

РЕФЕРАТ

Магистерская работа содержит 102 с., 59 рисунков, 19 таблиц, 3 приложения.

ТЕРМОУПРУГОСТЬ, ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПОЛЗУЧЕСТЬ, ТЕРМОУСТАЛОСТЬ, КОРСЕТНЫЙ ОБРАЗЕЦ, ЛОПАТКА ГТУ, ЖАРОПРОЧНЫЕ МОНО- И ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ СПЛАВЫ НА НИКЕЛЕВОЙ ОСНОВЕ, СТАЦИОНАРНАЯ И НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ДЕФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ ТЕРМОУСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ANSYS, PANTOCRATOR

Объект исследования: термоусталостная прочность монокристаллических и поликристаллических сплавов при различных температурных режимах и варьируемых временах выдержки.

Цель исследования:

1. Определение нестационарных температурных полей при нагреве корсетного образца электрическим током и сравнение с экспериментальными данными для различных температурных режимов и различных монокристаллических и поликристаллических сплавов.
2. Исследования влияния времени выдержки на термоусталостную долговечность с учетом процессов неупругого деформирования для различных температурных режимов и различных сплавов и их сравнительный анализ.

В процессе работы использовались КЭ-пакеты ANSYS и PANTOCRATOR.

В результате исследования расчетные распределения температур показали хорошую корреляцию с экспериментом для всех режимов, для различных сплавов и при различных температурных режимах построены расчетные кривые влияния времени выдержки на термоусталостную прочность, которые

были проверены с помощью данных эксперимента, и они также показали хорошую корреляцию с ним.

ABSTRACT

Master work contains 102 p., 59 pictures, 19 tables, 3 applications.

THERMOELASTICITY, PLASTICITY, CREEP, THERMAL FATIGUE, CORSET SAMPLE, GAS TURBINE BLADE, HIGH-TEMPERATURE SINGLE- AND POLYCRYSTALLINE NICKEL-BASED SUPERALLOYS, STATIONARY AND NONSTATIONARY THERMOELECTRIC BOUNDARY VALUE PROBLEM, THERMOELASTOVISCOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM, THERMAL FATIGUE DEFORMATION CRITERION, FINITE ELEMENT MODELING, ANSYS, PANTOCRATOR

Object of research: thermal fatigue strength of single-crystal and polycrystalline alloys for different temperature loadings and different delay times.

Purpose of research:

1. Determination of nonstationary temperature fields while heating the corset sample by an electric current and the comparison with experimental data for different temperature regimes and different single-crystal and polycrystalline alloys.
2. Studying of the effect of delay time on the thermal fatigue life taking into account the processes of inelastic deformation for different temperature regimes and different alloys and their comparative analysis.

Finite-element packages ANSYS and PANTOCRATOR have been using during research.

As a result of the study, the calculated temperature distributions showed a good correlation with the experiment for all modes, for different alloys and at different temperature regimes, the calculated curves of the effect of the holding time on the thermo-fatigue strength were constructed, which were tested using the experimental data, and they also showed a good correlation with it.

Оглавление

1. Введение	7
2. Основные уравнения описания термоэлектромеханического поведения сплошной среды	15
2.1. Основные уравнения термоэлектромеханики.....	15
2.2. Модели деформирования вязкоупругопластического материала.....	17
2.2.1. Определяющие уравнения неупругого деформирования для монокристаллических материалов	18
2.2.2. Определяющие уравнения неупругого деформирования для поликристаллических материалов	24
2.3. Модели накопления повреждений при термической усталости...25	
3. Модельные задачи стационарного и нестационарного нагрева образца электрическим током.....	27
3.1. Постановка электростатической задачи.....	27
3.2. Аналитическое решение электростатической задачи.....	28
3.3. Конечно-элементное решение электростатической задачи.....	29
3.4. Постановка задачи стационарной теплопроводности.....	30
3.5. Аналитическое решение задачи стационарной теплопроводности.....	31

3.6.	Конечно-элементное решение задачи стационарной теплопроводности.....	33
3.7.	Постановка задачи нестационарной теплопроводности.....	34
3.8.	Аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности.....	36
3.9.	Конечно-элементное решение задачи нестационарной теплопроводности.....	40
4.	Результаты конечно-элементного решения термоэлектрической задачи нагрева корсетного образца электрическим током.....	41
4.1.	Конечно-элементная модель и свойства материалов.....	43
4.2.	Граничные условия в термоэлектрической задаче.....	46
4.3.	Результаты решения термоэлектрической задачи.....	47
5.	Результаты конечно-элементного решения термоупругопластической задачи циклического нагрева электрическим током корсетного образца.....	49
5.1.	Постановка задачи и свойства материалов.....	49
5.2.	Конечно-элементная модель и граничные условия.....	52
5.3.	Результаты термоупругопластического анализа.....	53
6.	Влияние выдержки на термоусталостную прочность.....	61
6.1.	Определение параметров моделей в расчетах на термоусталость.....	61
6.2.	Расчетные кривые влияния времени выдержки при максимальной температуре для различных сплавов: ВЖМ4, ЖС32 и ВИНЗ и их сравнительный анализ.....	75

6.3.Экспериментальная верификация полученных конечно-элементных результатов на термоусталостную прочность	77
7. Заключение.....	82
Список литературы.....	84
Приложение 1.....	89
Приложение 2.....	93
Приложение 3.....	97

1. Введение

В авиадвигателестроении тенденция повышения коэффициента полезного действия приводит к возрастанию рабочей температуры газа перед турбиной и требований к деталям рабочего тракта газотурбинных двигателей (ГТД), особенно к рабочим лопаткам. В связи с этим широкое распространение для изготовления лопаток турбины получили монокристаллические жаропрочные сплавы на никелевой основе, обладающие более высокой длительной прочностью и пластичностью по сравнению с поликристаллическими сплавами. Как пример использования монокристаллических лопаток в авиастроении, можно упомянуть впервые разработанный в России МС-21 с отечественным двигателем ПД-14, где впервые в гражданской авиации были использованы лопатки из упомянутых монокристаллических материалов. Жаропрочные сплавы на никелевой основе состоят из γ -фазы никеля и упрочняющей γ' -фазы на основе интерметаллида Ni_3Ti или Ni_3Al [1].

Кроме высокой жаропрочности монокристаллических сплавов для обеспечения работоспособности лопаток необходимо иметь высокое сопротивление термоциклическим нагрузкам материала.

Циклическая прочность материалов, характеризующаяся необратимым накоплением упругопластических деформаций за малое число циклов (10^2 - 10^5), которое приводит к разрушению за малое число циклов, называется малоцикловой усталостью [1,2]. Одним из самых опасных видов малоцикловой усталости является сопротивление термоусталости, то есть разрушение под действием циклического изменения температуры в условиях стесненности деформаций.

Одним из типичных и самых опасных повреждений рабочих лопаток являются термоусталостные трещины [3,4,5], появляющиеся в результате

многократной смены температуры лопатки, поэтому вызывает интерес анализ зависимости разрушения различных жаропрочных сплавов от температурных режимов и влияния времени выдержки при максимальной температуре цикла.

Для исследования термоусталостной прочности материалов в НПО ЦКТИ была разработана установка для проведения экспериментов на плоских корсетных образцах [3]. На этой установке в ЦКТИ проведено большое число испытаний материалов для разных температурных режимов, но систематический анализ влияния времени в ы д е р ж к и на термическую усталость не проводился.

Данное исследование весьма актуально, поскольку позволяет использовать имеющиеся экспериментальные данные по характеристикам жаропрочных сплавов для реальных режимов эксплуатации деталей газовых турбин и, в частности, авиадвигателей.

Объект данного исследования: термоусталостная прочность монокристаллических и поликристаллических никелевых сплавов при различных температурных режимов и варьируемых временах выдержки при максимальной температуре.

Цели и задачи исследования:

1. Смоделировать нагрев корсетного образца электрическим током и построить расчетные распределения температуры вдоль образца при максимальной температуре в цикле и сравнить с имеющимися в НПО ЦКТИ экспериментальными данными.
2. В целях минимизации расчетного времени найти фиктивную длину образца без учета оснастки на основе сравнения пластических деформаций в центре образца и перемещений в контрольных точках в задачах без оснастки и с ее учетом.
3. Определение полей неупругих деформаций в плоском корсетном образце, используя полученные распределения температур.

4. Решение проблемы влияния времени выдержки на термоусталостную прочность при различных режимах температур монокристаллических и поликристаллических материалов на основе деформационного критерия [6,7,8].

5. На основе полученного решения проблемы влияния выдержки, для выделенных сплавов и выделенного режима нагрева и охлаждения провести сравнительный анализ полученных данных.

Методы исследования: при решении указанных задач применялись методы математической физики, методы сопротивления материалов, теории упругости и термоупругости, теории пластичности и ползучести. Для численного моделирования обозначенных физических процессов использовался метод конечных элементов, результаты которого прошли многократные верификации. Для программной реализации, использовался конечно-элементный пакет ANSYS, а также пакет PANTOCRATOR, который использовался для задания различных усложненных моделей пластичности и ползучести. Данные пакеты были апробированы на различных модельных задачах и их применимость для моделирования физических процессов обоснована.

Проблема данного исследования освещена в статьях Коффина Л.Ф., Мэнсона С.С., Гецова Л.Б., Голубовского Е.Р., Ножницкого Ю.А., Колотникова М.Е., Семенова А.С., Добиной Н.И., Семенова С.Г., Тихомировой Е.А., Сидохина Е.Ф. [9-17], а также в таких книгах как «Термическая усталость металлов» Р.А. Дульнева и П.И. Котова, «Жаропрочность никелевых сплавов» Каблова Е.Н. и Голубовского Е.Р., «Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов» Шалина Р.Е. и Светлова И.Л., «Материалы и прочность деталей газовых турбин» Гецова Л.Б., «Термическая усталость металлов в судовом машиностроении» Баландина Ю.Ф. [1-5] и немного в книге Павлова П.А. «Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность» [18]. Из иностранной

литературы по данной тематике можно назвать, например, Ф. Вильгельма, Дж. Канесунда, А. Пине и Р.А. Клаудио [19-22].

В статье Коффина Л.Ф. [9] впервые предложена формула для определения числа циклов до разрушения при термической усталости через размах пластических деформаций в цикле при испытаниях на циклическую усталость (формула Коффина-Мэнсона).

В статье Мэнсона С.С. [10] также отмечается зависимость усталостной прочности от уровня накопленной пластической деформации, а также зависимость усталостной прочности от развития трещин в материале, предложены различные простые критерии для определения числа циклов до разрушения материала.

