Проектная работа

Интересные свойства трапеции

Выполнила :
ученица 9 класса
МБОУ СОШ с. Н. Батако
Базоева З.
Руководитель: Багаева Ю.Г.

Актуальность

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать геометрические задачи при сдаче ГИА, вступительных экзаменов в высшие учебные заведения. Большинство таких задач не решается с помощью жестких алгоритмов, почти каждая геометрическая задача требует своего подхода. Здесь уже мало иметь те или иные знания, нужно уметь применять их в каждом конкретном случае. Также этот материал будет полезен при изучении пространственных геометрических фигур в 10-11 классах.

Цель работы

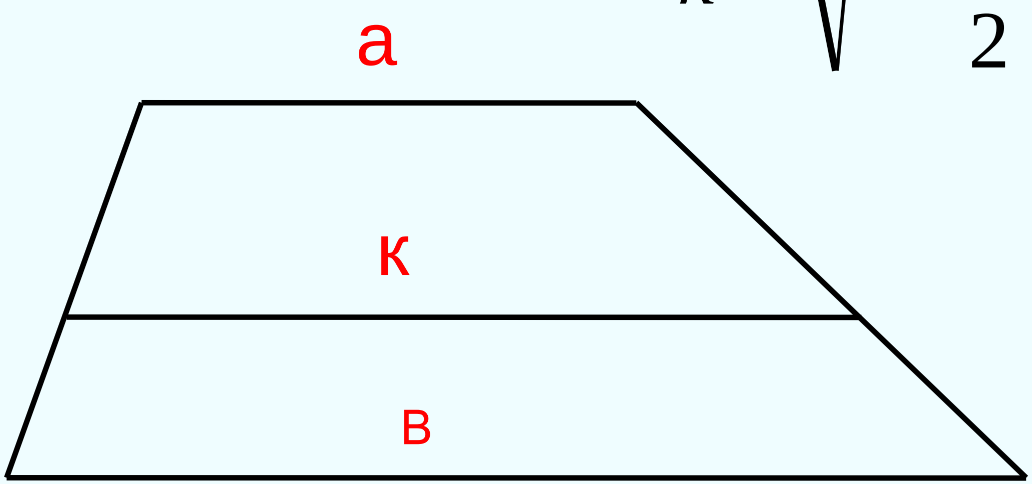
Рассмотреть свойства трапеции, которые в школьном курсе геометрии не изучаются, но при решении геометрических задач ЕГЭ из развернутой части бывает необходимо знать и уметь применять именно эти свойства .

Свойства трапеции:

1

Если трапеция разделена отрезком к параллельно ее основаниям а и в, на две равновеликие трапеции , тогда отрезок к равен

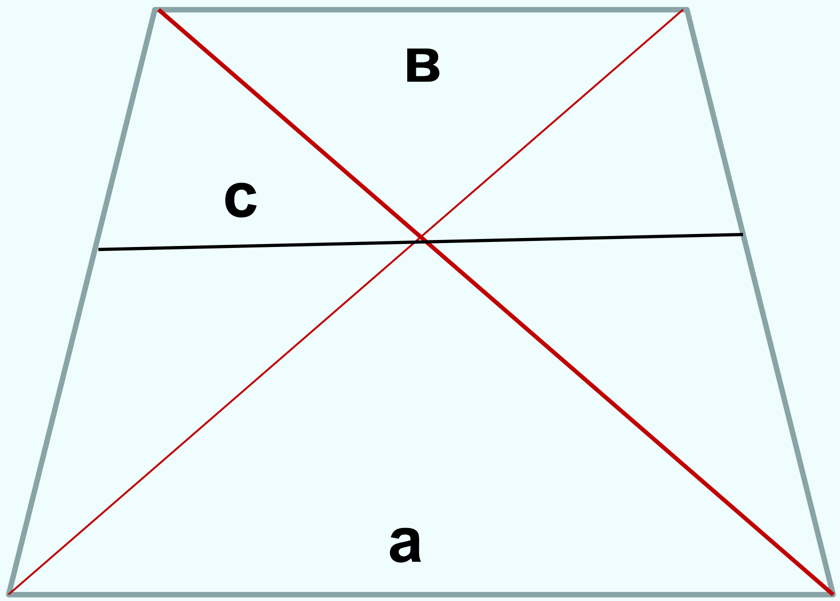
$$к = \sqrt{\frac{a^2 + в^2}{2}}$$



2

Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции.

Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей равен:

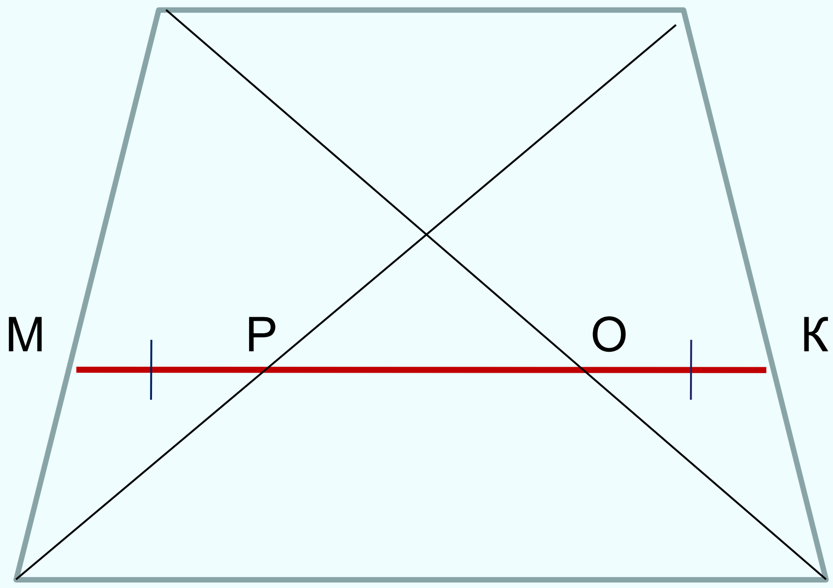


$$c = \frac{2ав}{a + в}$$

3

Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

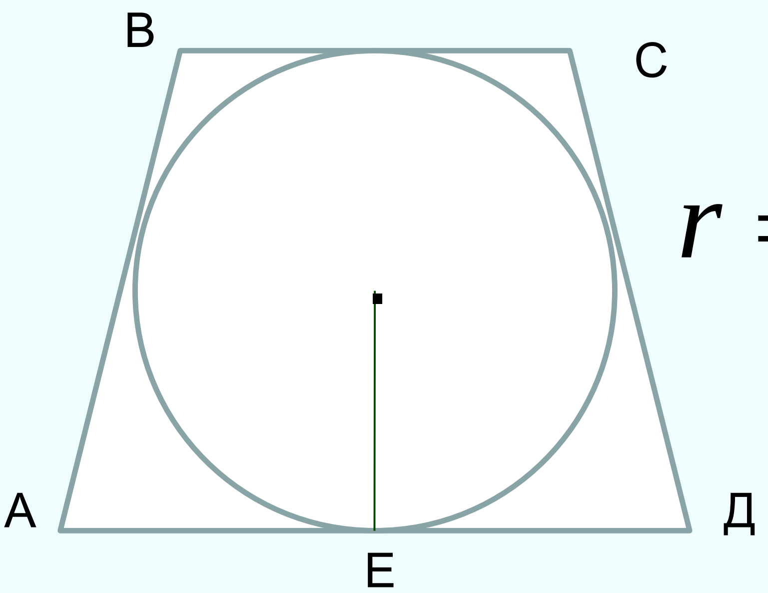
MP=OK



Свойства равнобедренной трапеции:

1

Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

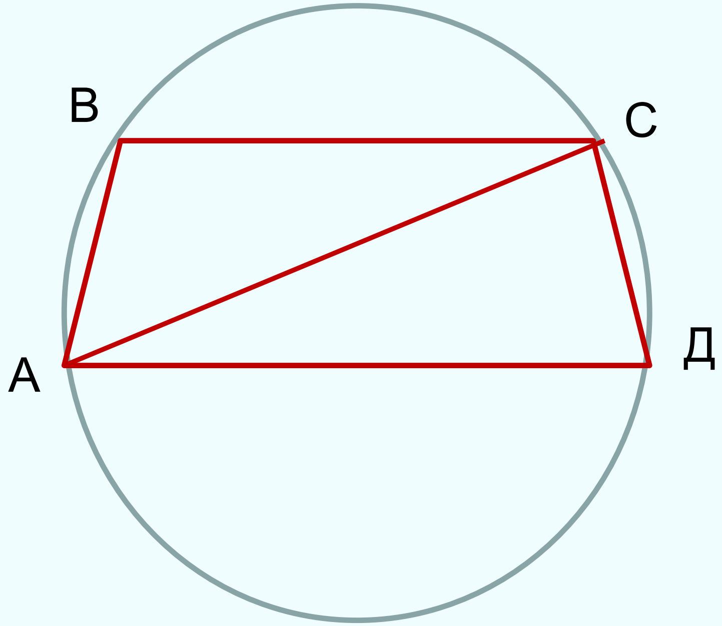


$$r = OE = \sqrt{AE \cdot EД}$$

Свойства равнобедренной трапеции:

2

Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то её диагональ перпендикулярна боковой стороне

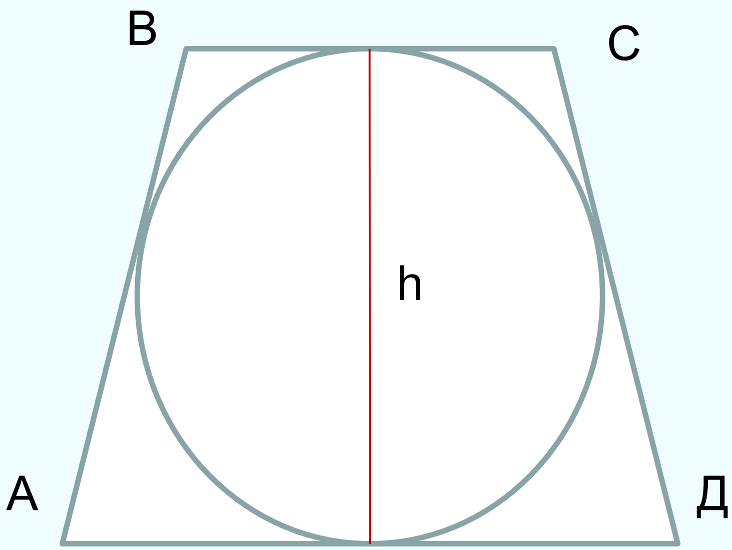


$$AC \perp CД$$

Свойства равнобедренной трапеции:

3

**В равнобедренную трапецию можно вписать окружность,
если боковая сторона равна
её средней линии.**



$$AB = \frac{BC + AД}{2}\ ;\ h = 2r$$

Свойства равнобедренной трапеции:

4

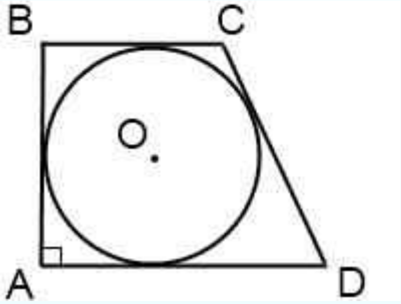
Если равнобедренную трапецию со сторонами а,в,с,d можно вписать и около неё можно описать окружности, то площадь трапеции равна.

$$S = \sqrt{abcd}$$

1)Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:

- 1. Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.
- 2. Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.
- 3. Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- 4. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.
- 5. Если точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n, то радиус вписанной окружности равен

