УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ МИНОБЛИСПОЛКОМА

***УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАНИЮ***

***СОЛИГОРСКОГО РАЙОННОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО КОМИТЕТА***

***государственное учреждение образования***

***«ГИМНАЗИЯ №1 г. Солигорска»***



***Исследовательская работа***

***Использование метода***

***математической индукции***

***для решения олимпиадных задач***

**Выполнила:** Качановская София Николаевна,

учащаяся 7 «В» класса

**Руководитель**: Гоглева Ксения Георгиевна,

учитель математики

ГУО «Гимназия №1 г. Солигорска»

223710 г. Солигорск, ул. Ленина, 49а

Солигорск 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc50555362)

[ГЛАВА I. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ФОРМУЛ И РАВЕНСТВ 4](#_Toc50555363)

[1.1. – сумма n первых натуральных чисел 4](#_Toc50555364)

[1.2. – сумма n первых нечетных натуральных чисел 4](#_Toc50555365)

[1.3. – сумма квадратов n первых натуральных чисел 4](#_Toc50555366)

[1.4. – сумма кубов n первых натуральных чисел 5](#_Toc50555367)

[1.5. – сумма произведений n первых натуральных чисел 5](#_Toc50555368)

[1.6. – сумма дробей специального вида 6](#_Toc50555369)

[1.7. сумма произведений n натуральных чисел 6](#_Toc50555370)

[ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ 7](#_Toc50555371)

[2.1. , где , – неравенство Бернулли 7](#_Toc50555372)

[2.2. , если  и 7](#_Toc50555373)

[2.3. , для любого натурального 7](#_Toc50555374)

[ГЛАВА III. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ПРИЗНАКОВ ДЕЛИМОСТИ 9](#_Toc50555375)

[3.1. делится на 9 при любом натуральном n 9](#_Toc50555376)

[3.2. кратно 7 9](#_Toc50555377)

[3.3. кратно 9 9](#_Toc50555378)

[3.4.  кратно 27 9](#_Toc50555379)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 11](#_Toc50555380)

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ……………………………….…12

**ВВЕДЕНИЕ**

Метод математической индукции широко применяется в разных разделах математики, начиная от элементарного школьного курса и до разделов, исследуемых в самые последние годы. Ясно поэтому, что без овладения этим методом нельзя серьезно изучить даже школьный курс математики. Мало этого, идеи математической индукции имеют большое общеобразовательное значение, и поэтому ознакомление с ними представляет интерес даже для людей далеких от математики и ее приложений.

Метод математической индукции – один из основных способов доказательства утверждений, справедливых на всем множестве натуральных чисел. Иногда утверждения могут быть сформулированы для всех натуральных чисел n ≥ p0, иногда – на множестве натуральных четных чисел и т. п.

Основой для доказательства таких утверждений является **принцип математической индукции** – аксиома, выражающая свойства натурального ряда чисел:

Если утверждение A(п) верно для п = 1 и предполагая справедливость A(п) при п = k > 1, удается доказать справедливость A(п) при п = k + 1, то утверждение А(п) верно для любого натурального числа п.

В соответствии с приведенным выше принципом математической индукции доказательство методом математической индукции состоит из нескольких этапов (шагов).

• Первый этап **(базис индукции)** – это доказательство следующей теоремы: утверждение А(1) истинно. Обычно эта теорема доказывается проверкой.

• Второй этап **(индукционное предположение)** – это следующее предположение: пусть утверждение А(k) истинно для некоторого произвольного натурального k≥1.

• Третий этап **(индукционный переход)** – это доказательство следующей теоремы: утверждение А(k + 1) верно.

При доказательстве индукционного перехода используются базис индукции и индукционное предположение, т.е. при доказательстве справедливости утверждения А(k + 1) мы считаем, что утверждения А(1) и А(k) справедливы для некоторого произвольного k≥1.

**Целью** работы является исследование возможностей использования метода математической индукции для решения олимпиадных задач.

**Задачи**: применить метод математической индукции для доказательства равенств, неравенств, а также для доказательства признаков делимости.

**ГЛАВА I. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ФОРМУЛ И РАВЕНСТВ**

* 1. **– сумма n первых натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): Используя предположение индукции, получаем равенство Приведем левую часть равенства к общему знаменателю и вынесем общий множитель за скобки . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. **– сумма n первых нечетных натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): Используя предположение индукции, получаем равенство Раскроем скобки в левой и правой частях равенства . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. – **сумма квадратов n первых натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): . Используя предположение индукции, получаем равенство Приведем левую часть равенства к общему знаменателю и вынесем общий множитель за скобки . Раскроем «внутренние» скобки в левой части равенства и перемножим вторую и третья скобки в правой части равенства . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. – **сумма кубов n первых натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): . Используя предположение индукции, получаем равенство Приведем левую часть равенства к общему знаменателю и вынесем общий множитель за скобки . Раскроем «внутренние» скобки в левой части равенства и «свернем» по формуле квадрата суммы . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. – **сумма произведений n первых натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): Используя предположение индукции, получаем равенство Приведем левую часть равенства к общему знаменателю и вынесем в числителе левой части общий множитель за скобки . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. **– сумма дробей специального вида**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): Используя предположение индукции, получаем равенство Приведем левую часть равенства к общему знаменателю и разложим числитель левой части на множители . После сокращения дроби в левой части имеем . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

* 1. – **сумма произведений n натуральных чисел**

База индукции А(1): при n =1 равенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что равенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): Используя предположение индукции, получаем равенство . В левой части равенства вынесем за скобки общий множитель и упростим выражение, которое остается в скобках . Получаем ; . Получили верное равенство. Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

**ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ**

* 1. **, где , – неравенство Бернулли**

База индукции А(1): при n =1 неравенство примет вид , что, очевидно, является верным.

