Государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Луганской Народной Республики
«Луганский архитектурно-строительный колледж
имени архитектора А.С. Шеремета»

ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

(из опыта работы)

Подготовила Еськова Л.В.
преподаватель-методист
высшей квалификационной
категории

2020

Алгоритмический метод обучения

Люди – не машины. Но в своей практической деятельности мы подмечаем аналогичное, повторяющееся в различных явлениях, вещах, поступках, и сознательно придумываем последовательность операций, которые приводят к нужному результату. Эта специфика человеческой деятельности, обучения была подмечена во второй половине XX века. Тогда появились такие понятия как «предписание алгоритмического типа» (Л.Н. Ланда, 1966), «расплывчатые алгоритмы» (Л. Заде, 1968) и целой гаммы других понятий (Б.В. Бирюков, Е.С. Геллер, 1973). Исследованием алгоритмизации обучения занимались Л.Н. Ланда, Н.Ф. Талызина, а также методисты по обучению языкам, математике. По их мнению, алгоритмы имеют такие свойства (черты): детерминированность (определенность), однозначность, результивность, массовость, дискретность и понятность.

Детерминированность

Детерминированность (Л.Н. Ланда), или строгая определенность (М.П. Лапчик), конструктивность (Н.Ф. Талызина), предполагает однозначность предписываемых действий и операций, исключающую случайность в выборе действий.

Результативность

Она означает, что алгоритм направлен на получение искомого результата. Если исходные данные определены и однозначны, то получается точный результат.

Массовость и дискретность

Массовость как черта означает, что алгоритм пригоден для решения целого класса однотипных задач.
Дискретность как свойство (черта) алгоритмов добавлена практиками, занимающимися алгоритмизацией. Это связано с тем, что описываемый целостный процесс надо разбить на отдельные последовательные шаги.

Понятность

Алгоритм составляется для исполнителей в терминах,которые им понятны, доступны: чтобы исполнитель мог читать на языке, на котором записано предписание, чтобы он мог осмыслить каждую команду, что и как делать и каким образом исполнить все те действия, которые задают алгоритмические предписания.

В БЭС приведено следующее определение алгоритма - «это способ решения вычислительных и других задач, точно предписывающих, как и в какой последовательности получить результат, однозначно определяемый исходными данными алгоритма».

В условиях более активного проникновения в учебный процесс информационно-компьютерных технологий, проблема обучения алгоритмам актуальна, т.к. она связана еще и с изучением программирования на занятиях информатики.

Умение формулировать и применять алгоритмы важно не только для математического мышления и математических умений, исследования показали, что студенты быстрее и прочнее усваивают действия, имеющие четкий алгоритм выполнения, преподносимый в форме показа операций.

В связи с этим целесообразно и эффективно использовать логико-алгоритмический метод или метод алгоритмизации в обучении.

Применяя алгоритмический метод обучения, преподаватель имеет возможность показать учащимся готовые образцы действий, он дает предписания, учит их алгоритмам действий, учит самостоятельно составлять их, формирует умения и навыки практической исполнительской деятельности (самостоятельное ее планирование, коррекция, контроль, разработка алгоритмов). На основе этого метода формируются индивидуальные способности усвоения новых знаний и овладения умениями.

Данный метод используют в двух направлениях.

а). обучение студентов алгоритмам;

б). построение и использование алгоритмов самого обучения.

Под алгоритмом как известно понимают общепринятое и однозначное предписание, определяющее процесс последовательного преобразования исходных данных в искомый результат. Точное выполнение алгоритма всегда приводит к решению любой традиционной (классической) задачи.

Существуют два способа обучения алгоритмам, первый способ это сообщение готовых алгоритмов.

Первый этап алгоритмизации начинается с того, что преподаватель сам предлагает алгоритм работы с некоторыми понятиями и объектами.

Это значительно увеличивает объем усваиваемой информации студентов, но ограничивает развитие их активности и творческого мышления. В этом случае можно используя информационно-компьютерные технологии создать электронную базу используемых алгоритмов для решения определенного класса задач в электронном виде, к которой студент может обратиться в любой момент.

