ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ
**«КОЛЛЕДЖ АВТОМАТИЗАЦИИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ № 20»**

Исследовательская работа

Решение уравнений третьей степени методом Кардано

Автор:
Демидов Данила, студент группы
КСК112

Руководитель:
Филиппова З. М., преподаватель
математики и физики

Москва
2018

Содержание

Введение

Актуальность: Участвуя в различных математически конкурсах и олимпиадах, я неоднократно встречал уравнения 3-й степени, решение которых меня заводили в тупиковую ситуацию, и я не смог довести их до логического конца. Хотя навыки решения таких уравнений (биквадратных, уравнений, решающихся способом разложения на множители) есть абсолютного большинства студентов нашего колледжа. А умение решать уравнения 1-ой и 2-ой степеней вообще входит в «прожиточный минимум» любого студента нашего колледжа. А уравнения 3-ей степени? Как быть с ними? И действительно, анкетирование подтверждает следующую мысль: 48 человек из 50 не умеют решать кубические уравнения. Возникает вопрос, как научиться решать уравнения 3 степени, чтобы справиться с заданиями на предстоящих испытаниях?

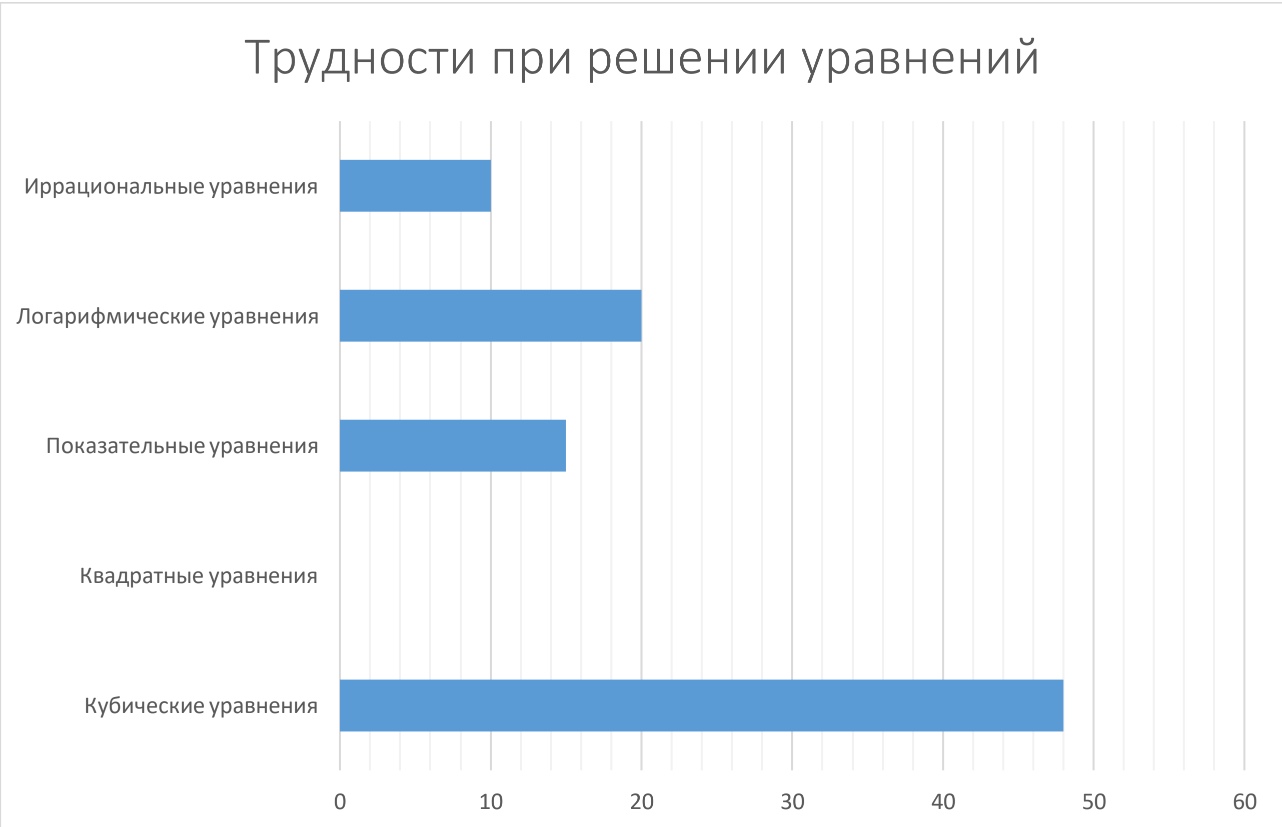

Рис. 1

Цель работы: Рассмотрение решения уравнений 3-й степени методом Кардано.