В статье Ножницкого Ю.А. и Голубовского Е.Р. [11] рассказывается об особенностях жаропрочных монокристаллических сплавов и состоянии производства монокристаллических лопаток. Также в этой статье перечислен ряд требований, которым должны удовлетворять турбинные лопатки из монокристаллических материалов. В другой статье Голубовского Е.Р. [12] есть исследования малоциклового и термической усталости сплава ЖС6Ф для разных КГО, но нет сравнения с данными, полученные путем конечно-элементного моделирования.

В статье Колотникова М.Е. [13] рассмотрены особенности формирования монокристаллических отливок сплава ВЖМ5 и основные характеристики прочности по сравнению со сплавом ЖС32. Сформулированы требования к данным отливкам с точки зрения прочности и металловедения, приведены сравнительные характеристики прочности ВЖМ5 и CMSX-4.

В статье Семенова А.С. и Гецова Л.Б. [7] рассматривается критерий линейного суммирования повреждений Л.Б. Гецова (где есть сравнение с расчетными данными для сплава ЖС36) и сделано обобщение критерия на случай монокристалла. В статье Гецова Л.Б., Семенова А.С. и Добиной Н.И.

[14] описываются испытания на установке НПО ЦКТИ на термическую усталость для различных КГО монокристаллического сплава, выявлено, что повышение максимальной температуры в цикле и размаха температур в цикле монотонно снижают долговечность сплава, но сравнения с расчетными данными по термоусталостной прочности сплава там нет. В статье Семенова А.С., Гецова Л.Б. и Семенова С.Г. [15] также упоминается деформационный критерий для определения термоусталостной долговечности и упоминается про сравнение эксперимента с результатами конечно-элементного моделирования для сплавов ВЖМ4, ВИНЗ и ЖС36, что нам важно.

В статье Тихомировой Е.А., Азизова Т.Н. и Сидохина Е.Ф. [16] можно увидеть описание установки для исследования термической усталости на корсетных образцах, похожее на то, что разработано в НПО ЦКТИ. Также в статье Тихомировой Е.А. и Сидохина Е.Ф. [17] можно найти данные об экспериментальном исследовании влияния максимальной температуры в цикле на долговечность сплава (уменьшение долговечности), но сравнения с расчетными данными нет.

В книге Дульнева Р.А. и Котова П.И. [5] подробно говорится о различных спецификах термоциклического нагружения, важных факторах в формировании предельных повреждений при таком виде нагружения как размах упругопластической деформации и длительность термического цикла, про развитие термоусталостных трещин в различных деталях, описывается важность изучения влияния выдержки при максимальной температуре. В дальнейшем описываются различные методики проведения эксперимента и оборудование для него, а также про типы образцов для испытаний на термическую усталость, как в книге Л.Б. Гецова [3]. Также в книге приведены зависимости долговечности различных сплавов в зависимости от максимальной температуры в цикле. Что важно для нашего исследования, даны кривые зависимости долговечности сплавов в зависимости от времени выдержки при максимальной температуре для сплавов ЖС6К и ХН77ТЮР,

дано уравнение для определения числа циклов до разрушения с учетом выдержки. Также даны кривые зависимости долговечности для различных сплавов в зависимости от длительности цикла и теоретическая зависимость для нее же. В книге дается указание, что при введении времени выдержки разрушение приобретает статический характер, при этом разрушение происходит по границам зерен, что подтверждается и книгой Светлова И.Л.. Также в книге указаны основные уравнения и зависимости для определения долговечности сплава через различные механические параметры, такие как уравнение Коффина-Мэнсона, Биргера И.А., гипотеза линейного суммирования статического и циклического повреждений, сформулирован общий критерий термоусталостной прочности, деформационно-кинетический критерий и т.д. Упоминается также и критерий линейного суммирования повреждений от деформаций пластичности и ползучести, состоящий из 4 слагаемых – критерий Л.Б. Гецова. Данная работа продолжает тенденцию этой книги, но на монокристаллические и поликристаллические сплавы на никелевой основе путем конечно-элементного моделирования и сравнения с экспериментом.

В книге Каблова Е.Н. и Голубовского Е.Р. [2] описаны законы ползучести (закон Аррениуса), зависимости времени разрушения от структурных параметров материала (период колебаний атомов, энергия активации разрушения и т.д.). В ней сделана попытка описать определяющими уравнениями зависимость времени разрушения от температуры, напряжения и других факторов. Главное достоинство книги – дана методика оценки различных коэффициентов и характеристик жаропрочности на основе статистической обработки экспериментальных данных. Однако экспериментальные и расчетные данные по термоусталостной прочности в ней практически отсутствуют.

В книге Шалина Р.Е. и Светлова И.Л. [1] достаточно подробно рассказывается о структуре монокристаллов никелевых сплавов, об их

упрочнении, о различных способах получения; по термической усталости есть только экспериментальные данные по влиянию времени выдержки для разных кристаллографических ориентаций (КГО) сплава ЖС6Ф. Сравнения с результатами численного моделирования в ней нет.

В книге Гецова Л.Б. [3] проводится анализ различных факторов нагружения на части горячего тракта ГТД, рассказывается о наиболее термонапряженных деталях (рабочие лопатки), про наиболее характерные повреждения деталей (в том числе и термоусталостные трещины в лопатках), про требования к различным деталям ГТД. Нам интересно в этой книге то, что в ней подробно рассказывается о видах образцов для испытаний на термическую усталость, а также про испытания плоских (корсетных образцов) на установке типа Коффина и на установке, разработанной в НПО ЦКТИ [3], про которые и пойдет речь в данной работе. Также в этой книге можно увидеть теоретическую приближенную формулу для оценки времени циклов при термоусталостных испытаниях в зависимости от упругих свойств материала и свойств ползучести [3]. В этой книге также рассказывается про различные критерии для оценки числа циклов до разрушения или развития магистральной трещины, в том числе и про критерий линейного суммирования повреждений Л.Б. Гецова, которым автор диссертации будет пользоваться в данной работе. На данную книгу автор опирался при написании своей работы.

В книге Баландина Ю.Ф. [4] приводятся и анализируются экспериментальные данные по термической усталости некоторых сплавов, что важно, а также анализируются некоторые возможности расчета конструкций на прочность при циклическом действии термических напряжений.

Подытоживая все предыдущие исследования, можно сказать, что на данный момент известно сравнительно немного работ по сравнению полученных экспериментально и с помощью конечно-элементного

моделирования значений термоусталостной прочности монокристаллических и поликристаллических сплавов, особенно мало работ по исследованию влияния времени выдержки, с чем в данной работе мы попробуем разобраться.

Апробация результатов: основные положения работы докладывались на следующих конференциях:

1. XLVI научно-практическая конференция с международным участием «Неделя науки». Санкт-Петербург, 13-19 ноября 2017 г.
2. XXVII Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Основы статического и динамического разрушения» МКМ 2017. Санкт-Петербург, 25 - 27 сентября 2017г.

По теме магистерской диссертации опубликовано 3 статьи [23,24,25].

Автор выражает признательность профессору Л.Б. Гецову за предоставленные экспериментальные данные по термоусталостной прочности сплавов, распределению температур вдоль образца и предоставленные свойства всех исследуемых сплавов и за важные замечания в области материаловедения. Также несомненно хочется поблагодарить моего научного руководителя, доцента А.С. Семенова, за совместное решение возникающих проблем в ходе работы и его высокий профессионализм в области вычислительной механики и теории связанных полей из различных областей физики, а также аспиранта А.И. Грищенко за важные замечания при проведении термопластических расчетов в решении контактной задачи.

2. Основные уравнения описания термоэлектромеханического поведения сплошной среды

2.1. Основные уравнения термоэлектромеханики

Локальная форма определяющих уравнений связанной нестационарной термоэлектромеханической задачи включает уравнение теплопроводности (2.1), получающееся из баланса энергии и закона Фурье, уравнение Максвелла (2.2), которое для проводящего материала упрощается к закону сохранения заряда и уравнение Ламэ-Навье:

$$\rho(T)C_p(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot [\lambda(T)\nabla T] = q_v, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot [\sigma(T)\nabla \varphi] = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \left\{ {}^4C(T) \cdot \left[(\nabla \mathbf{u})^S - \boldsymbol{\alpha}(T)\Delta T - \boldsymbol{\varepsilon}^{in} \right] \right\} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

В этих уравнениях T обозначает температуру, φ – скалярный электрический потенциал (для электрического поля напряженность \mathbf{E} определяется через φ : $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), \mathbf{u} – вектор перемещений, t – время, ∇ – оператор набла, ρ – плотность, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, λ – коэффициент теплопроводности, σ – удельная электрическая проводимость ($\sigma = \frac{1}{\rho_e}$, где ρ_e – удельное электрическое сопротивление). Также \mathbf{j} и ρ_e связывает закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\rho_e}$, где \mathbf{j} – плотность электрического тока, $q_v = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 1/\rho_e \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi$ – Джоулево тепло, выделяемое в единицу площади и в единицу времени.

$\boldsymbol{\alpha}(T) = \alpha(T) \mathbf{1}$ – тензор коэффициентов линейного расширения в случае изотропного материала, $\alpha(T)$ – коэффициент линейного расширения, $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$ – тензор неупругих деформаций, который может представлять пластическую деформацию или вязкопластическую деформацию, ${}^4C(T)$ – тензор упругих модулей 4 ранга, который в случае изотропного материала принимает вид:

$${}^4C = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\mathbf{1} \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}), \text{ где } E - \text{модуль Юнга, } \nu - \text{коэффициент}$$

Пуассона, $\mathbf{1}$ - единичный тензор. Символ « \otimes » означает скалярное произведение, символ « $\bar{\otimes}$ » - двойное скалярное произведение, $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$ - прямое тензорное умножение, и $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}$, $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il}B_{jk}$ - не прямое тензорное умножение.

Виды тепловых граничных условий:

1. $T(\mathbf{r},t)|_S = T_S(\mathbf{r},t)$, где \mathbf{r} - радиус-вектор, S - граница тела, на которой задается граничное условие - условие Дирихле, условие 1 рода.
2. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_S = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \nabla T|_S = q_S(\mathbf{r},t)$, где \mathbf{n} - вектор нормали к поверхности S , \mathbf{q} - вектор теплового потока, $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ - тензор коэффициентов теплопроводности - условия Неймана (обеспечивает симметричное распределение температуры относительно границы, на которой задана температура), условие 2 рода.
3. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_S = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \nabla T|_S = h(\mathbf{r},t)(T_S(\mathbf{r},t) - T_\infty(\mathbf{r},t))$, где h - коэффициент конвективного теплообмена, $T_S(\mathbf{r},t) - T_\infty(\mathbf{r},t)$ - разность температур на границе и температуры окружающей среды, условие теплообмена по закону Ньютона, условие Коши, $[h] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ - характеризует интенсивность теплообмена на границе, условие 3 рода.
4. $-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \nabla T|_{S_1} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \nabla T|_{S_2}$, где S_1 и S_2 - контактирующие поверхности, условие 4 рода, идеальный тепловой контакт.
5. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_S = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \nabla T|_S = \sigma_0 \varepsilon (T|_S(\mathbf{r},t)^4 - T|_\infty(\mathbf{r},t)^4)$, где $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$, ε - степень черноты тела, степень поглощения тепла.