В моей практике используются следующие алгоритмы (Приложение 1)

1. Алгоритм решения неравенств методом интервалов.
2. Алгоритм нахождения производной функции по определению.
3. Алгоритм нахождения касательной к графику функции в данной точке.

4. Алгоритм исследования функции на монотонность с помощью производной.
5. Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью первой производной.
6. Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью второй производной.
7. Алгоритм исследования функции и построения графика с помощью производной.
8. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
9. Алгоритм нахождения промежутков выпуклости, вогнутости, точек перегиба функции.
10. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
11. Алгоритм решения СЛУ матричным методом.
12. Алгоритм решения СЛУ методом Крамера.
13. Алгоритм решения дифференциального уравнения I порядка с разделенными переменными.

и многие другие.

Но не все алгоритмы студенты получают готовые, некоторые полностью или частично они составляют сами.

Второй способ обучения алгоритмам это подведение учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов, что является эвристическим (опытным) методом обучения и предполагает реализацию трёх этапов изучения математического материала:

1). выявление отдельных шагов алгоритма;

2). его построение и полную формулировку;

3). применение алгоритма.

На первом этапе преподаватель использует инструментарий сравнения, сопоставления известных фактов и закономерностей для подведения студентов к осознанию и формулировке отдельных шагов алгоритма.

На втором этапе формируется четкая последовательность выполнения действий (шагов) и формулировка всего алгоритма в целом, отбрасывается лишнее, уточняются детали.

На третьем этапе применения алгоритма происходит апробация, использование математических данных для реализации решения задачи. В том числе могут использоваться программные средства обучения математике.

Практика показывает, что студенты значительно увереннее ведут поиск решения задачи и само решение, когда пользуются представленными алгоритмами.

Заметим, что составление алгоритмов при решении той или иной задачи – это замена данной задачи системой или совокупностью более простых задач. Следовательно, алгоритмизация обучения ведет к усилению аналитико-синтетического метода в обучении математике и готовит к моделированию жизненных ситуаций. Причем бывает. что уже составленные алгоритмы входят, как составляющие элементы, в новые алгоритмы. Например, при исследовании функции и построении графика используется алгоритм исследования функции на экстремум, а при решении СЛУ матричным методом алгоритм нахождения обратной матрицы.

Или же алгоритм составляется по аналогии уже составленного. Например, изучая функцию нескольких переменных, студенты составляют алгоритм исследования на экстремум, опираясь на уже имеющийся алгоритм для функции от одной переменной.

Работа по алгоритмам развивает у студентов интерес к учению, они стремятся заменить алгоритм более простым и обосновать целесообразность замены, что развивает творческое и конструктивное мышление. Ясно, что переход от стандартного мышления к конструктивному происходит не скачкообразно, а постепенно. Но, следует заметить, что даже неумелая конструктивная модель приносит больше пользы, чем работа по шаблону. Она приучает студентов и в дальнейшем выбирать оптимальную систему действий для решения возникающей жизненной проблемы.

Литература

1. Саранцев Г.И. Методик обучения математике в средней школе: учеб. пособ. для пед.инстит./ Г.И.Саранцев,-М.: Просвещение, 2002.-224 с.
2. Темербекова А.А. Методика преподавания математики: учеб. пособ. для студентов высш.учеб. завед. /А.А. темербекова.-М.:ВЛАДОС, 2003.176 с.
3. Акамова Н.В., Буданова Н.А.Алгоритмический метод обучения математике с использованием новых информационных технологий в среднем специальном учебном заведении, ежемесячный журнал Молодой ученый, № 10 (21), 2010г.
4. Домрачова Л.А., Богус В.А. Алгоритмизация обучения как один из методов осуществления внутрипредметных связей при изучении математики.
5. Алгоритмизация в обучении, Педагогика, 16 июля 2008г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

