Оглавление

[Введение 2](#_Toc76701)

[Глава 2. Азбука кубического уравнения 6](#_Toc76703)

[Глава 3. Решение кубических уравнений 7](#_Toc76704)

[3.1.Двучленное кубическое уравнение 7](#_Toc76705)

[3.2. Разложение на множители 7](#_Toc76706)

[3.3 Понижение степени уравнения 8](#_Toc76707)

[3.4. Симметрические или возвратные уравнения](#_Toc76708) 9

[3.5 Метод неопределенных коэффициентов](#_Toc76709) 10

[3.6 Теорема Виета для кубических уравнений](#_Toc76710) 11

[3.7 Формула Кардано](#_Toc76712) 16

[3.12 Алгебра одного уравнения 22](#_Toc76716)

[Результаты исследования 24](#_Toc76717)

[Заключение 31](#_Toc76718)

[Список использованной литературы 32](#_Toc76719)

Новизна..........................................................................................................................................26

**Введение**

**Актуальность.** Практически всё, что окружает человека так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Множество различных алгебраических и геометрических задач сводятся к какому-либо уравнению. Линейные уравнения мы знаем с самых ранних лет, с начальной школы. С квадратными знакомимся в 8 классе, а вот кубические уравнения решаем в старших классах, делаем это обычно графическим способом или методом разложения на множители.

**Проблема:** Отсутствие навыков решения уравнений высших степеней вызывает затруднение при подготовке к итоговой аттестации на профильном уровне.

**Объект:** Кубическое уравнение

**Предмет исследования:** Способы решения кубических уравнений.

**Гипотеза:** Существует связь между коэффициентами кубического уравнения и его корнями, при решении таких уравнений можно применять разнообразные способы.

**Цель:** Изучение способов решения кубических уравнений.

**Задачи:**

1.Подобрать необходимую литературу;

2.Отобрать материал для исследования, выбрать главную, интересную, понятную информацию;

3.Проанализировать и систематизировать полученную информацию;

4.Найти различные методы и приёмы решения кубических уравнений;

5.Классифицировать исследуемые уравнения;

6.Сравнить степень сложности каждого из них;

7.Познакомить одноклассников со способами решения уравнений;

8.Создать электронную презентацию работы для представления собранного материала.

**Методы исследования:**

-Изучение литературных и Интернет-ресурсов;

-Анализ и классификация информации;

-Сравнение способов решения; -Обобщение.

**Структура работы:** Работа состоит из двух глав. Первая глава азбука кубического уравнения и уравнений n-ой степени. Вторая-. В третьей главе рассмотрены различные приёмы решения кубических уравнений.

**Новизна работы:** Мной было придумана новая тема с названием «Прогрессия корней уравнений n-ой степени», где там есть доказательства о возможности решение уравнений 7 степени. А также теорема Виета для уравнений пятого, шестого и седьмого степени.

**Глава 1. Азбука кубического уравнения**

Уравнение вида 𝑝𝑛(𝑥) = 0, где 𝑝𝑛(𝑥) = 𝑎0𝑥𝑛 + 𝑎1𝑥𝑛−1+. . . +𝑎𝑛−1𝑥 + 𝑎𝑛 – многочлен степени n; 𝑎0, 𝑎1, … 𝑎𝑛 − заданные действительные числа, 𝑎0 ≠ 0 называют алгебраическим уравнением n-степени.

При 𝑛 = 1 уравнение – линейное, при 𝑛 = 2 – квадратное уравнение.

Если 𝑛 > 2, то уравнение 𝑝𝑛(𝑥) = 0 называютуравнением высшей степени.

Решить уравнение- значит, найти все его корни или доказать , что уравнение не имеет корней.

**Кубическое уравнение** - алгебраическое уравнение третьей степени вида:

𝒂𝒙𝟑 + 𝒃𝒙𝟐 + 𝒄𝒙 + 𝒅 = 𝟎, 𝒂 ≠ 𝟎.

Если 𝑎 = 1, то уравнение называют приведенным кубическим уравнением:

𝑥3 + 𝑏𝑥2 + 𝑐𝑥 + 𝑑 = 0.

Число 𝒙 будет **корнем кубического уравнения** тогда, когда после его подстановки уравнение становится верным равенством. У каждого кубического уравнения с действительными коэффициентами будет по крайней мере один **действительный корень**, два других или тоже действительные, или будут комплексно сопряженной парой.