Виды электрических граничных условий(без рассмотрения магнитных полей):

1. $\varphi(\mathbf{r},t)|_S = \varphi_S(\mathbf{r},t)$, где φ - электрический потенциал, условие Дирихле.
2. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_S = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi|_S = j_S(\mathbf{r},t)$, где \mathbf{j} - вектор плотности электрического тока, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ - тензор удельной проводимости материала, величина, обратная тензору удельных сопротивлений, условие Неймана.

3. - $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi|_{S_1} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi|_{S_2}$, где S_1 и S_2 – контактирующие поверхности, условие 4 рода, идеальный электрический контакт.

Виды механических граничных условий:

1. $u(\mathbf{r}, t)|_S = u_s(\mathbf{r}, t)$ – кинематическое граничное условие.
2. $\mathbf{n} \cdot ({}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla u - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_T))|_S = \mathbf{f}_s(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{f}_s(\mathbf{r}, t)$ – внешние силы, заданные на поверхности – силовое граничное условие.
3. Смешанные ГУ (комбинация предыдущих 2-х).

2.2. Модели деформирования вязкоупругопластического материала

При условии малости деформаций, вводится аддитивное разложение полной деформации:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T, \quad (2.4)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ – тензор упругих деформаций, по которой вычисляется напряжение по закону Гука: $\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ – тензор упругих деформаций, ${}^4\mathbf{C}$ – тензор упругих модулей 4 ранга, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ – тензор деформаций ползучести, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ – тензор пластических деформаций, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T = \boldsymbol{\alpha} \Delta T$ – тензор тепловых деформаций, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{1}$ – тензор коэффициентов линейного температурного расширения, $\Delta T = T - T_0$ – разность температур. В реологических моделях есть 2 основные для моделирования вязкости (ползучести): элемент с линейной вязкостью и нелинейной вязкостью (см. рис. 2.1).

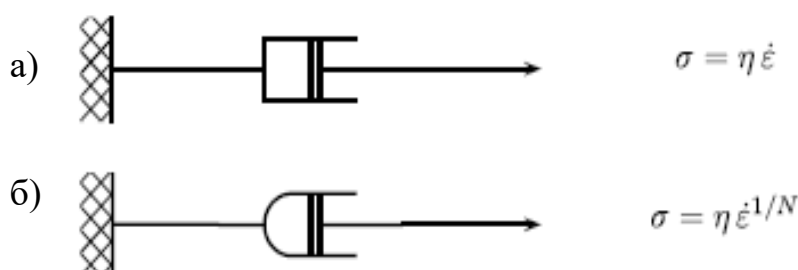


Рис. 2.1. Реологический элемент с а) Линейной вязкостью, б)- нелинейной вязкостью.

На этом рисунке η – коэффициент вязкости, $\dot{\epsilon}$ – скорость деформации, то есть, эти элементы чувствительны к скорости нагружения.

2 равенство: $\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{\frac{1}{n}}$, где n – некоторый коэффициент. Возведем обе части равенства в степень n и разделим все равенство на η : $\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma^n = A \sigma^n$, (2.5)

что и означает закон Нортона для скорости деформации ползучести, перепишем: $\dot{\epsilon}_c = A \sigma^n$ – закон нелинейной ползучести, который использовался при расчетах, A и n – константы материала. В PANTOCRATOR реализован обобщенный закон Нортона: $\dot{\epsilon}_c = A \sigma^n \epsilon_c^m$, (2.6)

где A, n, m – константы материала. Это равенство вытекает из закона $\epsilon_c = A_1 \sigma^{n_1} t^{m_1}$. Это выражение – в рамках феноменологических теорий

упрочнения: $\dot{\epsilon}_c = m_1 A_1 \frac{1}{m_1} \sigma^{\frac{n_1}{m_1}} \epsilon_c^{1 - \frac{1}{m_1}}$ (2.7)

и течения: $\dot{\epsilon}_c = m_1 A_1 \sigma^{n_1} t^{m_1 - 1}$ (2.8)

Обобщенная модель Нортона переходит в простую модель Нортона при $m=0$.

2.2.1. Определяющие уравнения неупругого деформирования для монокристаллических материалов

В реальном монокристалле и поликристалле, который состоит из монокристаллов – кристаллическая решетка из атомов. С точки зрения кристаллографии, неупругое поведение материала (пластичность, ползучесть) – движение одних атомов относительно других вдоль некоторой плоскости, образование дислокации (скольжение), один из видов плоских дефектов в кристаллической решетке (физические теории пластичности и ползучести).

Так происходит движение дислокации (см. рис. 2.2) :

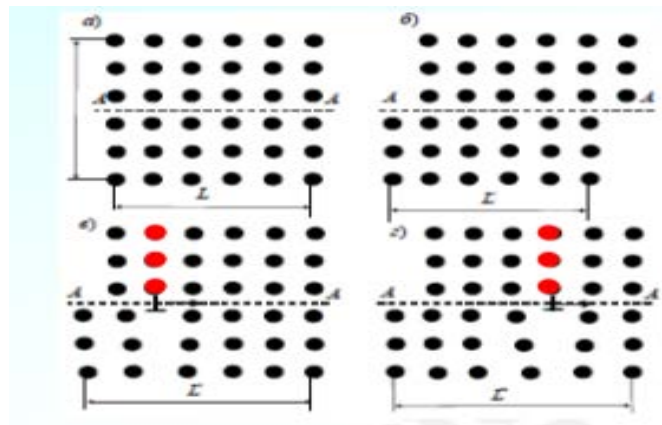


Рис. 2.2. Движение дислокации

При движении дислокации есть плоскость, в которой она движется и направление, в котором она движется. Система скольжения – плоскость, в которой происходит скольжение и направление скольжения. На рис. 2.3 показан пример системы скольжения пунктиром в объемной кристаллической решетке.

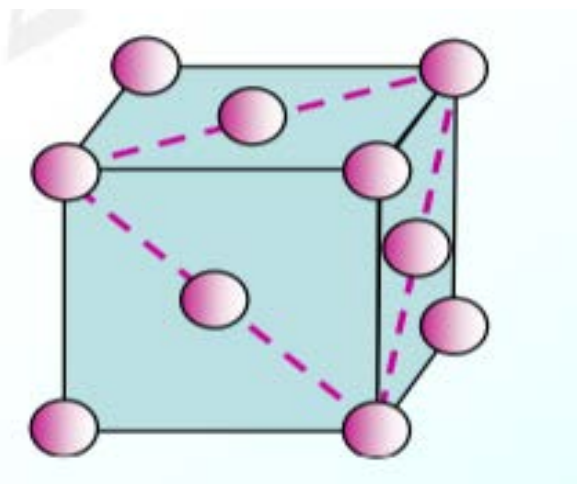


Рис. 2.3. Пример системы скольжения

Системы скольжения бывают октаэдрические или кубические, то есть, плоскость скольжения может быть гранью октаэдра или куба, если рассмотреть элементарный объем кристаллической решетки в виде куба (рис.2.4).

а)



б)



Рис. 2.4. а) Октаэдрические системы скольжения,

б) Кубические системы скольжения

Соответственно октаэдрических систем скольжения 12, кубических -6.

Предполагается, что процесс неупругого деформирования монокристалла осуществляется в результате возможного скольжения в N системах скольжения, последние характеризуются нормалью n_α к α -й плоскости скольжения и направлением скольжения l_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) [26] (рис. 2.5).

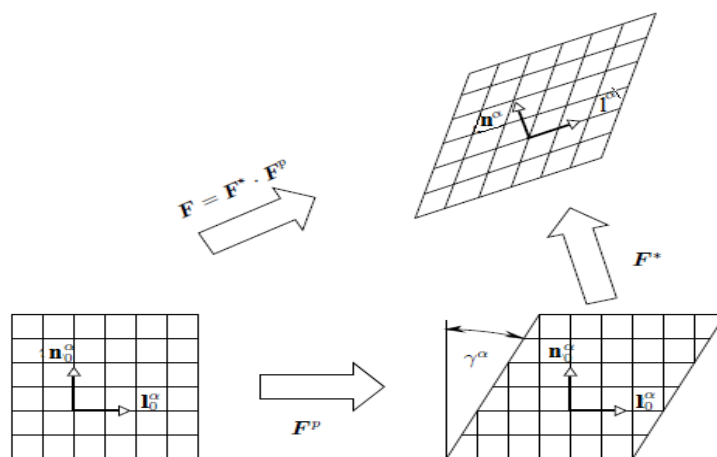


Рис. 2.5. Нормаль и касательная к плоскости скольжения при упругопластическом деформировании

На рисунке F^* - градиент деформации, соответствующий упругому деформированию, F^p – градиент деформации, соответствующий пластическому деформированию. По закону Шмида, система скольжения

становится активной, и в ней начинается неупругое деформирования при достижении приведенных касательных напряжений τ_α начального критического значения τ_0 , которое не зависит от ориентации кристалла – характеристика материала. Дальнейшее описание вязко-упруго-пластической модели идет на основе книги [27], подробное ее описание можно найти там, а также в книге П.В. Трусова [28], идет описание физической модели неупругого деформирования.

При этом скорость изменения критических касательных напряжений вычисляется суммированием по плоскостям скольжения:

$$\dot{\tau}_c^g = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_\alpha H_{g\alpha}, \quad (2.9)$$

где $\dot{\tau}_c^g$ – материальная производная по времени от критического напряжения сдвига системы скольжения g , $\dot{\gamma}_\alpha$ – скорости сдвига в системах скольжения, $H_{g\alpha}$ – модули упрочнения, описывающие взаимодействие различных систем скольжения. В недеформированном состоянии $\tau_c = \tau_0$.

Соотношение для $H_{g\alpha}$: $H_{g\alpha} = qh + (1-q) \cdot h \delta_{g\alpha}$, где q определяет отношение латентного упрочнения (увеличение критического напряжения сдвига в активных системах скольжения) к деформационному, h – параметр, характеризующий деформационное упрочнение (упрочнение из-за накопленных пластических деформаций или увеличение критического напряжения сдвига в активных системах скольжения при деформировании), $\delta_{g\alpha}$ – символ Кронекера.