$$r = \sqrt{mn}$$

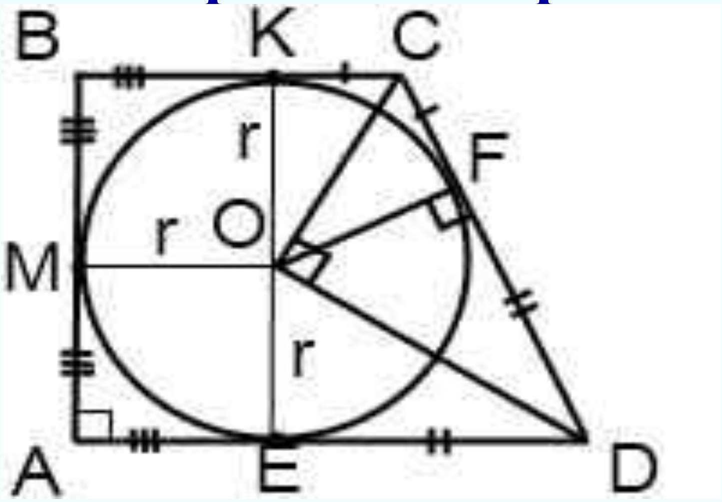


Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:

1. **Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.**
2. **Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.**
3. **Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.**
4. **Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.**
5. **Если точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n, то радиус вписанной окружности равен**

Свойства прямоугольной трапеции, в которую вписана окружность:

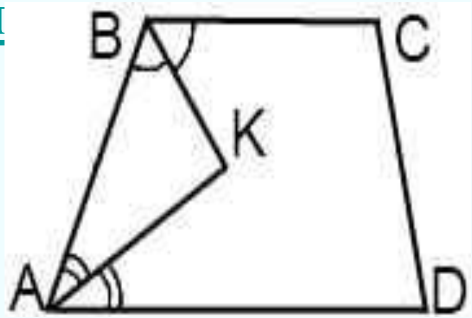
1)Четырехугольник, образованный центром вписанной окружности, точками касания и вершиной трапеции — квадрат, сторона которого равна радиусу. (АМОЕ и ВКОМ — квадраты со стороной r).



2) Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований: S=AD*BC

I. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90º .

- 1)$\angle ABC+\angle BAD=180^{o}$(как внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AB).
- 2) $\angle ABK+\angle KAB=(\angle ABC+\angle BAD):2=90^{o}$(так как биссектрисы делят углы пополам).
- 3) Так как сумма углов треугольника равна 180^{o}, в треугольнике ABK имеем: $\angle ABK+\angle KAB+\angle AKB=180^{o}$, отсюда $\angle AKB=180-90=90^{o}$.
- **Вывод:** ***Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.***
- Это утверждение применяется при решении задач на трапецию, в которую вписана окружност



I I .Точка пересечения биссектрис трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на средней линии трапеции.

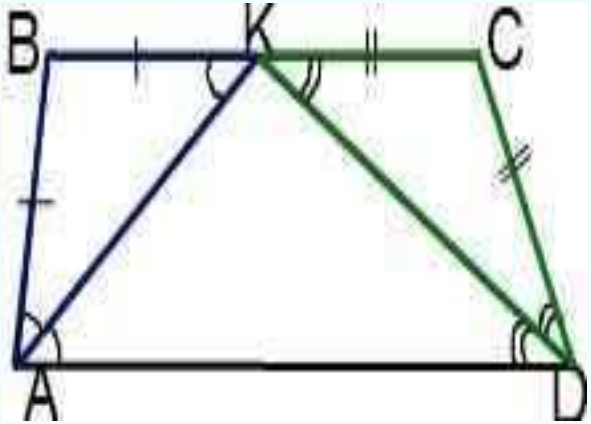
- Пусть биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке S. Тогда треугольник ABS — равнобедренный с основанием BS
- Значит, его биссектриса AK является также медианой, то есть точка K — середина BS.
- Если M и N — середины боковых сторон трапеции, то MN — средняя линия трапеции и MN||AD.
- Так как M и K — середины AB и BS, то MK — средняя линия треугольника ABS и MK||AS.
- Поскольку через точку M можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, точка K лежит на средней линии трапеции.

III. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABK и DCK — равнобедренные с основаниями AK и DK соответственно.
- Таким образом, BC=BK+KC=AB+CD.

Вывод:

- **Если биссектрисы острых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей меньшему основанию, то меньшее основание равно сумме боковых сторон трапеции.**
- У равнобедренной трапеции в этом случае меньшее основание в два раза больше
- боковой стороны.

