Областное Государственное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение

«Лицей №9»

«Математика в олимпиадных задачах»

Выполнила:

Ученица 9 «А» класса

ТатулянКаринэ Артуровна

Руководитель проекта:

Маслакова Лариса Фёдоровна

Белгород, 2020

**Содержание**

1. Основная часть………………………………………………………………………**3**
   1. Актуальность исследования……………………………………………………**3**
   2. Цель исследования……………………………………………………………...**3**
   3. Задачи исследования……………………………………………………………**3**
   4. Предмет исследования………………………………………………………….**3**
2. Основная часть………………………………………………………………………**4**

**2.1** Разбор олимпиадных заданий………………………………………….………**4**

**2.1.1** «Будущие исследователи – будущее науки»…………………………..**4**

**2.1.2**  Межрегиональная олимпиада по математике «САММАТ»…………..**5**

**2.1.3** «Покори Воробьёвы горы!»………………………………………….….**6**

**2.1.4** Всероссийская олимпиада школьников…………………………….….**7**

**2.2** Темы для изучения олимпиадной математики………………………………..**9**

**2.2.1** Метод математической индукции………………………………….…...**9**

**2.2.2** Комбинаторика……………………………………………………….….**9**

**2.2.3** Принцип Дирихле………………………………………………………**11**

**2.2.4** Логические задачи……………………………………………………...**12**

* + 1. Графы…………………………………………………………………...**12**

1. Вывод……………………………………………………………………………….**14**
2. Список использованной литературы……………………………………………..**14**

**2**

**Введение**

В настоящее время целью многих учеников является получить хорошее образование. Для достижения данной цели студенты выбирают лучшие ВУЗы страны, при поступлении в которые проходит конкурсный отбор. Упростить процедуру поступления помогают вузовские и всероссийские олимпиады по разным предметам.

**Актуальность исследования:** Математика необходима во всех профессиях, именно поэтому олимпиады по математике универсальны и могут помочь с поступлением в ВУЗы на совершенно разные по направлению специальности, такие как экономист и архитектор.

**Цель исследования:** Проанализировать олимпиады разных уровней, проводимых в Российской Федерации.

**Задачи исследования:**

* Проанализировать, какие олимпиады более распространены среди школьников моего региона;
* Вычислить, какие олимпиадные темы затрагиваются чаще остальных;
* Более подробно изучить выбранные темы;
* Составить брошюру.

**Предмет исследования:** олимпиады и задачи.

**3**

**Основная часть**

**Разбор олимпиадных заданий**

Олимпиады, проводимые в Российской Федерации, представляют многоуровневую ступень, состоящую из трёх уровней. Победа на олимпиадах, которым присвоен один из уровней, может принести льготы при поступлении в ВУЗы. Учебные заведения сами устанавливают размер добавочных баллов и профили олимпиад в зависимости от направлений.

Рассмотрим перечень олимпиад по математике, разделяя их на уровни, утверждённые министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

1. Уровень: Олимпиада «Высшая проба»; Московская олимпиада по математике; Олимпиада школьников «Ломоносов»; Олимпиада – «Покори Воробьевы горы!» по математике; Олимпиада СПбГУ по математике; Турнир городов.
2. уровень: «Турнир Ломоносова»; Олимпиада «Росатом»; Олимпиада школьников «Физтех»; Олимпиада «Формула Единства»; Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ»; Объединённая межвузовская математическая олимпиада.
3. уровень: Университетская олимпиада школьников «Бельчонок» по математике; Олимпиада «Шаг в будущее» по математике; Олимпиада университета Иннополис «InnopolisOpen» по математике; Многопрофильная олимпиада УрФУ для школьников «Изумруд»; «Паруса надежды»; Олимпиада «Будущие исследователи – Будущее науки».

Разбор заданий олимпиад:

3 уровень:

«Будущие исследователи – будущее науки» (2019-2020г)

1. Внутри прямоугольника ABCD отметили точку М и на отрезках АМ, ВМ, СМ и DM построили как на диаметрах четыре круга. Пусть Sa, Sb, Sc, Sd – соответственно, площади этих кругов. Докажите, что Sa+Sc= Sb+Sd.
2. Имеется пять палочек, длина каждой больше 2 см, но меньше 8 см. Докажите, что можно взять три палочки из этих пяти и сложить из них треугольник.