Для кубических уравнений тоже существует дискриминант, как и для квадратных уравнений, с помощью которого различаются три случая существования корней кубического уравнения, о котором речь пойдёт ниже.

**Глава 2. Решение кубических уравнений**

Рассмотрим виды кубических уравнений и приёмы их решения.

**3.1** **Двучленное кубическое уравнение**

Двучленное кубическое уравнение имеет вид 𝑎𝑥3 + 𝑏 = 0

Это уравнение приводится к виду делением на коэффициент

𝑎, отличный от нуля. Далее применяется формула сокращенного умножения сумма кубов:

Из первой скобки находим квадратный трехчлен ,

в области действительных чисел корней не имеет, т.к.

**Уравнение 1.** Найти действительные корни уравнения 8− 3 = 0

*Решение: ,* .

*Ответ:* .

***3.2. Разложение на множители***

*1.Вынесение общего множителя за скобку.*

Начнем с простейшего случая, когда свободный член 𝑑 = 0. В этом случае, уравнение имеет вид .. Решается вынесением*х* за скобки. В скобках останется квадратный трехчлен, корни которого легко найти через дискриминант

**Уравнение 2.** Найти действительные корни уравнения

*Решение:*Квадратный трехчлен действительных корней не имеет, т.к.

*Ответ:* 0.

*2.Применение формул сокращенного умножения.*

**Уравнение 3.** Решить уравнение .

*Решение:* Прибавим к обеим частям уравнения 2, получим:

*Ответ:*

*3.Способ группировки.*

**Уравнение 4.** Решить уравнение .

*Решение:*

.

*Ответ:* −1; 1; 3.

### 3.3 Понижение степени уравнения

Способ основан на теореме Безу и делении многочленов.

**Теорема Безу** утверждает, что остаток от деления многочлена 𝑝(𝑥) на двучлен 𝑥 − 𝑎 равен 𝑝(𝑎).

**Следствие из теоремы Безу:** Если число 𝑎 является корнем многочлена

𝑝(𝑥), то многочлен 𝑝(𝑥) делится без остатка на двучлен 𝑥 − 𝑎.

Задача состоит в том, чтобы найти хотя бы один корень многочлена, потом разделить многочлен на 𝑥 − 𝑎*,* где *а-* корень многочлена. В результате получим многочлен, степень которого на единицу меньше, чем степень исходного.

Задача распадается на две: *как найти корень многочлена, и как разделить многочлен на двучлен.*

Для этого можно использовать сдедующие утверждения:

*Если сумма всех коэффициентов многочлена равна нулю, то число 1 является корнем многочлена.*

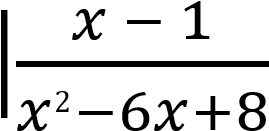
*Если сумма коэффициентов многочлена при четных степенях равна сумме коэффициентов при нечетных степенях, то число -1 является корнем многочлена. Свободный член считается коэффициентом при четной степени.*

*Если уравнение имеет рациональный корень то для него будет выполнено :* 𝑑 *делится нацело на* 𝑝, 𝑎 *делится нацело на* 𝑞*.*

**Уравнение 5.** Решить уравнение

*Решение:* сумма всех коэффициентов многочлена равна 1-7+14-8=0, следовательно 𝑥 = 1 корень уравнения. Значит, по теореме Безу, многочлен делится без остатка на двучлен 𝑥 -1.

Способы деления могут быть разными, уголком или с помощью схемы Горнера.

**Деление уголком**

0

*-6*

𝑥 = 1, 𝑥 = 2, 𝑥 = 4.

Ответ: 1; 2; 4.

**Схема Горнера**

𝑎0𝑥𝑛 + 𝑎1𝑥𝑛−1+

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝒂𝟎 | 𝒂𝟏 | 𝒂𝟐 | **...** | 𝒂𝒏−𝟏 | 𝒂𝒏 |
| 𝒃𝟎  = 𝒂𝟎 | 𝒃𝟏  = 𝒂𝟏 + 𝜶  ⋅ 𝒃𝟎 | 𝒃𝟐  = 𝒂𝟐 + 𝜶  ⋅ 𝒃𝟏 |  |  | остаток равен  𝒂𝒏 + 𝜶 ⋅ 𝒃𝒏−𝟏 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| корень | коэффициенты многочлена | | |  |
| 𝜶 | 1 | −7 | 14 | –8 |
| 1 | 1 | −7+1⋅ 1= –6 | 14+1⋅ (−6) = 8 | –8+1⋅8=0 |

𝑥 = 1, 𝑥 = 2, 𝑥 = 4.