Приведенные касательные напряжения τ_α действуют на плоскости скольжения α с нормалью n_α и касательной l_α и связаны с тензором напряжений Коши σ линейным соотношением:

$$\tau_\alpha = n_\alpha \cdot \sigma \cdot l_\alpha \quad (2.10)$$

Вводится так называемый тензор Шмида: $\mathbf{P}_\alpha = \frac{1}{2} (\vec{l}_\alpha \vec{n}_\alpha + \vec{n}_\alpha \vec{l}_\alpha)$ (2.11)

Отсюда следует:
$$\tau_{\alpha} = P_{\alpha} \cdot \sigma \quad (2.12)$$

Если обозначить скорости сдвига в различных системах скольжения как $\dot{\gamma}_{\alpha}$, то скорость неупругой деформации будет равна:

$$\dot{\epsilon}_{in} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_{\alpha} P_{\alpha} \text{ или } \dot{\epsilon}_{in} = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_{\alpha} P_{\alpha} \quad (2.13)$$

В случае ползучести: $\dot{\epsilon}_c = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_{\alpha} P_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, 12$, так как 12 октаэдрических систем скольжения, N – количество монокристаллов в поликристалле, обобщенный закон Нортона в рамках феноменологической теории течения переписывается как:

$$\dot{\gamma}_{\alpha} = A_0 \cdot |\tau_{\alpha}^{n_0}| \cdot (\text{sign} \tau_{\alpha}) \cdot \dot{\gamma}_{\alpha}^{m_0}, \quad (2.14)$$

где $\text{sign}(x)$ - функция, зависящая от знака числа x. При определении скорости ползучести при промежуточных температурах использовался закон Аррениуса:

$\dot{\epsilon}_c \sim \exp(-\frac{Q}{RT})$, где Q – так называемая энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, T – температура в К. То есть, для температурных интервалов, где скорость ползучести была неизвестной, она интерполировалась экспоненциальной зависимостью с неизвестными константами, которые определялись на основе известных данных.

Для введения критерия в случае 3-мерного пластического деформирования использую поверхность текучести: $f(\sigma) = J(\sigma) - \sigma_y = 0$, где σ_y - предел текучести, $J(\sigma)$ – вычисляемая интенсивность пластических деформаций по Мизесу, $J(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s \cdot s}$, s – девиатор тензора напряжений Коши. Если $f(\sigma) = 0$ и $\dot{f}(\sigma) = 0$, то началось пластическое деформирование материала или монокристалла.

Для введения кинематического и изотропного упрочнения вводят тензор \mathbf{X} и скаляр R : $f(\sigma, \mathbf{X}, R) = J(\sigma - \mathbf{X}) - R - \sigma_y$ [27], R – характеризует увеличение радиуса поверхности текучести, то есть сопротивление деформированию и при сжатии и при растяжении, если рассматривать одномерный случай, тензор \mathbf{X} – характеризует перемещение центра поверхности текучести в пространстве главных напряжений. \mathbf{X} и R являются функциями скорости пластической деформации:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - D \mathbf{X} \dot{p} \\ \dot{R} = b(Q - R)\dot{p}, \text{ где } R = Q(1 - \exp(-bp)), \end{cases} \quad (2.15)$$

где b и Q – константы материала, отвечающие за изотропное упрочнение, C и D – отвечают за кинематическое упрочнение, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ – скорость пластической деформации, p – накопленная пластическая деформация, чья скорость равна скорости пластической деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$, для одномерного случая: $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p| = \dot{p}$.

Строгая связь между ними: $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}$. Если все переписать с учетом N активных плоскостей скольжения:

$$f_\alpha = J(\mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} - X_\alpha) - R_\alpha - \tau_0, \quad \dot{X}_\alpha = \frac{2}{3} C \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_\alpha \mathbf{P}_\alpha - D X_\alpha \dot{p}, \quad (2.16)$$

$\dot{R}_\alpha = b(Q - R_\alpha)\dot{p}$, где $R_\alpha = Q(1 - \exp(-bp))$, τ_0 – критическое касательное напряжение, α – номер октаэдрической или кубической системы скольжения. При этом пластическая деформация опять получается суммированием по всем плоскостям скольжения: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_\alpha \mathbf{P}_\alpha$ или $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}_\alpha \mathbf{P}_\alpha$.

Если все это применить к одномерному случаю растяжения вдоль 1 оси, то получится: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_y + Q(1 - \exp(-b\boldsymbol{\varepsilon}_p)) + \frac{c}{D}(1 - \exp(-D\boldsymbol{\varepsilon}_p))$, (2.17)

что называется моделью Каето.

2.2.2. Определяющие уравнения неупругого деформирования для поликристаллических материалов

В случае поликристаллического сплава ЧС70 использовался обобщенный закон Нортона:

$$\varepsilon_c = A\sigma^n t^m, \quad (2.18)$$

где A , n и m - константы сплава, в рамках феноменологической теории упрочнения: $\dot{\varepsilon}_c = mA^{\frac{1}{m}}\sigma^{\frac{n}{m}}\varepsilon_c^{1-\frac{1}{m}}$, выражение получается путем дифференцирования выражения (5.15) по времени.

Для описания свойств пластичности использовалась теория течения, в которой для описания начала текучести используется критерия Мизеса. Определяющее соотношение для пластической деформации в теории течения:

$$d\varepsilon_p = d \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad (2.19)$$

где $d\varepsilon_p$ -тензор приращений пластических деформаций, $d\lambda$ - пластический множитель, $d\lambda \geq 0$, $f(\sigma)$ - иначе - пластический потенциал, который в данном случае задается как интенсивность напряжений по Мизесу, σ - тензор напряжений Коши. Так как исследуется процесс циклического растяжения-сжатия материала, задавалось чисто кинематическое упрочнение материала.

Уравнения эволюции упрочнения имеют вид: $k = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_p \cdot d\varepsilon_p}$, (2.20)

где k - параметр Одквиста, отвечающий за изотропное упрочнение, а также:

$$d\rho = c d\varepsilon_p, \quad (2.21)$$

где ρ - тензор микронапряжений, параметр, отвечающий за кинематическое упрочнение, c - константа материала. Теория одинакова для любого масштаба времени (склерономность). Принимается разложение полной деформации на упругую и пластическую составляющие: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ (2.22)

2.3. Модели накопления повреждений при термической усталости

Процесс накопления поврежденности сплавов при термоциклическом нагружении включает себя несколько процессов: зарождение и развитие микротрещин, накопление необратимых деформаций и распространение магистральной трещины вплоть до разрушения образца. Поэтому разработаны различные критерии по оценке условия разрушения материала: силового, деформационного, энергетического и временного типа. В данной работе расчет поврежденности и оценка числа циклов до образования макротрещины производился на основе деформационного четырехчленного критерия Л.Б. Гецова линейного суммирования повреждений:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^p)^k}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^c)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)}, \quad (2.23)$$

где первый член учитывает изменение пластической деформации в пределах цикла, второй член – изменение деформации ползучести в пределах цикла, третий член – односторонне накопленную пластическую деформацию (рэтчеттинг), четвертый член – односторонне накопленную деформацию ползучести. Число циклов до образования макротрещины N определяется из условия $D = 1$, где D – параметр поврежденности материала, $0 \leq D \leq 1$, $D=0$ соответствует материалу без повреждений, $D=1$ – полностью разрушившийся материал, исчерпавший весь запас прочности.

В уравнении (2.23) C_1 , C_2 , k , m , ε_r^p , ε_r^c – параметры материала, зависящие от температуры и кристаллографической ориентации (КГО). Обычно принимают соотношения: $k = 2$, $m = \frac{5}{4}$, $C_1 = (\varepsilon_r^p)^k$, $C_2 = (\frac{3}{4} \varepsilon_r^c)^m$, где ε_r^p and ε_r^c – предельные деформации пластичности и ползучести при одноосном растяжении [7]. В качестве эквивалентной деформации ε_{eq_i} рассматривалась:

а) В случае монокристалла - максимальная сдвиговая деформация в системе скольжения с нормалью к плоскости скольжения n и направлением скольжения l :

$$\varepsilon_{eqi} = n \cdot \varepsilon \cdot l, \quad (2.24)$$

где ε – тензор деформаций.

б) В случае поликристалла – интенсивность деформаций по Мизесу:

$$\varepsilon_{eqi} = \sqrt{\frac{2}{9}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}, \quad (2.25)$$

где ε_i – осевые деформации, γ_{ij} – сдвиговые деформации. Как показывают исследования, критерий хорошо работает, если в исследуемом интервале температур нет фазового перехода монокристаллического или поликристаллического сплава.

3. Модельные задачи стационарного и динамического нагрева электрическим током

Как уже упоминалось раньше, для исследования термоусталостной прочности в широком интервалом температур с учетом влияния выдержки и без нее в НПО ЦКТИ разработана экспериментальная установка. Корсетный образец периодически нагревается и охлаждается электрическим током. Поэтому представляется интересным смоделировать нагрев образца, но для начала решим модельную аналогичную задачу, имеющую аналитическое решение.

3.1. Постановка электростатической задачи

Рассматривается параллелепипед толщиной в 3 мм, шириной 10 мм и длиной 32.5 мм. На 2 гранях задаются потенциалы 0В и 0.1В соответственно, на остальных гранях задается условие отсутствия электрического тока (см. рис.3.1).

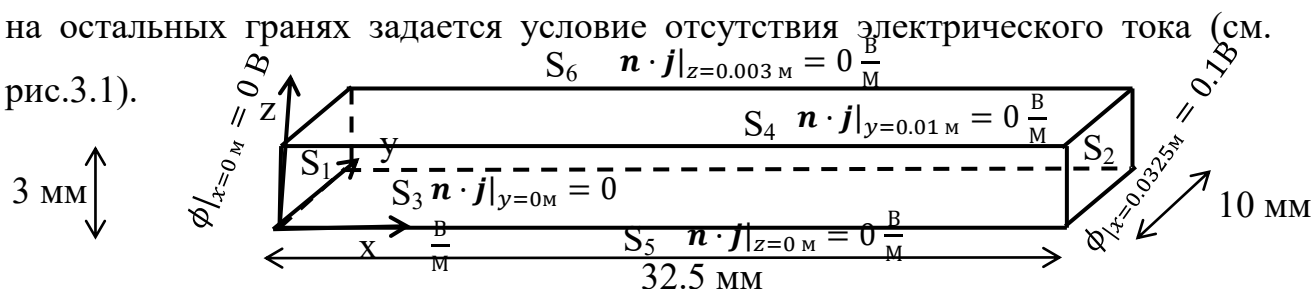


Рис. 3.1.Граничные условия задачи

На рисунке обозначено: \mathbf{n} –вектор нормали, \mathbf{j} –вектор плотности электрического тока. Электрические граничные условия не меняются во времени, постоянны, поэтому пишем уравнение электростатики проводников: $\nabla(\sigma(T)\nabla\phi) = 0$, где ϕ – потенциал электрического поля, $\sigma(T)$ –удельная проводимость материала, в общем случае зависящая от температуры, ∇ – оператор набла. Так как в рассматриваемом случае мы будем считать удельную проводимость и вместе с ней удельное сопротивление постоянным, то уравнение электростатики проводников переписывается как уравнение Лапласа: $\Delta\phi = 0$ [29]. Перепишем ГУ: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \mathbf{n} \cdot \frac{\nabla\phi}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial n} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$, то есть наше граничное условие упростилось и выразилось через ϕ .