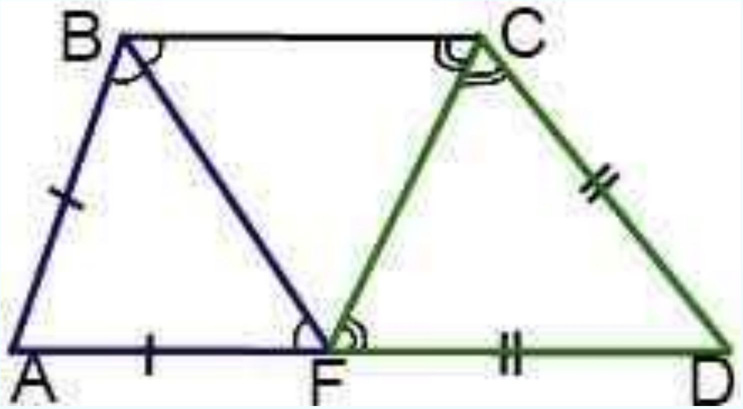


IV.Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABF и DCF — равнобедренные с основаниями BF и CF соответственно.
- Отсюда AD=AF+FD=AB+CD.

Вывод:

- **Если биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей большему основанию, то большее основание равно сумме боковых сторон трапеции.**
- У равнобедренной трапеции в этом случае большее основание в два раза больше боковой стороны.



Практическая часть

В равнобедренной трапеции основания равны 6см. И 24см., а боковая сторона 15см. Найти радиус описанной окружности.

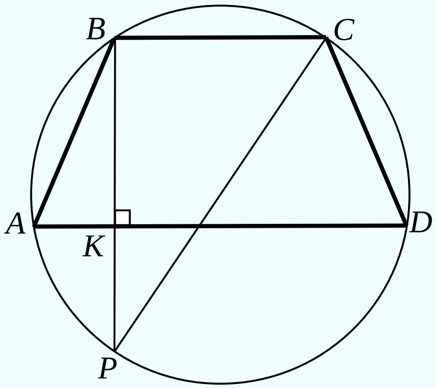


Рис.1

1способ

(основан на применении свойств вписанных углов и отрезков хорд окружности)

Пусть ABCD — данная трапеция, BC||AD (Рис.1).

R – радиус описанной окружности.

Проведем хорду BP через AD. К — точка пересечения AD и BP. BK - высота трапеции.

PBC=90°, значит, PC=2R.

AK=(24-6):2=9(см), $BK^2=AB^2-AK^2$, BK=12 см.

BK·KP=AK·KD, 12·KP=9·15, KP= $\frac{45}{4}$ см,

BP=BK+KP, BP= $\frac{93}{4}$ см. $PC^2=BP^2+BC^2$,

PC= $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см, R= PC, R= см.

Ответ. $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

Практическая часть

В равнобедренной трапеции основания равны 6см. И 24см., а боковая сторона 15см. Найти радиус описанной окружности.

2способ

(следствие из теоремы синусов)

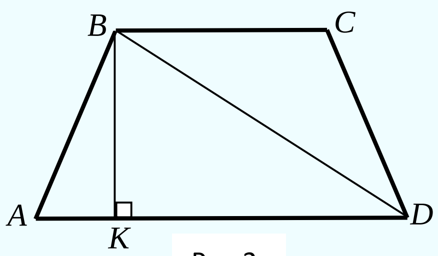


Рис.2

Проведем диагональ BD (Рис.2).

Из ΔBKD (K=90°): $BD^2=BK^2 + KD^2$,

BD= см. Из ΔBKA (K=90°):

sin A=BK/AB, sin A= $\frac{4}{5}$

R – радиус описанной окружности $\frac{45}{4}$ около данной

трапеции и одновременно около ΔABD.

Следовательно, R=BD/2sinA, R= $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

Ответ. $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

Практическая часть

В равнобедренной трапеции основания равны 6см. И 24см., а боковая сторона 15см. Найти радиус описанной окружности.

3способ

(применение формулы радиуса описанной окружности около треугольника)

Рассмотрим ΔABD (Рис.2).

$AB=15$ см, $BD=3\sqrt{41}$ см, $AD=24$ см.

$S=0{,}5BK\cdot AD$, $S=144$ см².