АЛГОРИТМ	ПРИМЕР
	$\Delta=\begin{cases}7x_1+2x_2+3x_3=13\\9x_1+3x_2+4x_3=14\\5x_1+x_2+3x_3=15\end{cases}$
1) Записать и вычислить главный определитель системы. Если Δ=0, то система не имеет решения. Если Δ≠0, то система имеет единственное решение. $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$	1) $\Delta=\begin{vmatrix}7&2&3\\9&3&4\\5&1&3\end{vmatrix}\begin{matrix}7&2\\9&3\\5&1\end{matrix}=3\neq 0$
2) Найти дополнительный определитель системы $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ которые получаются из главного определителя, заменой j-го столбца на столбец свободных членов $\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$ $\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$	2) $\Delta_1=\begin{vmatrix}13&2&3\\14&3&4\\15&1&3\end{vmatrix}=6$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}7&13&3\\9&14&4\\15&1&3\end{vmatrix}=-15$ $\Delta_3=\begin{vmatrix}7&2&13\\9&3&14\\5&1&15\end{vmatrix}=9$
3) Найти неизвестные $x_1;x_2;x_3$ по формулам Крамера: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$	3) $x_1=\frac{6}{3}=2;$ $x_2=\frac{-15}{3}=-5$ $x_3=\frac{9}{3}=3$
4) Выполнить проверку.	4) 7×2+2×(-5)+3×3=13 9×2+3×(-5)+4×3=14 5×2+1×(-5)+3×3=15
5) Записать ответ.	5) Ответ: (2;-5;3).

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФНП НА ЭКСТРЕМУМ

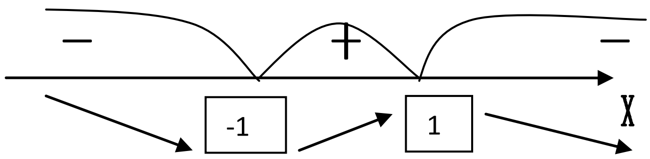
АЛГОРИТМ	**ПРИМЕР** $\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy}$
1. Найти область определения ФНП	**1.**$D(Z) = R_2$
2. Найти частные производные I-го порядка z'_x и z'_y	**2.**$z'_x = (x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy)'_x =$ $4x^3 - 2x - 2y$ $z'_y = (x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy)'_y =$ $4y^3 - 2y - 2x$
3. Найти критические точки функции решив систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$	**3.** $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x^3 — 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x^3 - x - y = 0 \\ 2y^3 - y - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 = y^3 \\ 2y^3 - y - x = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0\,; x_2 = 1; x_3 = -1 \\ y_1 = 0\,; y_2 = 1; y_3 = -1 \end{cases}$
4. Найти производные II-го порядка $z''_{xx};\ z''_{xy};\ z''_{yy}$	**4.** $z''_{xx} = (4x^3 — 2x - 2y)'_x = 12x^2 - 2$ $z''_{xy} = (4x^3 - 2x - 2y)'_y = -2 = B$ $z''_{yy} = (4y^3 - 2y - 2x)'_y = 12y^2 - 2$
5. Найти значение производных II-го порядка для каждой критической точки $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$ $z''_{xy}(x_0; y_0) = B$ $z''_{yy}(x_0; y_0) = C.$	**5.** $M_1(0; 0)$ $z''_{xx}(0; 0) = -2 = A$ $z''_{xy}(0; 0) = -2 = B; z''_{yy}(0; 0) = -2 = C$ $M_2(1; 1)$ $z''_{xx}(1; 1) = 10 = A$ $z''_{xy}(1; 1) = -2 = B; z''_{yy}(1; 1) = 10 = C$ $M_2(-1; -1)$ $z''_{xx}(-1; -1) = 10 = A$ $z''_{xy}(-1; -1) = -2 = B; z''_{yy}(-1; -1) = 10 = C$
6. Найти значение $\Delta = A \times C - B^2$ для каждой критической точки.	**6.** $\mathrm{M}_{\mathbf{1}}(0; 0)$ $\Delta = A \cdot C - B^2 = 0$ ответа экстремуме нет $\mathrm{M}_2(1; 1)$ $\Delta = A \cdot C - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2^2) = 96 > 0$ *экстремум есть* $\mathrm{M}_{\mathbf{3}}(-1; -1)$ $\Delta = A \cdot C - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2^2) = 96 > 0$ *экстремум есть*
7. Определите точки экстремума	**7.** $\mathrm{M}_{\mathbf{2}}(1; 1)$точка min , т.к. $A = 10 > 0$ $\mathrm{M}_3(-1; -1)$точка min, т.к. $A = 10 > 0$
8. Найти экстремум функции $z_{max}(x_0; y_0)$ и $z_{min}(x_0; y_0)$	**8.** $z_{max} = -2$ $z_{min} = 2$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СЛУ МЕТОДОМ ГАУССА