Ответ: 1; 2; 4.

**Уравнение 6.** Решить уравнение

*Решение:* У данного уравнения коэффициенты целые числа, поэтому можно подбирать корень.

Делители свободного члена: –2;–1;1;2. Делители старшего члена: –2;–1;1;2.

𝒂 = 2, существуют рациональные корни.

Они находятся среди чисел: –1; . Подставляя по очереди каждое число в уравнение, убеждаемся, что корень уравнения.

𝑃(1) = 2 ⋅ 1 − 5 ⋅ 1 − 2 ⋅ 1 + 2 ≠ 0

𝑃(−1) = 2 ⋅ (−1) − 5 ⋅ (−1)2 − 2 ⋅ (−1) + 2 = −2 − 5 + 2 + 2 ≠ 0

корень

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| корень | коэффициенты многочлена | | | |
| 𝜶 | 2 | -5 | -2 | 2 |
| 0,5 | 2 | −5 + 0,5 ⋅ 2= −4 | −2 + 0,5 ⋅ (−4)= −4 | 2 + 0,5⋅ (−4) =0 |

Корни: .

*Ответ:* 0.5; .

**Вывод:** При решении кубических уравнений с помощью деления многочленов или схемы Горнера удается понизить степень уравнения - свести решение кубического уравнения к решению уравнений первой и второй степени.

**Симметрические или возвратные уравнение**

Уравнение вида называется возвратным или симметрическим, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны.

Левую часть уравнения можно разложить на множители:

Такое уравнение обязательно имеет корень 𝑥 = −1, корни квадратного уравнения 𝑎 + 𝑥(𝑏 − 𝑎) + 𝑎, легко находятся через дискриминант.

**Уравнение 7.** Решить уравнение .

Решение: 5( + 1) − 8𝑥(𝑥 + 1) = 0, 5(𝑥 + 1)( − 𝑥 + 1) − 8𝑥(𝑥 + 1) = 0

(𝑥 + 1)(5 − 5𝑥 + 5 − 8𝑥) = 0, (𝑥 + 1)(5 − 13𝑥 + 5) = 0

𝑥 = −1, 𝑥 =.

*Ответ:* 𝑥 = −1, 𝑥 = .

**Уравнение 8**. Решить уравнение

*Решение:*  У исходного уравнения обязательно есть корень 𝑥 = −1, поэтому разделим 𝑥3 + 2𝑥2 + 2𝑥 + 1 на (𝑥 + 1) по схеме Горнера:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝜶 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| –1 | 1 | 2 + (−1) ∙ 1  = 1 | 2 + (−1) ∙ 1  = 1 | 1 + (−1) ∙ 1  = 0 |

𝑥3 + 2𝑥2 + 2𝑥 + 1 = (𝑥 + 1)(𝑥2 + 𝑥 + 1) = 0*.* Квадратное уравнение𝑥2 + 𝑥 + 1 = 0 не имеет корней.

*Ответ:* −1

**Уравнение 9.** Решить уравнение 𝑥3 + 3𝑥2 + 3𝑥 − 1 =0Делители свободного члена: ±1.

𝑝(1) = 1 + 3 + 3 − 1 = 6 ≠ 0

𝑝(−1) = −1 + 3 − 3 − 1 = −2 ≠ 0.

Уравнение рациональных корней не имеет.

Для нахождения иррациональных корней выделим в левой части уравнения полный куб.

𝑥

*Ответ:**.*

**3.6 Теорема Виета для кубических уравнений**

Из курса математики мы знаем данную теорему для квадратного уравнения, но ее используют и для решения уравнений высших степеней. Рассмотрим уравнение: 𝑎𝑥3 + 𝑏𝑥2 + 𝑐𝑥 + 𝑑 = 0. Разложим левую часть уравнения на множители 𝑎𝑥3 + 𝑏𝑥2 + 𝑐𝑥 + 𝑑 = 𝑎(𝑥 − 𝑥1)(𝑥 − 𝑥2)(𝑥−𝑥3), разделим на 𝑎 ≠ 0.

Правую часть уравнения преобразуем к виду

;

;

отсюда следует, что можно записать в систему следующие

равенства:

Это теорема Виета для кубических уравнений.