**4**

3. Дан треугольник АВС с медианой ВМ. На медиане отметили произвольную точку Р и через Р провели прямую, параллельную АВ, а через точку С провели прямую, параллельную ВМ. Эти прямые пересеклись в точке Q. Докажите, что отрезок ВР делится пополам в точке пересечения с прямой АQ.

4.Сколько существует трехзначных натуральных чисел п, для которых число n 3 – n 2 является точным квадратом?

|  |
| --- |
| Задачи на комбинаторику – 25%  Задачи по геометрии – 50%  Задания на использование теории чисел – 25% |

2 уровень:

Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ» (отборочный тур 2019-2020г).

1. Упростить выражение.
2. Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 80 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго. Если второй выедет на 1 час раньше первого, то они встретятся через 2 часа после выезда первого. С какой скоростью едет каждый велосипедист? В ответе укажите сумму данных скоростей.
3. Найдите сумму всех целых m, удовлетворяющих неравенству (m² − 3m − 2)(m² − 3m − 3) ≤ 2.
4. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Один из катетов делится точкой касания на отрезки 6 и 10, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь данного треугольника.
5. Решить систему

В ответе укажите сумму всех значений *x*, удовлетворяющих данной системе.

**5**

1. Вычислить
2. Цена на арбузы была снижена на 20%. Сколько килограммов весит арбуз, приобретенный за те же деньги, за которые можно было приобрести арбуз весом 7 кг 200 г?
3. Для каких *а* разность корней уравнения равна 3? Если таких значений несколько, то в ответе запишите их сумму, увеличенную в 9 раз.
4. Известно, что числа *x* и *y* являются решениями уравнения

.

Найдите сумму чисел *x* и *y*, являющихся решениями уравнения.

1. Найдите все натуральные n, для каждого из которых все три числа *n, n* + 26, *n* + 28 являются простыми числами.

|  |
| --- |
| Задачи на использование теории чисел – 10%  Задачи по геометрии – 10%  Задания на работу с уравнениями и неравенствами – 50 %  Текстовые задачи – 20%  Задачи на рациональное вычисление – 10% |

1 уровень:

Покори Воробьёвы горы! (2019-2020г).

1. Найдите натуральное число N (N > 1), если числа 1743, 2019 и 3008 дают одинаковые остатки при делении на N.
2. Найдите наименьшее такое натуральное число n, что содержат цифру 7.
3. Квадрат с целочисленной стороной разрезали на 2020 квадратов. Известно, что площади 2019 квадратов равны 1, а площадь 2020-го – не равна 1. Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь 2020-го квадрата. В ответе наименьшее из полученных значений площади.

**6**

1. Мастер Ли Си Цын делает веера. Каждый веер состоит из 6 секторов, покрашенных с двух сторон вкрасный и синий цвета. Причем если одна из сторон сектора покрашена в красный цвет, то обратная покрашена в синий и наоборот. Каждые два веера, сделанные мастером, отличаются раскраской (если одна раскраска переходит в другую при переворачивании веера, то они считаются одинаковыми). Какое набольшее количество вееров может сделать мастер?
2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение
3. Четыре рабочих выкопали траншею за 6 часов. Если бы первый работал в два раза быстрее, а второй – в два раза медленнее, то они выкопали бы за такое же время, а если бы первый работал в два раза медленнее, а второй – в два раза быстрее, то они выкопали бы траншею за 4 часа. За какое время выкопают траншею первые три рабочих?
4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD сторона AB равна диагонали BD, ∠A=65° , ∠𝐵 = 80° , ∠C=75° . Чему равен∠CAD (в градусах)?

|  |
| --- |
| Задачи сна использование теории чисел – 28,6%  Задачи по геометрии – 14,3 %  Текстовые задачи – 28,6%  Задания на работу с уравнениями–28,6% |

1 уровень:

Всероссийская олимпиада школьников(2019-2020г).