Таблица 3.1. Граничные условия в электростатической задаче.

По оси x	По оси y	По оси z
Грань S ₁ : $\phi _{x=0\text{м}} = 0\text{В}$	Грань S ₃ : $\frac{\partial\phi}{\partial n} _{y=0\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}}$	Грань S ₅ : $\frac{\partial\phi}{\partial n} _{z=0\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}}$
Грань S ₂ : $\phi _{x=0.0325\text{м}} = 0.1\text{В}$	Грань S ₄ : $\frac{\partial\phi}{\partial n} _{y=0.01\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}}$	Грань S ₆ : $\frac{\partial\phi}{\partial n} _{z=0.003\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}}$

Таким образом, ставится задача найти скалярное поле $\phi(x,y,z)$ удовлетворяющее уравнению Лапласа $\Delta\phi = 0$ и граничным условиям:

$$\phi|_{x=0\text{м}} = 0\text{В} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=0\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial z}|_{z=0\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}} \quad (3.1)$$

$$\phi|_{x=0.0325\text{м}} = 0.1\text{В} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=0.01\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial z}|_{z=0.003\text{м}} = 0 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

3.2. Аналитическое решение электростатической задачи

Для ускорения решения будем решать в предположении, что $\phi = \phi(x,y)$, доказательство, что потенциал ϕ не зависит от z , проводится также, как и доказательство, что потенциал не зависит от y , которое будет дано ниже.

Уравнение Лапласа: $\Delta\phi = 0$, в декартовых координатах уравнение переписывается: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$. По методу Фурье [29] (разделение переменных)

ищем решение в виде: $\phi = X(x) \cdot Y(y)$ и подставляем в уравнение: $Y \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + X \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{XY}$;

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\lambda^2. \text{ Так как функция от } x \text{ равна функции от } y, \text{ мы их обе}$$

приравняем к константе, как и говорит метод Фурье. Уравнение распадается на 2 уравнения:

$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$ $\frac{dY}{dy} _{y=0} = 0$ $\frac{dY}{dy} _{y=0.01} = 0$	<p>Подставляем в уравнение для функции X $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = 0$ (*)</p> <p>При ГУ: $X _{x=0} = 0$ $X _{x=0.0325} = 0.1$</p>
--	--

<p>Ищем решение в виде: $Y=Ash\lambda y+Bch\lambda y$</p> <p>Вычисляем производную:</p> $\frac{dY}{dy} = \lambda Ach\lambda y + \lambda Bsh\lambda y;$ <p>Так как Y зависит только от y производные, обозначим штрихом для сокращения записи: $Y' _{y=0}=0 \Rightarrow A=0;$</p> <p>2 ГУ: $Y' _{y=0.01}=0 \Rightarrow \lambda Bsh(\lambda*0.01)=0;$</p> <p>Отсюда следует, что $\lambda=0 \Rightarrow Y=B=const$</p> <p>Примем значение $Y=1;$</p>	<p>Решение уравнения (*):</p> $X = C*x + D; X _{x=0} = 0 \Rightarrow D=0$ $X _{x=0.0325} = X _{x=l} = 0.1 \Rightarrow 0.1=C*l;$ <p>Отсюда следует, что $C = \frac{0.1}{l};$</p> <p>Отсюда решение для функции:</p> $X = \frac{0.1}{l} * x;$
---	--

Отсюда общее решение для потенциала: $\varphi = \frac{0.1}{l} * x$, можно увидеть сразу, что граничным условиям по переменной z он тоже удовлетворяет, значит, искомая функция найдена и задача решена. Из этого решения можно найти, каково объемное тепловыделение в тепловой задаче:

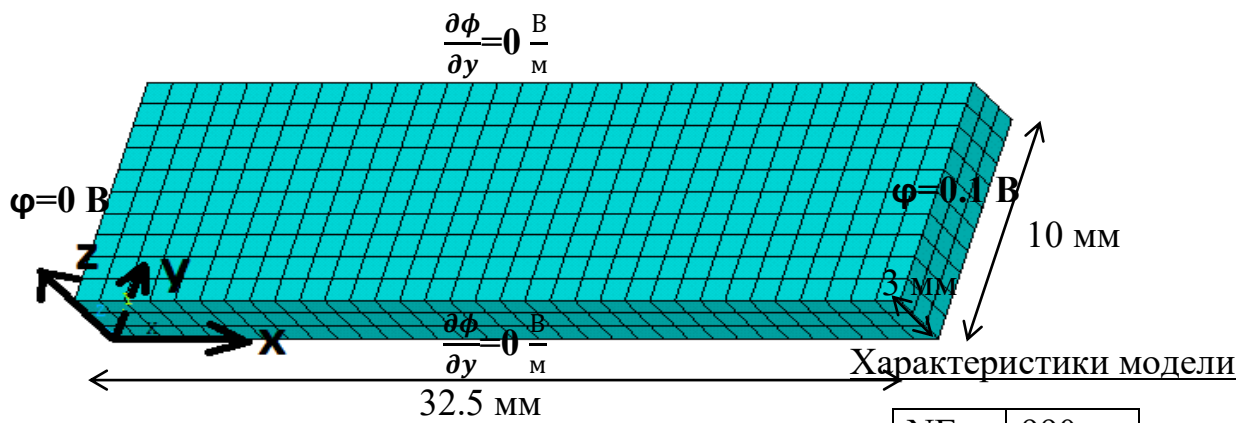
$$\nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{0.1}{l} = \frac{\Delta\varphi}{l}, \Delta\varphi - \text{разность потенциалов. Плотность тока: } j = \frac{\Delta\varphi}{\rho_e l}, \text{ где}$$

ρ_e – удельное электрическое сопротивление. Отсюда находим плотность объемного тепловыделения: $q_V = \rho_e j^2 = \frac{\Delta\varphi^2}{\rho_e l^2}.$

3.3. Конечно-элементное решение электростатической задачи

Задача моделировалась в программном конечно-элементном комплексе ANSYS в 3D- постановке. Задача решалась в статическом варианте, для ¼ модели. Для моделирования процесса электрического нагрева выбирался объемный, квадратичный 20-узловой конечный элемент SOLID226. Разбиение проводилось регулярное гексагональными элементами из-за удобной формы геометрической модели и для лучшей точности решения.

На рис.3.2 приведена конечно-элементная модель с электрическими ГУ, так как нас интересует пока распределение электрического потенциала.



NE	990
NN	5430
DOF	16290

Рис. 3.2. Конечно-элементная модель

Свойства материала задавались уже для решения тепловой задачи, поэтому в данной задаче они нас не интересуют. На рис.3.3 показано сравнение потенциала вдоль оси x в аналитическом и конечно-элементном решениях и цветное распределение потенциала.

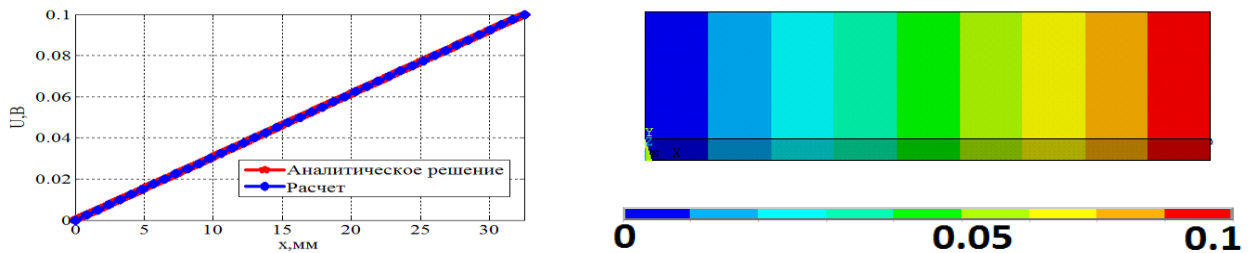


Рис. 3.3. Сравнение аналитического решения и численного, распределение потенциала, В

Из сравнения решений видно, что конечно-элементное решение наложилось на аналитическое, что говорит о правильном моделировании электростатической задачи.

3.4. Постановка задачи стационарной теплопроводности

После решения задачи электростатики будем решать стационарную задачу теплопроводности с объемным тепловыделением. Как и ранее, $q_V = \rho_e j^2 = \frac{\Delta \phi^2}{\rho_e l^2}$. Опять же рассматривается параллелепипед толщиной в 3 мм, шириной 10 мм и длиной 32.5 мм. Задача решается для $\frac{1}{4}$ модели, на плоскости zu и xz задается условие симметрии, то есть равенство теплового потока 0. На 2 грани при $x=1$ задается фиксированная температура в 650 °С. На

остальных гранях также задается условие отсутствия теплового потока (см. рис. 3.4).

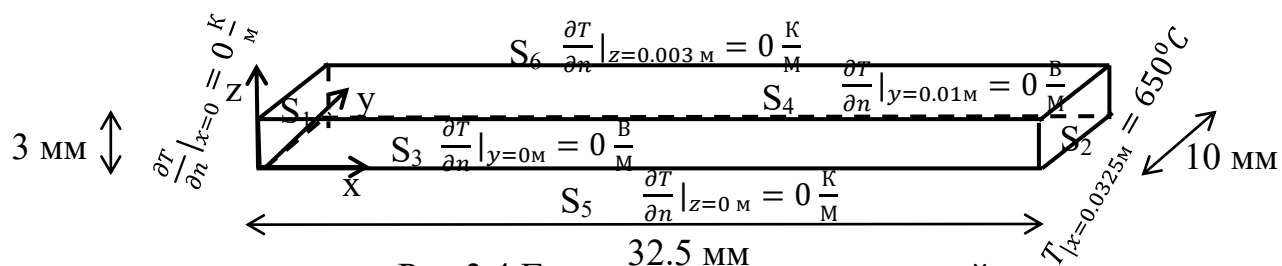


Рис.3.4.Граничные условия тепловой задачи

Уравнение стационарной теплопроводности: $\Delta T = -\frac{q_v}{\lambda}$, где T – температура, q_v – объемное тепловыделение, λ – коэффициент теплопроводности.