**Уравнение 12.** Решить уравнение .

*Ответ:* -2; -1; 2.

По теореме Виета корни кубического уравнения 𝑥1, 𝑥2, 𝑥3 взаимосвязаны с коэффициентами 𝑎, 𝑏, 𝑐, 𝑑 такими соотношениями:

Деление выше приведенных тождеств друг на друга дает возможность сформулировать еще несколько верных соотношений:

, 𝑑0,

, 𝑑0

Формулы Виета для приведенного квадратного уравнения

𝑥1 + 𝑥2 = −𝑝; 𝑥1𝑥2 = 𝑞.

Если 𝑥1, 𝑥2, 𝑥3 − корни приведенногокубического уравнения

+ 𝑝 + 𝑞 =0, то справедливы равенства

Доказательство:

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим

**Вывод:** данный способ достаточно легок для понимания, так как теорема Виета знакома по школьной программе для квадратных уравнений и чтобы находить корни уравнений с помощью данной теоремы необходимо обладать хорошими вычислительными навыками.

### 3.7 Метод замены

Суть метода заключается в том, что путем замены некоторого выражения, входящего в уравнение и содержащего переменную, в исходном уравнении понижается степень, т.е. уравнение сводится к простейшему.

**Уравнение 13.** Решить уравнение − 5𝑥 + 2√3 = 0.

*Решение:* Замена: 𝑥 = 𝑡√3

Получим кубическое уравнение с целыми коэффициентами:

3√3 − 5𝑡√3 + 2√3 = 0

3− 5𝑡 + 2 = 0

3 − 3𝑡 − 2𝑡 + 2 = 0

3𝑡(− 1) − 2(𝑡 − 1) = 0

(𝑡 − 1)(3 + 3𝑡 − 2) = 0; 𝑡 = 1,

Обратная замена: 𝑥 = √3,

*Ответ:* √3;; .

Неполные кубические уравнения решаются подстановкой: 𝑥 = 𝑡 +

**Уравнение 14.** Решить неполное кубическое уравнение 3− 9𝑥 − 10 =0.

*Решение:* Замена: 𝑥 = 𝑡 +

Получим:

Замена: :

.

Обратная замена: 𝑡3 = 3 или 𝑡3 = , следовательно 𝑡 = ∛3, 𝑡 = 1/∛3

Тогда 𝑥 = ∛3 + 1/∛3 ,

*Ответ:* ∛3 + 1/∛3.

**Вывод:** при решении уравнений удачная замена переменных позволяет свести задачу к более простой.

При решении многих уравнений трудно угадать, какую новую переменную нужно ввести, чтобы упростить уравнение. Поэтому для некоторого класса уравнений вводится стандартная замена.

1. Если свободный член равен 1, то используется замена
2. Подстановка приводит кубическое уравнение к неполному

кубическому уравнению вида 𝑦3 − 𝑐 =0

**Уравнение 15.**

Решить уравнение: 21𝑥3 + 𝑥2 − 5𝑥 − 1 =0

*Решение:* Замена

Один из корней среди делителей свободного члена: ±1; ±3; ±7; ±21

𝑝(1) = 1 + 5 − 1 − 21 = −16 ≠ 0

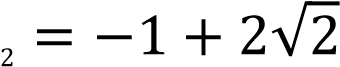
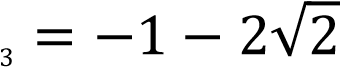
𝑝(−1) = −1 + 5 + 1 − 21 = −16 ≠ 0

𝑝(3) = 27 + 45 − 3 − 21 ≠ 0

𝑝(−3) = −27 + 45 + 3 − 21 = 0 => 𝑎 = −3 корень

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| корень | 1 | 5 | −1 | −21 |
| −3 | 1 | 5 + (−3) ∙ 1 = 2 | −1 + (−3) ∙ 2 = −7 | −21 + (−3)(−7) = 0 |

𝑎3 + 5𝑎2 − 𝑎 − 21 = (𝑎 + 3)(𝑎2 + 2𝑎 − 7) = 0

𝑎1 = −3, 𝑎; 𝑎

Обратная  *.*

Ответ*:*

**Уравнение 16.**

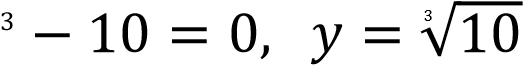
Решить уравнение: .