Задачи:

- Изучить основы данного вопроса в курсе математики;

- Изучить решение уравнений 3-й степени методом Кардано;
- Подобрать примеры для решения уравнений 3-й степени методом Кардано.

Объект исследования – решение уравнений.

Предмет исследования – уравнения третей степени

Методы исследования: изучение литературы, обобщение, практические упражнения, анкетирование.

Ожидаемые результаты: приобретение навыков решения алгебраических уравнений третей степеней, знакомство однокурсников с методами решения уравнений третей степени.

Гипотеза: Существуют алгебраические методы решения уравнений 3-й степени.

Теоретическая значимость: систематизации способов решения уравнений третьей степени

Практическая значимость: использование решения уравнений 3-й степени в термодинамике, и большая часть к разделу прикладной математики.

Глава 1. Уравнение третьей степени

1.1 История о кубических уравнениях

В древности люди занимались очень усердно и именно они внушили нас решать задачи. Они славятся своим умом и ходом действий. Если бы не они, то математики попросту не было. Математика была известна еще на Востоке. Очень часто, все иллюстрированные решения велись доказательством через геометрию. Так, например, основное тригонометрическое тождество «$sinx^2 + cosx^2 = 1$» выводится через прямоугольный треугольник и знаменитую нам теорему Пифагора. Ученые Востока сделали развитую, в геометрической форме теорию о кубических уравнениях. Этот факт был известен Омаром Хаемой в 1070 году, где он рассматривал нахождение положительных корней третьей степени. Еще не мало интересный факт установил Ф. Виет. Он ввел знаменитую теорему Виета и сам вывел формулу в тригонометрической форме записи.

Для уравнений третьей и четвёртой степени существуют формулы Кардана и Феррари, выражающими корни этих уравнений через радикалы. Получается, что на практике ими редко пользуются. Но мы ведь знаем, что изучением кубических уравнением занимался не только Джироламо Кардана, но также были известные и его ученики: Феерий и Тарталья. Если верить всяким источникам, то формула была изначальна опубликована Никола Фонтана Тарталья, а затем передана Джироламо Кардано. Эти факты удивляли жителей Востока. Каждый раз, когда шел какой-то спор они вызывали друг друга на дуэль и решали разные задачи. Когда кто-то проигрывал, тот уходил и узнавал свои ошибки. Это всегда было интересно. В математических спорах первой половины 15 века почетное место было присвоено алгебре. Для участников правила были просты, кто находит неизвестный никому алгоритм или формулу, тот побеждает. Но на тот момент, нахождение формулы было крайне сложным заданием для победы. И вот тут начинается главный турнир. Было два участника Фиорд и Никола Тарталья — главный консультант по математическим расчетам венецианского арсенала. Оба были хороши. Тарталья знал, что он проиграет. Был один и единственный способ, который мог ему помочь — самому найти формулу для решения кубического уравнения. Ученый не спал, не ел, он все время думал над своей формулой и спустя трехсотлетия он наконец-то получил заветную формулу для решения кубических уравнений вида: $x^3 + ax = b$, где «a» и «b» — положительные числа. Поэтому 12 февраля 1535 года стало черным днем болонской математики — Тарталья одержал победу над главным противником. Но через какой-то период времени все пошло не гладко, его формула работала только для положительных чисел. Никола Тарталья долго не мог понять, где он допустил ошибку и отложил это дело на другой период времени. Тем не менее в 1545 году итальянский ученый - Джироламо Кардано выпускает книгу о том, что знаменитая формула Тартальи – есть формула Кардано, она называлась «О правилах алгебры». В честь его имени и назвали данный метод.