Таблица 3.2. Граничные условия в задаче стационарной теплопроводности.

По оси x	По оси y	По оси z
Грань S_1 : $\frac{\partial T}{\partial n} _{x=0} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S_3 : $\frac{\partial T}{\partial n} _{y=0} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S_5 : $\frac{\partial T}{\partial n} _{z=0} = 0 \frac{K}{M}$
Грань S_2 : $T _{x=0.0325} = 650^{\circ}C$	Грань S_4 : $\frac{\partial T}{\partial n} _{y=0.01} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S_6 : $\frac{\partial T}{\partial n} _{z=0.003} = 0 \frac{K}{M}$

Таким образом, ставится задача найти скалярное поле $T(x,y,z)$ удовлетворяющее уравнению $\Delta T = -\frac{q_v}{\lambda}$ и граничным условиям:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial z} |_{z=0} = 0 \frac{K}{M} \quad (3.2)$$

$$T |_{x=0.0325} = 650^{\circ}C \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0.01} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial z} |_{z=0.003} = 0 \frac{K}{M}$$

3.5. Аналитическое решение задачи стационарной теплопроводности

Для ускорения решения будем решать в предположении, что $T=T(x,y)$, доказательство, что температура T не зависит от z , проводится также, как и доказательство, что температура не зависит от y , которое будет дано ниже.

Уравнение $\Delta T = -\frac{q_v}{\lambda}$, в декартовых координатах уравнение переписывается: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{q_v}{\lambda}$. Далее будем решать уравнение согласно

обобщенному методу Фурье: представляем решение в виде сумму 2-х функций: $T = T_1(x) + T_2(x,y)$, подставляем в уравнение: $\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}}_0 = -\frac{q_v}{\lambda}$;

где $q_v = \rho_e j^2 = \frac{\Delta \phi^2}{\rho_e l^2}$;

Распишем, какие получаются граничные условия для T_1 и T_2 :

$$\frac{dT_1}{dx}(x) + \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \text{ и } \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 ;$$

$$T_1(x) + T_2(x,y) \Big|_{x=l} = 650 \Rightarrow T_1(x) \Big|_{x=l} = 650 , T_2(x,y) \Big|_{x=l} = 0 ;$$

$$\frac{\partial T_1(x)}{\partial y} + \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 ; \frac{\partial T_1(x)}{\partial y} + \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_2(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0 ;$$

Уравнение распадается на 2 относительно T_1 и T_2 :

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0 \text{ и } \frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \text{ с соответствующими граничными условиями.}$$

Для начала решим 1 уравнение относительно T_2 , потом 2 относительно T_1 .

Уравнение Лапласа: $\Delta T_2 = 0$, в декартовых координатах уравнение переписывается: $\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0$. По методу Фурье ищем решение в виде:

$$T_2 = X(x) * Y(y) \text{ и подставляем в уравнение: } Y * \frac{d^2 X}{dx^2} + X * \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Big| * \frac{1}{XY} ;$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\lambda^2. \text{ Так как функция от } x \text{ равна функции от } y, \text{ мы их обе}$$

приравниваем к константе, как и говорит метод Фурье. Уравнение распадается еще на 2 уравнения:

$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$ $\frac{dY}{dy} \Big _{y=0} = 0$ $\frac{dY}{dy} \Big _{y=0.01} = 0$ <p>Ищем решение в виде: $Y = A \sinh \lambda y + B \cosh \lambda y$</p>	<p>Подставляем в уравнение для функции X $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ (*)</p> <p>При ГУ: $X' \Big _{x=0} = 0$</p> <p style="text-align: center;">$X \Big _{x=l} = 0$</p> <p>Решение уравнения (*):</p>
--	---

<p>Вычисляем производную:</p> $\frac{dY}{dy} = \lambda A \operatorname{ch} \lambda y + \lambda B \operatorname{sh} \lambda y;$ <p>Так как Y зависит только от y производные, обозначим штрихом для сокращения записи: $Y' _{y=0}=0 \Rightarrow A=0;$</p> <p>2 ГУ: $Y' _{y=0.01}=0 \Rightarrow \lambda B \operatorname{sh}(\lambda * 0.01)=0;$</p> <p>Отсюда следует, что $\lambda=0 \Rightarrow Y=B=\operatorname{const}$</p> <p>Примем значение $Y=1;$</p>	$X = C * x + D; X' _{x=0} = 0 \Rightarrow C=0$ $X _{x=0.0325} = X _{x=l} = 0 \Rightarrow D=0;$ Отсюда решение для функции: $X = 0;$
---	--

Отсюда общее решение для функции $T_2 = 0.$

Решаем уравнение: $\frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda}$ при ГУ $\frac{dT_1}{dx} |_{x=0} = 0$ и $T_1(x) |_{x=l} = 650.$

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} * x + C; \frac{dT_1}{dx} |_{x=0} = 0 \Rightarrow C=0; T_1 = -\frac{q_v}{\lambda} * \frac{x^2}{2} + D; T_1(x) |_{x=l} = 650 \Rightarrow D = \frac{q_v}{\lambda} * \frac{l^2}{2} + 650; \Rightarrow T_1 = \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) + 650; \quad (3.3)$$

Из решения видно, что оно удовлетворяет и граничным условиям по переменной z, значит, наша задача решена!

3.6. Конечно-элементное решение задачи стационарной теплопроводности

Задача моделировалась в программном конечно-элементном комплексе ANSYS в 3D- постановке. Задача решалась в статическом варианте, для ¼ модели. Для моделирования процесса электрического нагрева выбирался объемный, квадратичный 20-узловой конечный элемент SOLID226. Разбиение проводилось регулярное гексагональными элементами из-за удобной формы геометрической модели и для лучшей точности решения.

На рис.3.5 приведена конечно-элементная модель с тепловыми ГУ, так как нас уже интересует распределение температуры.

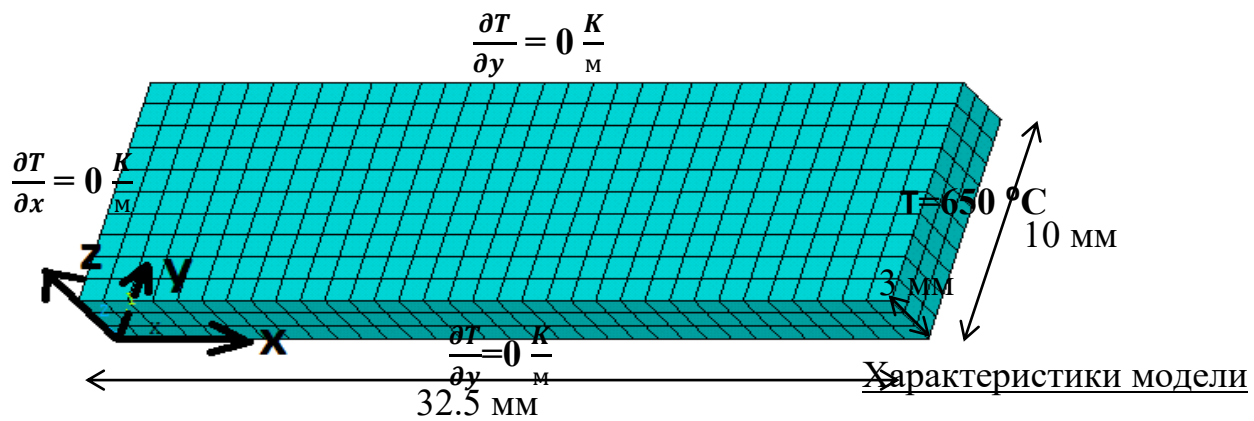


Рис. 3.5. Конечно-элементная модель

NE	990
NN	5430
DOF	16290

Свойства материала: $\lambda = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, $\rho_e = 100 * 10^{-8} \text{ Ом} * \text{м}$. На рис.3.6 показано сравнение значений температуры вдоль оси x в аналитическом и конечно-элементном решениях и распределение температуры в численном решении.

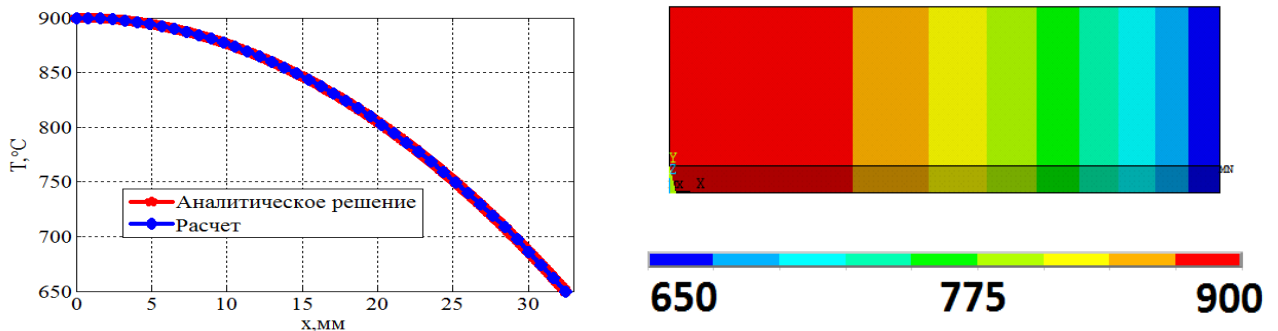


Рис. 3.6. Сравнение значений температуры вдоль оси x и распределение температуры

Из сравнения решений видно, что конечно-элементное решение наложилось на аналитическое, что говорит о правильном моделировании задачи стационарной теплопроводности.

3.7. Постановка задачи нестационарной теплопроводности

Так как у нас образец все-таки нагревается во времени, то требуется также решить задачу нестационарной теплопроводности, что интереснее. Как и в стационарной задаче, рассматривается параллелепипед толщиной в 3 мм, шириной 10 мм и длиной 32.5 мм. Задача решается для $\frac{1}{4}$ модели, на плоскости zu задается условие симметрии, то есть равенство теплового потока 0. На 2 грани при $x=1$ задается фиксированная температура в 100 °C. На остальных гранях также задается условие отсутствия теплового потока (см.