*Решение:* 𝑎 = 1; 𝑏 = 3; 𝑐 = 3; 𝑑 = −9

,

Уравнение примет вид: (𝑦 − 1)3 + 3(𝑦 − 1)2 + 3(𝑦 − 1) − 9 = 0

𝑦3 − 3𝑦2 + 3𝑦 − 1 + 3𝑦2 − 6𝑦 + 3 + 3𝑦 − 3 − 9 = 0

𝑦;

Обратная замена: 𝑥 

Ответ: 

**Уравнение 17.** Решить уравнение: 𝑥3 + 6𝑥2 + 12𝑥 + 5 =0

*Решение:* 𝑎 = 1; 𝑏 = 6; 𝑐 = 12; 𝑑 = 5.

Уравнение примет вид:

,

Обратная замена: 𝑥 

Ответ: 2.

**Формула Кардано**

Известно, что формула изначально была открыта Тартальей и передана Кардано уже в готовом виде, однако сам Кардано отрицал этот факт, хотя и не отрицал причастность Тартальи к созданию формулы. За формулой прочно укоренилось название «формула Кардано», в честь ученого, который фактически объяснил и представил её публике.

Так как от уравнения ax 3 + b x 2 + cx + d=0 всегда можно перейти к уравнению х3+bх2+cx+d=0, то рассмотрим уравнение вида: х3+bx2+сх+d=0. Снова обратимся за аналогией к квадратным уравнениям. При решении квадратных уравнений применено выделение полного квадрата. Стоит попытаться в кубическом уравнении выделить полный куб, используя формулу (а+b)3=a3+b3+3ab·(a+b). (3)

Чтобы избежать громоздких выкладок в буквенном виде, я взял уравнение x3+4x2+x-6=0.

Выделим полный куб , после раскрытия скобок и группировки, получим уравнение: 

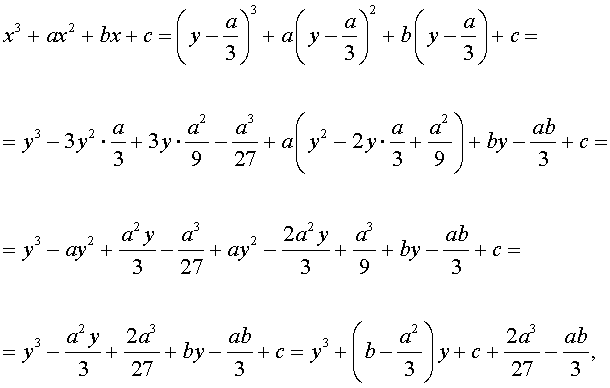
Сделаем подстановку: , отсюда  . 

Имеем:, ,

т.е. удалось получить кубическое уравнение, не содержащее слагаемое с квадратом переменной. Значит, любое кубическое уравнение можно привести к уравнению вида x3+px+q=0 . (4)

Общий подход к решению уравнений вида (4) разработал Джероламо Кардано (1501-1576гг.).

Приведенное кубическое уравнение с помощью замены



|  |  |
| --- | --- |
| то уравнение (2) примет вид: | (4) |

      Если ввести обозначения



дает неполное кубическое уравнение вида 

Найдём корни этого уравнения.

В формуле (а+b)3=a3+b3+3ab·(a+b) пусть  , тогда получим  , откуда . Значит,   откуда   .

Пусть  

По теореме, обратной теореме Виета а3=t1 и b3=t2  являются корнями приведённого квадратного уравнения ,

. Значит,

  ,  Решение кубического уравнения - сумма этих корней: 

Обозначим- дискриминант , тогда , после деления трёхчлена у3+pу +q на (у-у1) рассмотреть квадратное уравнение, найти у2 и у3,  и вычислить х из .

Эта формула очень громоздкая и сложная, так как содержит несколько радикалов. Применяется она крайне редко.

Пример: *Решить уравнение*:

*Замена* , 

, 



 т.е.

*По схеме Горнера разделим на, получим* ,



*Квадратное уравнение имеет 2 комплексных корня:  , тогда при  ;*

*при  при .*

*Исходное уравнение имеет два комплексных корня и один действительный.*

*Ответ. , ,.*

**Формула Кардано -** методика определения **корней кубического уравнения** в поле [**комплексных чисел**](https://www.calc.ru/Chisla-Kompleksnyye-Mnimyye-Chisla.html). Неполное кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Пусть, 

1)  если D > 0, то  y2 и у3  сопряженные комплексные числа;

2)  если D = 0, p ≠0 , q ≠0 , то уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают; при p = q = 0 получаем 3 совпадающих корня у1;2;3= 0.

