка: *a = 0*; $x^{10}=0$ - не 3 корня.

a = 1; $x^{10}-|x|=0$;

$$x^{10}-|x|=0$$

$|x|=0$ или $|x|^9=1$

$x=0$ или $x=1$ или $x=-1$ уравнение имеет 3 корня.

Ответ:1

Пример 1.7. Решить уравнение $\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{x^2\left(x-1\right)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$

Решение. Внешний вид уравнение подсказывает, что одним из корней является число $x_1=\sqrt{5}$. Воспользуемся тем, что

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},\quad x(x-1)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)^2}{5(\sqrt{5}-1)^2}$$

Тогда видно, что $x_2=1-x_1=1-\sqrt{5}$ - корень исходного уравнения, поскольку $\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2$.

Покажем, что если x_1 ($x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 1$) является корнем исходного уравнения, то $x_3 = \frac{1}{x_1}$

Также есть корень этого уравнения. Это действительно так, потому что

$$\frac{\left(x_3^2 - x_3 + 1\right)^3}{x_3^2\left(x_3 - 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1\right)^3}{\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)^2} = \frac{\left(x_1^2 - x_1 + 1\right)^3}{x_1^2\left(x_1 - 1\right)^2}.$$

Таким образом, если x_1 ($x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 1$) – корень уравнения, то корнями уравнения также являются $\frac{1}{x}$, $1 - x_1$, $\frac{1}{1 - x_1}$, $1 - \frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{1 - \frac{1}{x_1}}$, т.е. исходное уравнение имеет корни $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{5}}$, $x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_6 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}$.

Так как исходное уравнение есть алгебраическое уравнение шестой степени, то оно имеет не более шести корней. Следовательно, найдены все корни исходного уравнения.

Ответ: $\left\{\sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{1 - \sqrt{5}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right\}$

Пример 1.8. При каких значениях параметра *a* система неравенств имеет единственное решение?

$$\begin{cases} (y - x)^2 + x - 3y - 9a \leq 0, \\ (x + y)^2 - x - 3y - 9a \leq 0 \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если некоторая пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то пара $(-x_0; y_0)$ также является ее решением. Следовательно, необходимым условием существования единственного решения исходной системы является условие $x_0 = -x_0$, откуда $x_0 = 0$.

При $x = 0$ исходная система равносильна одному неравенству $y^2 - 3y - 9a \leq 0$.

Это квадратное неравенство имеет единственное решение, если

D = 9 + 36 a = 0, откуда $a = -\frac{1}{4}$. Итак, последнее неравенство является необходимым условием, накладываемым на значение параметра а, чтобы исходная система имела одно решение.

Подставляем найденное значение a в исходную систему

$$\begin{cases} 4(y-x)^2 + 4x - 12y + 9 \le 0, \\ 4(x+y) - 4x - 12y + 9y \le 0 \end{cases}$$

Так как знаки у неравенств одинаковые, то можно сложить их. Получаем следствие системы

$$4(y-x)^2 + 4(x+y)^2 - 24y + 18 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 4x^2 + 9 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2y-3)^2 + 4x^2 \le 0.$$

Решением последнего неравенства является единственная пара $\left(0;\frac{3}{2}\right)$, следовательно, только она может являться решением исходной системы при $a = -\frac{1}{4}$. Проверкой убеждаемся, что это так.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$

Пример 1.9. Найти произведение суммы корней уравнения и числа 2020.

$$(x^2+27)^2 - 5\cdot(x^2+27)\cdot(x^2+3) + 6\cdot(x^2+3)^2 = 0$$

Решение. Левая часть уравнения – четная функция (если рассматривать ее как функцию относительно x). А значит, сумма корней этого уравнения равна 0.

Ответ: 0.

ГЛАВА 2
ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Изучение физических, химических, экономических и многих других закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами, к исследованию процесса в зависимости от параметра.

Поэтому навыки решения задач с параметрами, знание некоторых их особенностей нужны всем специалистам, в любой области научной и практической деятельности.

Актуальность - гипотеза о том, что исследуя функцию на четность, можно:

определить сумму корней уравнения на промежутке, симметричном относительно нуля, определить четность количества корней, ответить на вопросы какова сумма корней уравнения, не решая само уравнение, подтвердилась.

Выводы: Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. В школе же этот один из наиболее трудных разделов школьного курса математики рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях.

Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. На мой взгляд, исследование функции является удобным и быстрым способом решения уравнений и неравенств с параметрами. В моей работе рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений, неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении а ВУЗ**.** Изучив теоретический материал по теме «свойства функций», я узнала много нового, а так же сама составила и решила 10 задач на данную тему. Я была удивлена, как рационально решаются задачи с применением данного метода. После изучения литературы, я применяла эти методы для вычисления суммы корней уравнения, нахождение значения параметра, при котором уравнение имеет три корня, нахождение произведения суммы корней уравнения и некоторого числа, и самостоятельно решила ряд задач (о них рассказано в практической части). В ходе этой работы я убедилась в том, насколько полезно обладать теоретическими знаниями по теме «Свойства функций», и как применение свойств функций упрощают решение на первый взгляд трудных задач.

Заключение

Таким образом, в ходе работы выполнено следующее: изучена и проанализирована литература по теме «Свойства функции»; исследованы различные способы и методы вычисления суммы корней уравнения, нахождение значения параметра при котором уравнение имеет нечетное количество корней; нахождение значения произведения суммы корней уравнения на число; собраны интересные задачи на данную тему; результат исследовательской работы представил практическую ценность и был использован при проведении факультативных занятий по математике в 9; 10-х классах.

Изучение данного вопроса расширило мое представление о свойстве функций, способствовало приобретению некоторых навыков в проведении математических экспериментов в вычислениях.

Список использованных источников

1. Башмаков, М.И. Алгебра и начало анализа / М.И. Башмаков. – М. : Просвещение, 1992.
2. Глейзер, Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1983
3. Гусев, В.А. Математика: Справочные материалы / В.А. Гусев. – М. : Просвещение, 1983
4. Дорофеев, Г.В. Пособие для поступающих в ВУЗы / Г.В. Дорофеев. – М. : Наука, 1989
5. Видео уроки. Свойства функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=5C0AX5R7Wc8. – Дата доступа: 21.10.2020.
6. Чётность функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8?wprov=srpw1_0. – Дата доступа: 11.09.2020.