Глава 2. Решение уравнений третьей степени с целыми коэффициентами

2.1 Решение уравнений 3-ей степени. Формула Д. Кардано

Рассмотрим уравнение 3-ей степени: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Пользуясь формулой куба суммы:

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,

преобразуем уравнение:

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$;

Вынесем «а» за скобки**:**

$$a\left(x^3 + \frac{3bx^2}{a}\right) + 3cx + d = 0.$$

Теперь нам нужно коэффициент «**a**» добавить внутрь скобок. После добавления «а» во внутрь скобок, наше уравнение приобретает следующий вид:

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^3 + 3\left(c - \frac{b^2}{a}\right)x + d - \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Для следующего шага нам нужно сделать замену слагаемого в первых скобках, пусть:

$$y = \left(x + \frac{b}{a}\right)^3 \text{ и } x = y - \frac{b}{a}.$$

Получим:

$$ay^3 + 3\left(c - \frac{b^2}{a}\right)y - \frac{3bc}{a} + \frac{3b^3}{a^2} + d - \frac{b^3}{a^2} = 0.$$

Все это выражение поделим на «а»

$$y^3 + 3\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)y - \frac{3bc}{a^2} + \frac{2b^3}{a^3} + \frac{d}{a} = 0.$$

Чтобы не нести сложные преобразования сделаем замену переменных

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b}{a^2};$$

$$2q = \frac{-3bc}{a^2}\frac{2b^3}{a^3} + \frac{d}{a}.$$

Наше уравнение после замены приобретает следующий вид:

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Сделаем третью замену

$$y = f - \frac{k}{f};$$

$$y^3 = f^3 - \frac{3f^2k}{f} + \frac{3k^2f}{f^2} - \frac{k^3}{f^3};$$

$3py = 3pf - \frac{3pk}{f}$.

Замена будет иметь вид:

$f^3 - \frac{p^3}{f^3} + 2q = 0$.

Помножим на f^3. И получим квадратное уравнение относительно четного коэффициента $f^6 + 2qf^3 - p^3 = 0$. И это квадратное уравнение относительно f^3.

И по формуле четного коэффициента мы получаем:

$f^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3}$.

Если мы нашли f, то и нашли y:

$$y = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2+p^3}}}.$$

Общая формула выглядит так:

$$\mathbf{x} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Формула Кардана позволяет найти корни неполного кубического уравнения на множестве действительных чисел при условии, что число $\mathbf{D} = \left(\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}$. Поэтому условие не является критерием существования решений, а формула Кардана приобретает безусловный и общий смысл только тогда, когда p и q — любые комплексные числа. Если коэффициенты p и q действительны, то число $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ — дискриминант уравнения $x^3 + px + q = 0$ — тоже является действительным. По знаку этого числа можно определить тип корней:

D > 0 — все три корня различны, причем один корень является действительным числом, а два других — сопряженными комплексными числами;

D = 0 (p ≠0, q≠0) — все три корня действительны, причем два из них равны между собой;

D = 0 (p=0, q=0) — все три корня действительны, причем все они равны нулю;

D <0 — все три корня действительны и различны между собой. Это так называемый «неприводимый» случай, и именно при анализе этой ситуации впервые исторически возникло понятие комплексного числа.

Для вычислений корней найдем величины A и B:

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{\mathrm{D}}} \text{ и } \mathrm{B} = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} - \sqrt{\mathrm{D}}}.$$

Дискриминант уравнения будет иметь тот же знак, что и вышеуказанный дискриминант. Корни уравнения выражаются следующим образом:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B};$$

$$x_2 = \mathrm{A}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{iA}-\mathrm{B}\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathrm{X}_3 = \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\mathrm{z}} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{iA}-\mathrm{B}\sqrt{3}}{2}$$

Мы получили формулу для решения приведенного уравнения 3-й степени. Она носит имя итальянского математика Кардано.

Заключение

Гипотеза, выдвинутая в начале работы, подтвердилась: существуют ряд методов для решения алгебраических уравнений 3-й степени. Изучив метод Кардано для решения уравнений 3-й степени выяснил, что данный подход к решению уравнений очень сложный. И с первого раза не удается понять, что произошло. В ходе работы над этой темой, я выяснил, что данный метод – не единственный, есть множество других решений: графический, разложение на множители, деление многочлена на многочлен столбиком.

Но мое исследование в области решения уравнений на этом не закончено. В будущем я планирую заняться исследованием решения уравнения n-ой степени с помощью теоремы Виета.

Список литературы

- Алгебра и начала анализа, 10 -11классы. Алимов Ш.А. Колягин Ю.М.Москва. Просвещение, 2014г
- В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. Задачи по элементарной математике, Физматлит, 1980
- Вавилов В.В., Олехник С.Н., Справочное пособие. М: Наука, 1987
- Электронная энциклопедия «Википедия»
- Бажова М.П., Сканави М.И., Решение всех конкурсных задач по математике. М.: Просвещение,1993
- Габов Н. А. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ // Международный школьный научный вестник. – 2017. – № 5-1. – С. 78-83;

№ 1

Решить уравнение:

x^3-7x+6=0.