3)  если D < 0, то три различных действительных корня.

*Рассмотрим использование формул Кардано подробнее на примерах:*

*1),*

*p = 15, q = 124, ,*

*, http://pandia.ru/text/78/082/images/image035_0.gif*

*D > 0 , тогда есть один действительный корень х1 = А + В, х1=1 – 5 = - 4, и два комплексно- сопряженных .*

*Ответ: .*

*2),*

*p = - 12, q = 16 , *

*D= 0, тогда уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают*

*, *

*Х1 = -2 + (-2) = - 4 , Ответ. х1 = - 4, х2;3 = 2.*

***3)*** *,*

*p = -21, q = 20 , *

*D< 0, уравнение имеет три различных действительных корня.*

Получилось, что для вычисления корня моего уравнения по формуле  надо извлечь корень квадратный из отрицательного числа. А может быть по аналогии с квадратным уравнением предположить, что в этом случае нет корней, поскольку . Ведь корни у этого уравнения есть: они легко находятся. Эти корни можно найти, применив вариант формулы Кардано для области комплексных чисел. Однако применение такого варианта формулы Кардано изучается в высшей математике.

Итак, я понял, что не всё так просто и легко от того, что имеем формулу Кардано.

Конечно, мне это показалось удивительным: все коэффициенты действительные, все корни действительные, а промежуточные вычисления приводят к несуществующим числам. Из справочной литературы я узнал, что это и есть тот «неприводимый случай», который заинтересовал многих математиков в XVI веке и привел к расширению множества действительных чисел. Значит, причина непопулярности формулы нахождения корней кубического уравнения не только в её громоздкости, а в её ненадежности. Его способ во всём уступает теореме Виета и схеме Горнера. Тогда зачем же она нужна? Во-первых, что формула дает ответ на вопрос о «разрешимости уравнений третьей степени в радикалах».

Во-вторых, применяется при решении уравнений с параметрами.

**Пример1.** При каком наименьшем натуральном а уравнение х3-3х +4-а=0 имеет одно действительное решение?

*По формуле Кардано: p= –3; q =4-a*

*Так как по условию найти одно решение, то это возможно , если D>0.*

*; ;;*

*,*

*Решая методом интервалов, получаем . Наименьшее натуральное число из этих промежутков –число 1. Ответ: 1*

**Пример2**. В зависимости от параметра а найти число корней уравнения х3 -3х-а=0.

*p= –3; q =-a, ;*

*Решив методом интервалов, получаем: D >0 при -1 решение*

*D <0 при  - 3 решения*

*D =0 при а =2 и при а=-2- 2 решения*

### 3.10 Использование монотонности функции

Этот способ основан на следующих утверждениях:

1. строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз;
2. если одна функция возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики их либо только один раз пересекутся, либо вообще не пересекутся, а это означает, что уравнение 𝑓 (𝑥) = 𝑔 (𝑥) имеет не более одного решения;
3. если на некотором промежутке одна из функций убывает (возрастает), а другая принимает постоянные значения, то уравнение 𝑓 (𝑥) = 𝑔 (𝑥) либо имеет единственный корень, либо не имеет корней. Этот способ можно использовать для решения следующих типов уравнений:
   * уравнения, в обеих частях которых стоят функции разного вида;
   * уравнения, в одной части которых убывающая, а в другой - возрастающая на данном промежутке функции;
   * уравнения, одна часть которых - возрастающая или убывающая функция, а вторая - число.

**Уравнение 24.** Решить уравнение 𝑥3 + 3𝑥 − 4 =0

*Решение:* рассмотрим функцию 𝑦 = 𝑥3 + 3𝑥 − 4 и представим в виде суммы двух функций 𝑦 = 𝑥3 и 𝑦 = 3𝑥 -4. Обе функции определены на множестве R и являются возрастающими. Следовательно, их сумма - возрастающая функция. А так как всякая монотонная функция каждое свое значение может принимать лишь при одном значении аргумента, то и значение, равное нулю, она может принимать лишь при одном значении 𝑥. Значит, такое уравнение если имеет действительное корень, то только один. Испытывая делители свободного члена, находим, что 𝑥 =1.

*Ответ:* 𝑥 = 1.