1. Четырёхзначное число называется восхитительным, если оно само делится на 25, его сумма цифр делится на 25 и его произведение цифр делится на 25. Найдите все восхитительные числа.
2. У Маши в школе уроки заканчиваются в 13:00, мама встречает её на машине, и они едут домой. Однажды уроки закончились в 12:00, и Маша пошла домой пешком. По пути она встретила маму, которая, как обычно, поехала забирать дочь к 13:00 в школу.

И дальше Маша с мамой поехали домой на машине, причём приехали на 12 минут раньше обычного. Во сколько Маша встретила маму на дороге? (Скорости Маши и мамы постоянны, время на посадку в машину не тратится).

**7**

1. У уравнений есть один общий корень. Чему может быть равен этот корень, если известно, что a≠b?
2. Ирина выписала на доску в ряд некоторые целые числа от 0 до 999. В итоге получилось длинное число. Полина записала на свою часть доски все оставшиеся целые числа из этого же диапазона, в итоге получилось второе длинное число. Могли ли эти два длинных числа совпасть?
3. На стороне AD квадрата ABCD отметили точку K, а на продолжении луча AB за точку B — точку L. Известно, что ∠LKC = 45◦ , AK = 1, KD = 2. Найдите LB.
4. Экскурсионная группа из 6 туристов осматривает достопримечательности. Около каждой достопримечательности три человека фотографируются, а остальные их фотографируют. После какого минимального числа достопримечательностей каждый турист будет иметь фотографии всех остальных участников экскурсии?

|  |
| --- |
| Задачи на использование теории чисел – 34%  Задачи по геометрии – 17%  Текстовые задачи – 17%  Задания на работу с уравнением – 17%  Комбинаторные задачи – 17% |

Проведя анализ заданий разных олимпиад, можно сделать вывод, что следующие олимпиадные темы:

* Метод математической индукции;
* Комбинаторика;
* Принцип Дирихле;
* Логические задачи;
* Графы

Могут помочь в решение задач олимпиад разных уровней.

**8**

**Темы для изучения олимпиадной математики**

***Метод математической индукции***

Индукция – это переход от частного к общему.

Этапы решения задач методом индукции:

1. Для начала мы проверяем верность исходного утверждения в случае произвольного натурального значения n (обычно проверка делается для единицы).
2. После этого мы проверяем верность при n=k.
3. И далее доказываем справедливость утверждения в случае, если n=k+1.

Пример решения:

Докажите, что делится на 16 при всех

1. Проверим для +15=16 делится на 16, для n=2:
2. Допустим, что утверждение верно при n=k, то есть примет вид:

Так как

Утверждение верно для n=0,1,2. Если утверждение верно для n=k, то оно верно и для n=k+1. Тогда утверждение верно для любого целого неотрицательного n, чтд.

***Комбинаторика***

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий способы подсчёта количества возможных комбинаций, которые можно составить из определенных объектов.

**9**

Основные понятия комбинаторики: перестановка, размещение и сочетание.

*Перестановка –* конечное множество, в котором указан порядок его элементов. Количество перестановок nразличных элементов равно

|  |
| --- |
|  |

Пример:

Сколькими способами 4 пассажира могут разместиться в четырёхместном купе поезда?

Нам даны 4 места и 4 пассажира, воспользуемся формулой

Ответ: 24 способа.

*Размещение –* это упорядоченное множество, состоящее из kэлементов, которые выбраны из nэлементов.

Количество размещений из n по k:

Пример:

Сколькими способами 4 пассажира могут разместиться в шестиместном купе поезда?

Нам даны 4 пассажира и 6 мест (k≠n) воспользуемся формулой

Ответ: 360 способов.

*Сочетание –* неупорядоченное множество, состоящее из k элементов, которые выбраны из n элементов.

Количество возможных сочетаний из n по k:

**10**

Пример:

Сколько четвёрок мест можно составить, выбирая 4 места из 6?

Посчитаем число сочетаний из 6 по 4, используя формулу

Ответ: 3 способа.