$R=AB\cdot BD\cdot AD/4S$, $R=\dfrac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

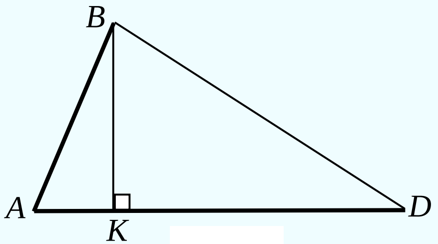


Рис.2

Практическая часть

В равнобедренной трапеции основания равны 6см. И 24см., а боковая сторона 15см. Найти радиус описанной окружности.

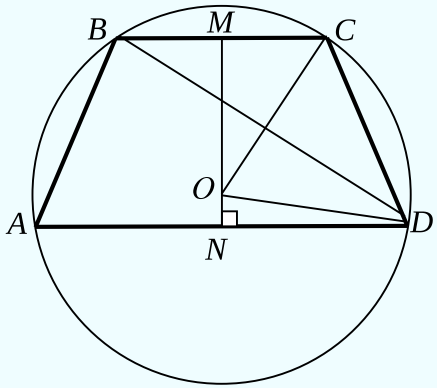


Рис.3

4способ

(применение теоремы Пифагора)

Нужно выяснить расположение центра описанной окружности (Рис.3).

Рассмотрим ΔABD: AD - большая сторона,

$AD^2 < AB^2 + BD^2$, значит, ABD - острый.

Следовательно, O - внутренняя точка трапеции.

Проведем высоту трапеции MN через точку O,

MC=BM, ND=AN.

Применим теорему Пифагора к ΔOMC и ΔOND:

$OC^2=OM^2+MC^2$, $OD^2=ON^2+ND^2$.

Пусть OC=OD=R=x, а ON=y. MN=12 см.

Тогда получим систему уравнений

Решив систему, получим $y=\frac{9}{24}$, $x=\frac{15\sqrt{41}}{8}$

Отсюда, R= $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см Ответ. $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

Практическая часть

В равнобедренной трапеции основания равны 6см. И 24см., а боковая сторона 15см. Найти радиус описанной окружности.

5способ

(применение свойства отрезков хорд)

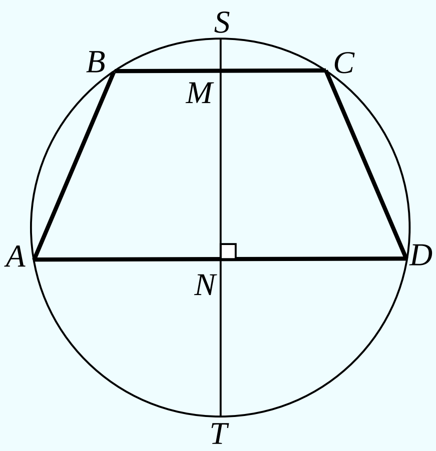


Рис.4

Проведем диаметр ST так, что ST перпендикулярен BC и ST перпендикулярен AD (Рис.4).

ST пересечет основания трапеции в точках M и N. MN=12 см

Пусть SM= x, а NT = y.

Получим систему уравнений $\begin{cases} x\cdot(12+y)=9, \\ y\cdot(12+x)=144 \end{cases}$

Решив систему уравнений, получим

$x=\dfrac{(15\sqrt{41}-93)}{8}$, $y=\dfrac{(15\sqrt{41}-3)}{8}$.

ST= SM+NT+ MN, MN=12 см. ST= $\dfrac{30\sqrt{41}}{8}$ см,

R= $\dfrac{15\sqrt{41}}{8}$ см. Ответ. $\dfrac{15\sqrt{41}}{8}$ см.

Выводы:

Мы считаем, что математика – это такая наука, изучение которой не сводится к зубрёжке формул и решению задач по одним и тем же шаблонам. Особенно геометрия! Творческий подход и нестандартное мышление просто необходимы для достижения новых высот в познании мира.

При решение геометрических задач ОГЭ и ЕГЭ эти свойства трапеции помогут решить сложные задачи с большой легкостью.

Благодарим

ЗА ВНИМАНИЕ!