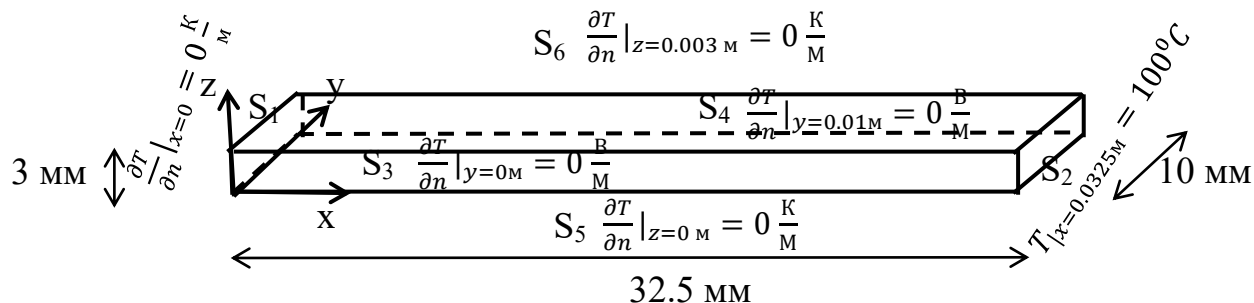


Рис. 3.7. Граничные условия нестационарной тепловой задачи

рис. 3.7). Постоянное тепловыделение задается соответствующим разности потенциалов 0.1 В. Начальная температура параллелепипеда и окружающей среды задается 20 °С. Время нагрева: 80с.

Уравнение нестационарной теплопроводности: $\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{q_v}{\lambda}$, где T – температура, q_v – объемное тепловыделение, λ – коэффициент теплопроводности, $\tau = \frac{\lambda t}{c\rho}$ – медленное время задачи теплопроводности, t – обычное время, c – удельная теплоемкость материала, ρ – плотность материала.

Таблица 3.3. Граничные условия в задаче нестационарной теплопроводности.

По оси x	По оси y	По оси z
Грань S ₁ : $\frac{\partial T}{\partial n} _{x=0} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S ₃ : $\frac{\partial T}{\partial n} _{y=0} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S ₅ : $\frac{\partial T}{\partial n} _{z=0} = 0 \frac{K}{M}$
Грань S ₂ : $T _{x=0.0325} = 100^\circ C$	Грань S ₄ : $\frac{\partial T}{\partial n} _{y=0.01} = 0 \frac{K}{M}$	Грань S ₆ : $\frac{\partial T}{\partial n} _{z=0.003} = 0 \frac{K}{M}$

Также граничное условие по времени: $T|_{\tau=0} = 20^\circ C$

Таким образом, ставится задача найти скалярное поле $T(x,y,z,t)$

удовлетворяющее уравнению $\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{q_v}{\lambda}$ и граничным условиям:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial z} |_{z=0} = 0 \frac{K}{M} \quad (3.4)$$

$$T |_{x=0.0325} = 100^\circ C \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0.01} = 0 \frac{K}{M} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial z} |_{z=0.003} = 0 \frac{K}{M}$$

$$T |_{\tau=0} = 20^\circ C.$$

3.8. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности

Для сокращения решения будем решать в предположении, что $T=T(x,y)$, доказательство, что температура T не зависит от z , проводится также, как и доказательство, что температура не зависит от y , которое будет дано ниже. Уравнение нестационарной теплопроводности: $\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{q_v}{\lambda}$.

В декартовых координатах уравнение переписывается: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{q_v}{\lambda}$.

Дальше будем решать уравнение согласно обобщенному методу Фурье: представляем решение в виде сумму 3-х функций: $T = T_1(x) + T_2(x,y) + T_3(x, \tau)$, где τ – медленное время. Подставляем в уравнение:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_3}{\partial \tau}}_0 = -\frac{q_v}{\lambda};$$

То есть, получилось 3 уравнения:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_3}{\partial \tau} = 0; \quad \text{и} \quad \frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda};$$

Напоминаем, что $q_v = \rho_e j^2 = \frac{\Delta \phi^2}{\rho_e l^2}$ – объемное тепловыделение из-за приложенной разности потенциалов, то есть, электрического тока (Джоулево тепло). Распишем теперь граничные условия:

$$\frac{\partial(T_1(x) + T_2(x,y) + T_3(x,\tau))}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$T_1(x) + T_2(x, y) + T_3(x, \tau) \Big|_{x=l} = 100 \Rightarrow T_1(x) \Big|_{x=l} = 100, \quad T_2(x) \Big|_{x=l} = 0, \quad T_3(x) \Big|_{x=l} = 0;$$

$$\frac{\partial(T_1(x) + T_2(x,y) + T_3(x,\tau))}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0;$$

$$\frac{\partial(T_1(x) + T_2(x,y) + T_3(x,\tau))}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=0.01} = 0;$$

$$T_1(x) + T_2(x,y) + T_3(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = 20 \Rightarrow T_2(x,y) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad T_3(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = 20 - T_1(x);$$

То есть, нужно решать 3 уравнения с соответствующими ГУ. Для начала решим уравнение относительно T_2 :

Уравнение Лапласа: $\Delta T_2 = 0$, в декартовых координатах уравнение переписывается: $\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0$. По методу Фурье ищем решение в виде:

$$T_2 = X(x) * Y(y) \text{ и подставляем в уравнение: } Y * \frac{d^2 X}{dx^2} + X * \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad | * \frac{1}{XY};$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\lambda^2. \text{ Так как функция от } x \text{ равна функции от } y, \text{ мы их обе}$$

приравниваем к константе, как и говорит метод Фурье. Уравнение распадается еще на 2 уравнения:

$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$ $\frac{dY}{dy} \Big _{y=0} = 0$ $\frac{dY}{dy} \Big _{y=0.01} = 0$ <p>Ищем решение в виде: $Y = A \operatorname{sh} \lambda y + B \operatorname{ch} \lambda y$</p> <p>Вычисляем производную:</p> $\frac{dY}{dy} = \lambda A \operatorname{ch} \lambda y + \lambda B \operatorname{sh} \lambda y;$ <p>Так как Y зависит только от y производные, обозначим штрихом для сокращения записи: $Y' \Big _{y=0} = 0 \Rightarrow A = 0;$</p> <p>2 ГУ: $Y' \Big _{y=0.01} = 0 \Rightarrow \lambda B \operatorname{sh}(\lambda * 0.01) = 0;$</p> <p>Отсюда следует, что $\lambda = 0 \Rightarrow Y = B = \operatorname{const}$</p> <p>Примем значение $Y = 1;$</p>	<p>Подставляем в уравнение для функции $X \lambda = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad (*)$</p> <p>При ГУ: $X' \Big _{x=0} = 0$</p> $X \Big _{x=l} = 0$ <p>Решение уравнения (*):</p> $X = C * x + D; X' \Big _{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0$ $X \Big _{x=0.0325} = X \Big _{x=l} = 0 \Rightarrow D = 0;$ <p>Отсюда решение для функции:</p> $X = 0;$
--	---

Отсюда общее решение для функции $T_2 = 0$ – получили часть решения.

Решение уравнения для T_1 :

Решаем уравнение: $\frac{d^2 T_1}{dx^2} = - \frac{q_v}{\lambda}$ при ГУ $\frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0$ и $T_1(x) \Big|_{x=l} = 100$.

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} = - \frac{q_v}{\lambda} \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = - \frac{q_v}{\lambda} * x + C; \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0; T_1 = - \frac{q_v}{\lambda} * \frac{x^2}{2} + D; T_1(x) \Big|_{x=l} = 100 \Rightarrow D = \frac{q_v}{\lambda} * \frac{l^2}{2} + 100; \Rightarrow T_1 = \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) + 100; \quad (3.5)$$

Решение уравнения для $T_3(x,\tau)$:

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_3}{\partial \tau} = 0; \quad \text{Граничные условия: } \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T_3 \Big|_{x=l} = 0, \quad T_3 \Big|_{\tau=0} = 20 - T_1 = 20 - 100 -$$

$$\frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) = -80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2);$$

По методу Фурье из-за однородных граничных условий ищем решение в виде:

$$T_3(x,\tau) = X(x) * \vartheta(\tau) \Rightarrow \text{подставляем в уравнение: } \vartheta * \frac{d^2 X}{dx^2} = X * \frac{d\vartheta}{d\tau} \Big| * \frac{1}{X\vartheta};$$

$$\text{Получаем: } \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\lambda - \text{ так как функция одной переменной равна}$$

функции от другой переменной, то мы приравниваем оба выражения к константе. Уравнение распадается опять на 2 уравнения с разными ГУ:

$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0; \quad (**)$ <p>Граничные условия: $\frac{dX}{dx} \Big _{x=0} = 0; X \Big _{x=l} = 0;$</p> <p>Решение уравнения (*): $X = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x;$</p> <p>$X' = \sqrt{\lambda} A \cos \sqrt{\lambda} x - \sqrt{\lambda} B \sin \sqrt{\lambda} x; \frac{dX}{dx} \Big _{x=0} = 0 \Rightarrow A = 0;$</p> <p>$X = B \cos \sqrt{\lambda} x; X \Big _{x=l} = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{\lambda} l = 0, \sqrt{\lambda} l = \frac{\pi}{2} + \pi k$</p> <p>$= \frac{(2k+1)\pi}{2}, k - \text{ целое число. } \sqrt{\lambda} = \frac{(2k+1)\pi}{2l} \Rightarrow \lambda$</p> <p>$= \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2}; \lambda = 0 - \text{ не собственное число,}$</p> <p>$X = B \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x;$</p>	$\frac{d\vartheta}{d\tau} + \vartheta \lambda = 0$ <p>Решение уравнения в виде: $\vartheta = C e^{-\lambda \tau} =$</p> <p>$C * e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2} \tau};$</p>
--	---

$$\text{Получаем решение: } T_3(x,\tau) = X(x) * \vartheta(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x * e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2} \tau}; \quad (3.6)$$

Подставляем начальное условие: $T_3 \Big|_{\tau=0} = -80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2);$ подставляем –

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x * e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2} \tau} \Big|_{\tau=0} = -80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2); \quad (3.7)$$

В итоге получается: $\sum_{k=1}^{\infty} C_k * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x = -80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2)$ – ряд Фурье ;

Если обозначить $f(x) = -80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2)$, $y_m(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$, то коэффициенты ряда находятся по формуле: $C_k = \frac{\int_0^l r(x) y_m(x) f(x) dx}{\int_0^l r(x) y_m^2(x) dx}$, где $r(x) = 1$ в данном случае.