**Уравнение 25.** Решить уравнение 𝑥3 + 𝑥 − 2 =0.

*Решение:* Запишем уравнение в виде: 𝑥3 = 2 − 𝑥. Рассмотрим функции 𝑦 = 𝑥3 и 𝑦 = 2 − 𝑥. Функция 𝑦 = 𝑥3 возрастает на всей области определения, а функция 𝑦 = 2 − 𝑥 убывает на области определения. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что 𝑥 = 1.

Проверкой убеждаемся, что 𝑥 = 1 действительно корень уравнения.

*Ответ:* 1.

### 3.11 Графический метод

**Уравнение 25**. Решить уравнение 𝑥3 − 𝑥2 − 1 = 0.

*Решение:* запишем уравнение в виде 𝑥3 = 𝑥2 + 1. Построим в одной системе координат графики функций 𝑦 = 𝑥3 и 𝑦 = 𝑥2 + 1. Графики пересекаются в точке, с абсциссой 𝑥 ≈ 1,5.

**Вывод:***С помощью графического метода можно приближенно находить корни уравнения или решать вопрос о количестве рациональных корней уравнения.*

### 3.12 Алгебра одного уравнения

**Уравнение 26**.Решить уравнение 𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 + 15 =0

*Решение 1.* *Метод понижения степени .*

Сумма коэффициентов равна 0 ⇒ 𝑥 =1 корень уравнения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| корен ь | 1 | -3 | -13 | 15 |
| 1 | 1 | −3 + 1 ⋅ 1 = −2 | −13 + 1 ⋅ (−2) = 15 | 15 + 1 ⋅ (−15) = 0 |

𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 + 15 = (𝑥 − 1)(𝑥2 − 2𝑥 − 15) = 0

𝑥1 = 1; 𝑥2 = −3; 𝑥3 = 5. *Ответ:* -3; 1; 5.

*Решение 2. Теорема Виета.* 𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 + 15 = 0;

𝑎 = 1, 𝑏 = −3, 𝑐 = −13, 𝑑 = 15.

𝑥1 + 𝑥2 + 𝑥3 = 3

𝑥1𝑥2 + 𝑥2𝑥3 + 𝑥1𝑥3 = −13

𝑥1𝑥2𝑥3 = −15

Метод подбора: 𝑥 = −3; 𝑥 = 1; 𝑥 = 5.

*Решение 3. Формула Кардано.* 𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 + 15 =0

Приведём уравнение к неполному заменой 𝑥 = 𝑦 −

(𝑦 + 1)3 − 3(𝑦 + 1)2 − 13(𝑦 + 1) + 15 = 0

𝑦3 + 3𝑦2 + 3𝑦 + 1 − 3𝑦2 − 6𝑦 − 3 − 13𝑦 − 13 + 15 = 0

𝑦3 –16 𝑦 = 0

𝑦 = 0 или 𝑦 = 4 или 𝑦 = −4

Обратная замена: 𝑥 = 0 + 1 = 1, 𝑥 = 4 + 1 = 5, 𝑥 = −4 + 1 = −3

*Ответ:* -3, 1, 5.

*Решение 4. Метод разложения на множители*

𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 + 15 = 0

𝑥3 − 3𝑥2 − 13𝑥 − 2𝑥 + 2𝑥 + 15 = 0

(𝑥3 − 3𝑥2 + 2𝑥) − 15(𝑥 − 1) = 0

𝑥(𝑥2 − 3𝑥 + 2) − 15(𝑥 − 1) = 0

𝑥(𝑥 − 1)(𝑥 − 2) − 15(𝑥 − 1) = 0

(𝑥 − 1)(𝑥2 − 2𝑥 − 15) = 0

(𝑥 − 1)(𝑥 + 3)(𝑥 − 5) = 0

𝑥 = 1, 𝑥 = −3, 𝑥 = 5

*Ответ:* −3; 1; 5.

Различные способы решения одного уравнения показывают универсальность каждого метода, его оригинальность и рациональность. Сравнив различные способы решения кубических уравнений, можно сделать **вывод**: в каждом из методов решения есть свои плюсы и минусы, во многом они дополняют друг друга, например, если у кубического уравнения слишком большие коэффициенты, его можно решить с помощью схемы Горнера и проверить теоремой Виета и каждый способ нужен для решения своих задач в математике. Ясно, что формулу Кардано нужно применить лишь в самом крайнем случае, когда все остальные способы не дадут точного ответа.