Здесь p=-7 и q=6

$D = \left(-\frac{7}{3}\right)^3 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -\frac{243}{27} + 9 = \frac{-100}{27}$; Имеем **D<0** – уравнение имеет 3 действительных корня.

По формуле Кардано:

$x_1 = A + B; X_{1,2} = \frac{-A+B}{2} \pm \frac{iA-B\sqrt{3}}{2}$, где:

$$A = \sqrt[3]{\frac{-6}{2} + \sqrt{\frac{-100}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \frac{10i}{3\sqrt{3}}};\ B = \sqrt[3]{\frac{-6}{2} - \sqrt{\frac{-100}{27}}} = \sqrt[3]{-3 - \frac{10i}{3\sqrt{3}}}$$

(1) Находим **A**

$$r = -3 + \frac{10i}{3\sqrt{3}};\ |r| = \sqrt{9 + \frac{100}{27}} = \sqrt{\frac{343}{27}};\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-10}{9\sqrt{3}}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{9\sqrt{3}}\right)$$

Тогда

$$A_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}654654 + i0{,}75929);$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}(-0{,}98198 + i0{,}188982);\ A_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}327327 - i0{,}94491)$$

(2) Аналогично находим **B**

$$r = -3 - \frac{10i}{3\sqrt{3}};\ |r| = \sqrt{9 + \frac{100}{27}} = \sqrt{\frac{343}{27}};\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{9\sqrt{3}}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{9\sqrt{3}}\right)$$

Тогда

$$B_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}327327 + i0{,}944911)$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}(-0{,}98198 - i0{,}18898)$$

$$B_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}654654 - i0{,}75593)$$

Проверяем A и B

$\mathbf{A_1} + \mathbf{B_3} = \frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{3}}$**(такое значение всегда имеется)**

Значит

$$\mathbf{X_1} = \sqrt{\frac{7}{3}}(\boldsymbol{A_1}\mathbf{i} + \mathbf{B_3}\boldsymbol{i}) = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}654654 + 0{,}75929i + 0{,}654654 - 0{,}75593i) = 2$$

$$\mathbf{X_2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(-\mathbf{B_3}\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{3}}\right) = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(-0{,}654654 - 0{,}75593i\sqrt{3}\right) = -3$$

$$\mathbf{X_3} = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(-\mathbf{A_1}\sqrt{\mathbf{3}}\right) = \sqrt{\frac{7}{3}}(0{,}654654 + 0{,}75593i\sqrt{3}) = 1$$

Ответ: -3; 1; 2

№ 2

Решить уравнение:

$$x^3 + 15x + 124 = 0$$

Имеем p = 15 и q = 124, тогда используя формулу Кардана, вычислим корни данного уравнения

$$x = \sqrt[3]{-\frac{124}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{124}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-62 \pm \sqrt{62^2 + 5^3}} = \sqrt[3]{-62 \pm \sqrt{3699}}$$

$$= \sqrt[3]{-62 \pm 63} = \sqrt[3]{1} \pm \sqrt[3]{-125} = 1 \pm \left(-\sqrt[3]{5^3}\right) = 1 - 5 = -4$$

Ответ: -4

Практическая часть

Уравнения для самостоятельного решения:

№ п/п	Уравнения:	Ответы:
1)	$x^3 - 19x + 3 = 0$	-5; 2; 3
2)	$x^3 - 12x + 16 = 0$	-4; 2
3)	$x^3 + 3x - 4 = 0$	1
4)	$x^3 - 10x - 3 = 0$	-3; 0
5)	$x^3 - 18x - 30 = 0$	$\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2$
6)	$x^3 - 3x - 2 = 0$	-1; 2
7)	$x^3 - x - 60 = 0$	4
8)	$x^3 - 2x - 4 = 0$	2
9)	$x^3 + 6x^2 + 9x = 0$	-3; 0
10)	$x^3 - 3x + 2 = 0$	-2; 1
11)	$x^3 - 30x - 29 = 0$	$\frac{1 - 3\sqrt{13}}{2};\ -1;\ \frac{1 + 3\sqrt{13}}{2}$