Предположение индукции А(k): предположим, что неравенство верно для n=k, то есть .

Индукционный переход А(k+1): .

Рассмотрим неравенство A(k) и умножим обе его части на неотрицательное число . Получим . Преобразуем правую часть, раскроем скобки: ; . При любых натуральных k , значит, . Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное неравенство справедливо для любого натурального n.

* 1. **, если  и**

База индукции А(1): при n =1 и при , очевидно, выполняется неравенство .

Предположение индукции А(k): предположим, что неравенство верно для n=k, то есть, если и , то

Индукционный переход А(k+1) если и , то .

Рассмотрим следующие два случая:

. тогда неравенство становится очевидным (выполняется равенство): .

Если хотя бы одно из чисел отлично от 1, то обязательно найдется число, большее 1, а также число, меньшее 1. Пусть это числа и . Тогда рассмотрим n положительных чисел . Их произведение равно нулю, а количество составляет k. По предположению индукции выполняется неравенство . К обеим частям последнего неравенства прибавим и отнимем . Получим .

Заметим, что , то есть . Значит, . Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное неравенство справедливо для любого натурального n.

* 1. **, для любого натурального**

База индукции А(10): при n =10 неравенство примет вид , что, очевидно, является верным, так как 1024>1000.

Предположение индукции А(k): предположим, что неравенство верно для n=k>10, то есть .

Индукционный переход А(k+1):.

Воспользуемся тем фактом, что при выполняется неравенство , то есть . Умножим обе части последнего неравенства на неотрицательное число и перенесем слагаемое в левую часть. Получим . Теперь рассмотрим выражение , что и требовалось доказать.

**ГЛАВА III. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ПРИЗНАКОВ ДЕЛИМОСТИ**

1. **делится на 9 при любом натуральном n**

База индукции А(1): при n =1

Предположение индукции А(k): предположим, что

Индукционный переход А(k+1): докажем, что Преобразуем это выражение. Выражение в первой скобке делится на 9 по предположению индукции, а второе слагаемое раскладывается на множители, один из которых 9. Значит

* 1. **кратно 7**

База индукции А(1): при n =1 имеем кратно 7.

Предположение индукции А(k): предположим, что кратно 7.

Индукционный переход А(k+1): докажем, что кратно 7. Преобразуем это выражение. . Выражение в скобке делится на 7 по предположению индукции, а второе слагаемое 35 также делится на 7. Значит кратно 7.

* 1. **кратно 9**

База индукции А(1): при n =1 имеем кратно 9.

Предположение индукции А(k): предположим, что кратно 9.

Индукционный переход А(k+1): докажем, что кратно 9. Преобразуем это выражение.. Выражение в первой скобке делится на 9 по предположению индукции, а второе слагаемое раскладывается на множители, один из которых 9. Значит кратно 9.

* 1. **кратно 27**

База индукции А(1): при n =1 имеем кратно 27.

Предположение индукции А(k): предположим, что кратно 27.

Индукционный переход А(k+1): докажем, что кратно 27. Преобразуем это выражение. Выражение в первой скобке делится на 27 по предположению индукции, а второе слагаемое раскладывается на множители, один из которых 27. Значит кратно 27.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Не существует единого метода решения нестандартных задач, некоторые из них можно решить несколькими различными способами или комбинацией методов. Но все задачи, идеи и методы их решения должны послужить главной задаче обучения математике – учить рассуждать, учить мыслить.

В ходе проделанной работы нами изучена суть метода математической индукции и рассмотрены олимпиадные задачи, решаемые данным методом. Проанализировав материал, нами сделан вывод, что знание данного метода очень полезно при решении разного рода олимпиадных задач, включая задачи на суммирование.

Наша работа не претендует на новаторство методов и идей, однако доказанные равенства, неравенства и признаки делимости представляют интерес как самостоятельные формулы и полезны для учеников, изучающих математику на повышенном уровне, а также для тех, кто готовится к олимпиадам, турнирам и математическим боям.

Данная работа может служить пособием для тех, кто изучает данную тему. Учащиеся, владеющие методом математической индукции, успешно справятся с самыми сложными задачами по математике.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Горбачев, Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н.В. Горбачев. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
2. Решение олимпиадных и конкурсных задач по математике.7-9 классы: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / сост. Г.И. Струк. – Мозырь: Белый Ветер, 2015. – 109 с.