***Принцип Дирихле***

*Если кроликов рассаживать по клеткам, и при этом количество кроликов больше, чем количество клеток, то в одной из клеток окажется не менее двух кроликов.*

Пример:

В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Докажите, что если вытащить наугад три шарика, то два из них окажутся одного цвета.

Пусть два цвета (черный и белый) будут «клетки», тогда наугад вытащенные три шарика – «зайцы» по принципу Дирихле два из трёх шарика окажутся одного цвета, чтд.

***Обобщённый принцип Дирихле***

*Если a кроликов рассаживать по b клеткам, и при этом a:b=c (ост.=r), где r≠0, то в одной из клеток окажется не менее (c+1) кролика.*

Пример:

В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов (в каждом ящике яблоки одного сорта). Докажите, что среди них, по крайней мере, 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Решим данную задачу «от противного». Допустим, что ящиков всех сортов поровну, тогда 25:3 = 8 и ост =1. по обобщённому принципу Дирихле есть как минимум 9 ящиков одного и того же сорта яблок; чтд.

**11**

***Логические задачи***

Для решения логических задач не существует теорем или чётких правил, но хорошо развитая логика помогает в решении олимпиадных задач.

Примеры:

№1 В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

Более удобным способом решения таких задач является построение таблицы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | «Малиновое» | «Клубничное» | «Малиновое и клубничное» |
| Смородиновое | **-** | **-** | **+** |
| Малиновое | **-** | **+** | **-** |
| Клубничное | **+** | **-** | **-** |

Заполним таблицу, опираясь на данные из условия.

Ответ: Малиновое.

№2 У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

Предположим, что пресс-секретарь украл перец он говорит неправду пресс-секретарь не знает, кто украл перец, но если это сделал он, то пресс-секретарь знает, кто украл противоречие пресс-секретарь не виновен.

***Графы***

Графом называется геометрическая фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий. Точки называются вершинами графа, а линии — ребрами.

№1

В государстве 100 городов, и из каждого выходит 4 дороги в другие города. Сколько всего дорог, соединяющих два города, в этом государстве?

Подсчитаем общее количество выходящих городов дорог – 100 × 4 = 400. Однако при таком подсчете каждая дорога посчитана 2 раза – она выходит из одного города и входит в другой. Значит всего дорог в два раза меньше, т.е. 200.

Ответ: 200.

**12**

*Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной. А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.Количество нечётных вершин в графе – чётно.*

№2

В Тридевятом царстве только один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в город Дальний.

Понятно, что если нарисовать граф ковролиний Царства, то он может быть несвязным. Рассмотрим компоненту связности, которая включает в себя столицу Царства. Из столицы выходит 21 ковролиния, а из любых других городов, кроме города Дальний – по 20, поэтому, чтобы выполнялся закон о четном числе нечетных вершин необходимо, чтобы и город Дальний входил в эту же самую компоненту связности. А так как компонента связности – связный граф, то из столицы существует путь по ковролиниям до города Дальний, что и требовалось доказать.

*Теорема Эйлера –* граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, имеет либо две нечётные вершины, либо ни одной.

№3 (Задача о Кёнигсбергских мостах)

Можно ли совершить прогулку по Кёнигсбергу, пройдя по каждому мосту ровно один раз?



Граф кёнигсбергских мостов имеет четыре нечётные вершины — следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

**13**

**Вывод**

Проделав проектную работу, я проанализировала олимпиадные темы по математике. Составила брошюру, с помощью которой можно будет легко подготовиться к олимпиадам. В данной брошюре предоставлен список олимпиадных тем (метод математической индукции, комбинаторика, графы, принцип Дирихле и логические задачи), а также примеры решений задач на эти темы.

Надеюсь, что моя брошюра поможет любителям математики подготовиться к олимпиадам и осуществить свою мечту, поступив в один из лучших ВУЗов России.

**Список использованной литературы**

* <https://olimpiada.ru/>
* <https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/stati/metod-matematicheskoj-induktsii/>
* <http://math.siomax.ru/Combinatorics.html>
* <https://foxford.ru/>
* <http://bourabai.ru/euler/koenig.htm>
* <https://ru.wikipedia.org/>

**14**

**Брошюра**