# Результаты исследования

Рассмотрены и классифицированы кубические уравнения по видам и способам решения. Основные способы решения: разложение на множители, произведение которых равно нулю, замена переменной, позволяющая получить уравнение меньшей степени, чем исходное и функциональнографический способ.

Результатом поиска методов решения кубических уравнений, неподдающихся решению способами, рассматриваемыми в школьной программе, стали способы, основанные на применении теоремы Виета (для уравнений степени 𝑛 > 2), теоремы Безу, схемы Горнера, а также формула Кардано.

В работе представлены методы решения уравнений, которые стали открытием. К ним можно отнести - метод неопределенных коэффициентов, метод тригонометрических подстановок, симметрические уравнения.

Более понятна и наглядна в применении к решению уравнений теорема Безу.

Схема Горнера упрощает вычисления, помогает легко подобрать корни.

Формула Кардано очень сложная и громозская, т.к. содержит несколько радикалов. Применяется крайне редко.

Теорема Виета для уравнений высших степеней является универсальным методом. Он трудоемкий, требует хорошей техники вычислений;

Графический способ решения не всегда дает точных ответов. Этот способ удобен для решения задач, где необходимо узнать, сколько корней имеет уравнение, а не какие.

Особый интерес к решению уравнений методом неопределенных коэффициентов, метод тригонометрических подстановок, к решению симметричных и возвратных уравнений

**Новизна**

**Теорема Виета для уравнений 7 степени**

+

+

+

**Теорема Виета для уравнений 5 – ой степени**

+

**Теорема Виета для уравнений 6-ой степени**

+

**Прогрессия корней уравнений n-ой степени**

Если в корнях уравнений n-ой степени существует арифметическая или геометрическая прогрессия, то решение таких уравнений намного легче. Например, если первый корень -1, то второй по прогрессии -0.5, третий -0.25, и.т. и это его уравнение:

Таких уравнений я назвала прогрессивными, потому что как видим корни таких уравнений по арифметической прогрессии уменьшаются или в других видах уравнений могут увеличиваться. Вероятно, что прогрессия может существовать в уравнениях шестого и седьмого или высшее этих степеней. Введем несколько пример и объясняем.

**1. Прогрессия корней уравнений 3-ей степени**

Если коэффициент d без остаток делится на b и выйдет без остаток из квадратного корня, то получаем из формулы и найдем другие корни с помощью формулах . Здесь мы получаем:

Если в таком уравнение все коэффициенты положительные, то корни будут отрицательными.

**Уравнение 1** **Уравнение 2**

**Проверка с помощью теорема Виета**

**Уравнение 3**  **Уравнение 4**

**Уравнение 5** **Уравнение 6**

**Уравнение 7 (рациональное кубическое уравнение)**

Проверим с помощью теоремы Виета:

Ответ:

**Подробности о решение уравнениях 7 степени в следующем**

**документе.**

# Заключение

Теория уравнений занимает ведущее место в математике. Имеет не только теоретическое значение, но и служит практическим целям. Изучив учебную и научную литературу, интернет-ресурсы по теме "Кубические уравнения и его корни" удалось выяснить, что современной науке известно множество способов решения уравнений.

На мой взгляд, самые надежные и практичные способы - это теорема Виета и схема Горнера, они позволяют быть уверенным в своем ответе.

Выдвинута гипотеза о существовании связи между коэффициентами кубического уравнения и его корнями. Действительно - такая формула существует.

В данной работе достигнута цель и выполнены основные задачи:

показаны и изучены новые, ранее неизвестные формулы. Рассмотрено много примеров. Исследованы различные методы решения уравнений третьей степени. Не все способы удобны для решения, но каждый из них интересен. Предлагаемая работа рассчитана на учеников 9 - 11 классов, желающих повысить уровень математической подготовки, узнать больше о кубических уравнениях и способах их решения.

Практическая значимость: в зависимости от вида уравнения умение определять, какой способ решения в данном случае является наиболее эффективным, а также правильно применять выбранный метод. Продолжение работы вижу в изучении уравнений высших степеней.

Список использованной литературы

1. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажер: Пособия для школьников и абитуриентов. – М: Илекса, 2001 г.
2. Журнал «Все для учителя математики», статья Ю. А. Захарченко:

Алгебраические уравнения высших степеней. От простого к сложному.

1.2017.

1. Электронная энциклопедия «Википедия».