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

<table>
<tr><td>1. Записать расширенную матрицу системы.</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>2. Сделать элемент $a_{11} = 1$ с помощью элементарных преобразований.</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>3. Обнулить элементы первого столбца, считая первую строку разрешающей.</td><td>$-4 \quad -12 \quad -8$ | -8   -2 -6 -4 -4
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ ×(-4)+II ~
~ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ ×(-2)+III</td></tr>
<tr><td>4. Обнулить элементы II столбца, считая II строку разрешающей.</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right)$ ×7 II и ×10 III строку</td></tr>
<tr><td>5. Получить треугольную матрицу.</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right)$ ÷19 на III строку ~
~ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>6. Перейти от треугольной матрицы к системе линейных уравнений.</td><td>$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$
$10\ x_2+7\times2=4$
$10x_2=4-14$
$10x_2=-10$
$x_2=-1$</td></tr>
<tr><td>7. Найти неизвестные переменные x_j.</td><td>$x_1+3\times(-1)+2\times2=2$
$x_1=2-4+3$
$x_1=1$</td></tr>
<tr><td>8. Сделать проверку.
Написать ответ.</td><td>$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$
4-2+2=4
1-3+4=2
2+1+2=5   Ответ: (1;-1;2)</td></tr>
</table>

АЛГОРИТМ
ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ НА МОНОТОННОСТЬ
С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

АЛГОРИТМ	**ПРИМЕР:** $\boldsymbol{y = 3x - x^3}$
1. Найти область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$ 2. Найти производную функции $y' = f'(x)$ 3. Определить знак производной: методом интервалов решить неравенство: $f'(x) > 0$ 4. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ с помощью признака: если $f'(x) > 0$ – функция возрастает на промежутке; если $f'(x) < 0 \rightarrow$ f(x) – функция убывает на промежутке.	1.$D(f) = R$. 2. $f'(x) = (3x - x^3)' = 3 - 3x^2$ 3. $f'(x) > 0$; $3 - 3x^2 > 0$; $3(1 - x)(1 + x) > 0$ $3(x - 1)(x + 1) < 0$ $x = 1; x = -1$ нули функции  4. Функция $f(x)$ возрастает при x ∈ (-1; 1). Функция $f(x)$ убывает при x ∈ (- ∞; -1) ∪ (1; ∞).

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Алгоритм	**Пример** $\lvert A\rvert = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
1) Найти определитель матрицы А коэффициентов при неизвестных $\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} =$ $= 2 - 4 - 6 - 1 - 4 + 12 = 1 \neq 0$
2)Найти транспонированную матрицу A^T $A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$	$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3)Найти для матрицы A^T алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$	$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$
4)Составить матрицу $\tilde{A}$, присоединённую к матрице A^T $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$	$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$
5)Найти обратную матрицу A^{-1} *формуле* $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert} \cdot \tilde{A}$	$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

6)Выполнить проверку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$	$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot$$ $$\cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$
7)Записать ответ	Ответ: $$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I ПОРЯДКА

АЛГОРИТМ	ПРИМЕР
	$\boldsymbol{y^2dy + (x+1)dx = 0}$
1. Записать уравнение так, чтобы слагаемое с дифференциалом функции dy стояло в левой части, с дифференциалом переменной dx в правой части.	$\boldsymbol{y^2dy = -(x+1)dx}$
2. Проинтегрировать обе части уравнения по соответствующей переменной.	$$\int \boldsymbol{y^2\,dy} = \int -\boldsymbol{(x+1)dx}$$ $$\boldsymbol{\frac{y^3}{3} = -\frac{x^2}{2} - x + C}$$
3. Выразить переменную y через x.	$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{-\frac{3x^2}{2} - 3x + 3C}}$$