$$1) \text{ Как известно, } \int_0^l r(x) y_m^2(x) dx = \int_0^l (\cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x)^2 dx = \frac{l}{2};$$

$$2) \int_0^l r(x) y_m(x) f(x) dx = \int_0^l \left(-80 - \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) \right) * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx;$$

$$3) \int_0^l -80 * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = -80 \frac{2l}{\pi(2k+1)} * \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \Big|_0^l = \frac{-80*2l}{\pi(2k+1)} (-1)^k;$$

$$4) \int_0^l \left(\frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) \right) * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = \int_0^l \frac{q_v}{2\lambda} * l^2 * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx + \int_0^l \frac{q_v}{2\lambda} * x^2 * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx;$$

$$5) \int_0^l \frac{q_v}{2\lambda} * l^2 * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = \frac{q_v l^2}{2\lambda} * \frac{2l}{\pi(2k+1)} * \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \Big|_0^l = \frac{q_v l^3}{\pi \lambda (2k+1)} (-1)^k;$$

$$6) \int_0^l x^2 * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = \frac{2l}{\pi(2k+1)} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) x^2 \Big|_0^l - \int_0^l \frac{4l}{\pi(2k+1)} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) x dx =$$

$$= \frac{2l^3}{\pi(2k+1)} (-1)^k - \int_0^l \frac{4l}{\pi(2k+1)} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) x dx = \frac{2l^3}{\pi(2k+1)} (-1)^k +$$

$$\frac{8l^2}{\pi^2(2k+1)^2} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) * x \Big|_0^l - \int_0^l \frac{8l^2}{\pi^2(2k+1)^2} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) x dx = \frac{2l^3}{\pi(2k+1)} (-1)^k -$$

$$- \int_0^l \frac{8l^2}{\pi^2(2k+1)^2} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) x dx = \frac{2l^3}{\pi(2k+1)} (-1)^k - \frac{16l^3}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x \right) \Big|_0^l =$$

$$= \left(\frac{2l^3}{\pi(2k+1)} - \frac{16l^3}{\pi^3(2k+1)^3} \right) (-1)^k;$$

Отсюда следует: $\int_0^l \left(\frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) \right) * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = \frac{q_v l^3}{\pi \lambda (2k+1)} (-1)^k - \frac{q_v}{2\lambda} * (-1)^k \left(\frac{2l^3}{\pi(2k+1)} - \frac{16l^3}{\pi^3(2k+1)^3} \right) = \frac{8q_v l^3}{\lambda \pi^3(2k+1)^3} (-1)^k;$

Находим коэффициенты ряда Фурье: $C_k = \frac{2}{l} \left(\frac{-80*2l}{\pi(2k+1)} (-1)^k - \frac{8q_v l^3}{\lambda \pi^3(2k+1)^3} (-1)^k \right);$

$$\Rightarrow T_3 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{l} \left(\frac{-80*2l}{\pi(2k+1)} - \frac{8q_v l^3}{\lambda \pi^3(2k+1)^3} \right) * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x * e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2} \tau} \quad (3.8)$$

И окончательно:

$$T = \frac{q_v}{2\lambda} * (l^2 - x^2) + 100 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{l} \left(\frac{-80 * 2l}{\pi(2k+1)} - \frac{8q_v l^3}{\lambda \pi^3 (2k+1)^3} \right) * \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x * e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4l^2} \tau} \quad (3.9)$$

Как видно, решение граничным условиям по z удовлетворяет.

Конечно-элементное решение

нестационарной задачи теплопроводности

Задача моделировалась в программном конечно-элементном комплексе ANSYS в 3D- постановке. Теплоэлектрическая задача решалась в нестационарном варианте, для ¼ модели. Для моделирования процесса электрического нагрева выбирался объемный, квадратичный 20-узловой конечный элемент SOLID226. Разбиение проводилось регулярное гексагональными элементами из-за удобной формы геометрической модели и для лучшей точности решения.

На рис.3.8 приведена конечно-элементная модель с тепловыми ГУ, так как нас больше интересует распределение температуры.

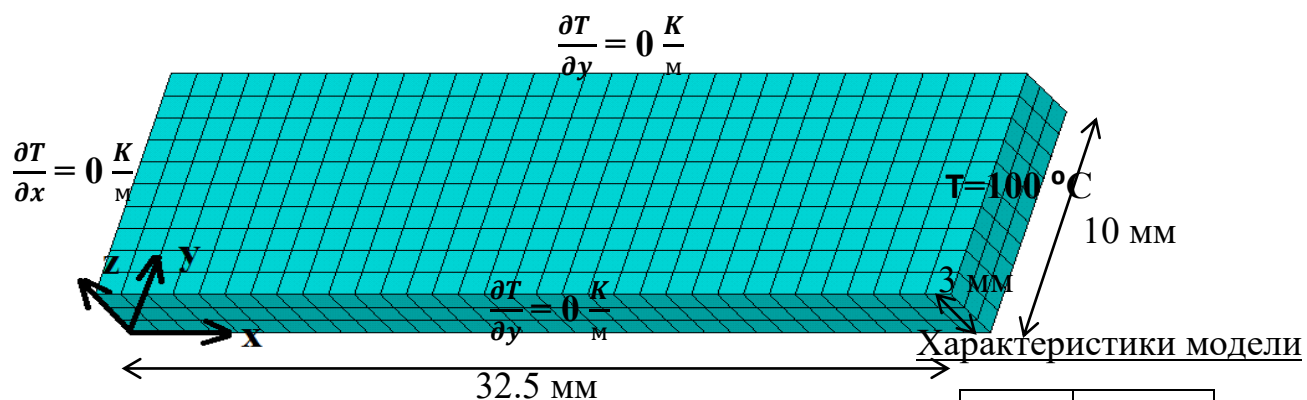


Рис. 3.8. Конечно-элементная модель

На одну грань задавался электрический потенциал 0 В, на другую – электрический потенциал 0.1 В. Напомним, что объемное тепловыделение равно: $q_V = \rho_e j^2 = \frac{\Delta \phi^2}{\rho_e l^2}$, где $\Delta \phi$ – разность потенциалов. Время нагрева $t = 300$ с, начальная температура: $20^\circ C$.

Свойства материала: $\lambda = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, $C = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, $\rho = 8400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_e = 100 * 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. На рис.3.9 показано сравнение значений температуры вдоль оси x в конечный момент нагрева, а также зависимость температуры от времени в точке наивысшей температуры в аналитическом и конечно – элементном решениях.

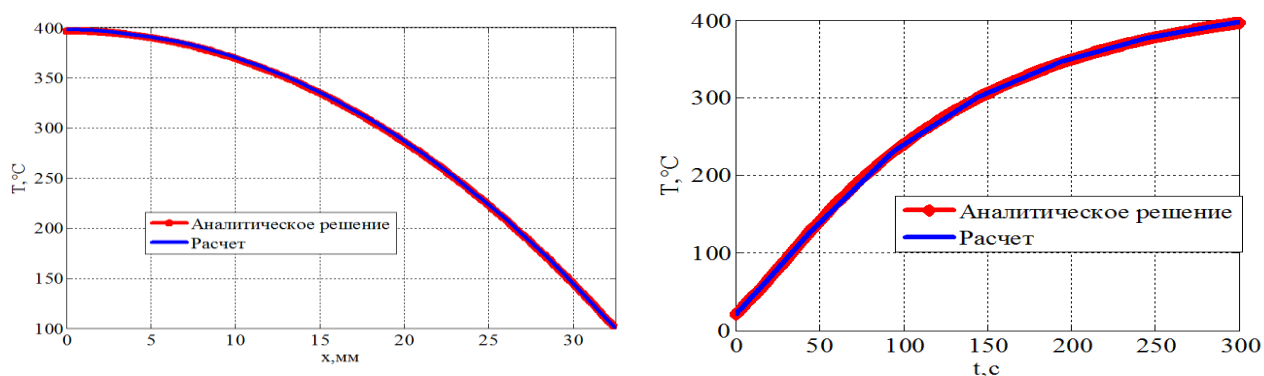


Рис. 3.9. а) Сравнение распределение T вдоль оси x и б) Сравнение зависимости T от времени в точке максимальной температуры

Как видно из сравнения кривые совпадают, даже в месте максимального различия – максимальной температуры, что говорит об адекватном моделировании задачи нагрева электрическим током.

4. Результаты конечно-элементного решения термоэлектрической задачи нагрева корсетного образца электрическим током

При разрушении материалов при термоциклическом нагружении одним из важнейших факторов является размах упругопластической деформации $\Delta \epsilon_p$ [5]. Ранее было сказано, что для исследования явления термоусталости с широким диапазоном варьирования максимальной и минимальной температуры с выдержкой и без нее проводятся эксперименты на различных типах образцов, в том числе и на корсетном на установке, разработанной в НПО ЦКТИ (см. рис.4.1) [3]. Зафиксированный двумя болтами, корсетный образец (рис.4.2) периодически нагревается электрическим током и охлаждается путем остановки пропускания тока через него. Температуры в цикле поддерживаются постоянными.

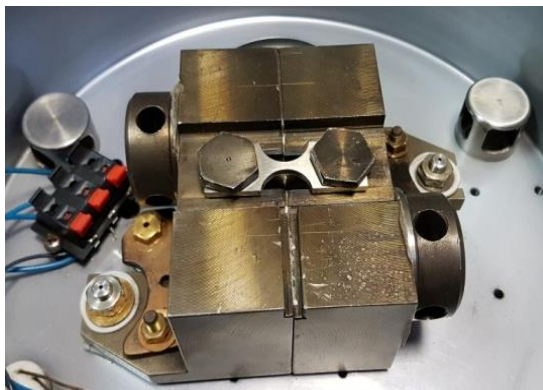


Рис. 4.1. Установка для проведения экспериментов на термоусталость

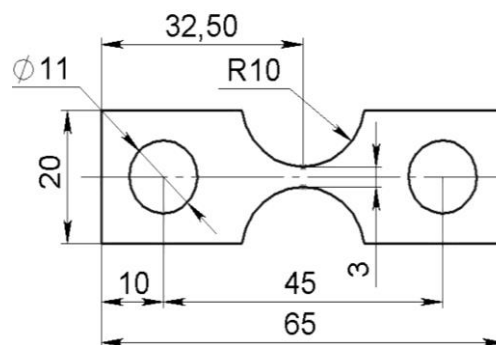


Рис. 4.2. Геометрия корсетного образца для проведения экспериментов на термоусталость

Кроме многих других факторов, неравномерное распределение температуры вдоль образца является основой для точного определения величин пластических деформаций [5], которое важно при оценке термоусталостной прочности. Оценка деформации за цикл производится путем замера перемещений в контрольных точках. Образец при максимальной температуре в цикл разрушается за счет стеснения (сжатия). Поэтому интересно смоделировать это распределение температуры путем решения специальной задачи нагрева образца.

Целью исследования данной промежуточной задачи является моделирование процесса нагрева образца с учетом различных факторов и сравнение полученных кривых распределения температуры с экспериментальными данными. В качестве датчика для измерения температуры используют термопары.

Пример экспериментальных кривых и оцифровка данных по кривым показана на рис. 4.3.

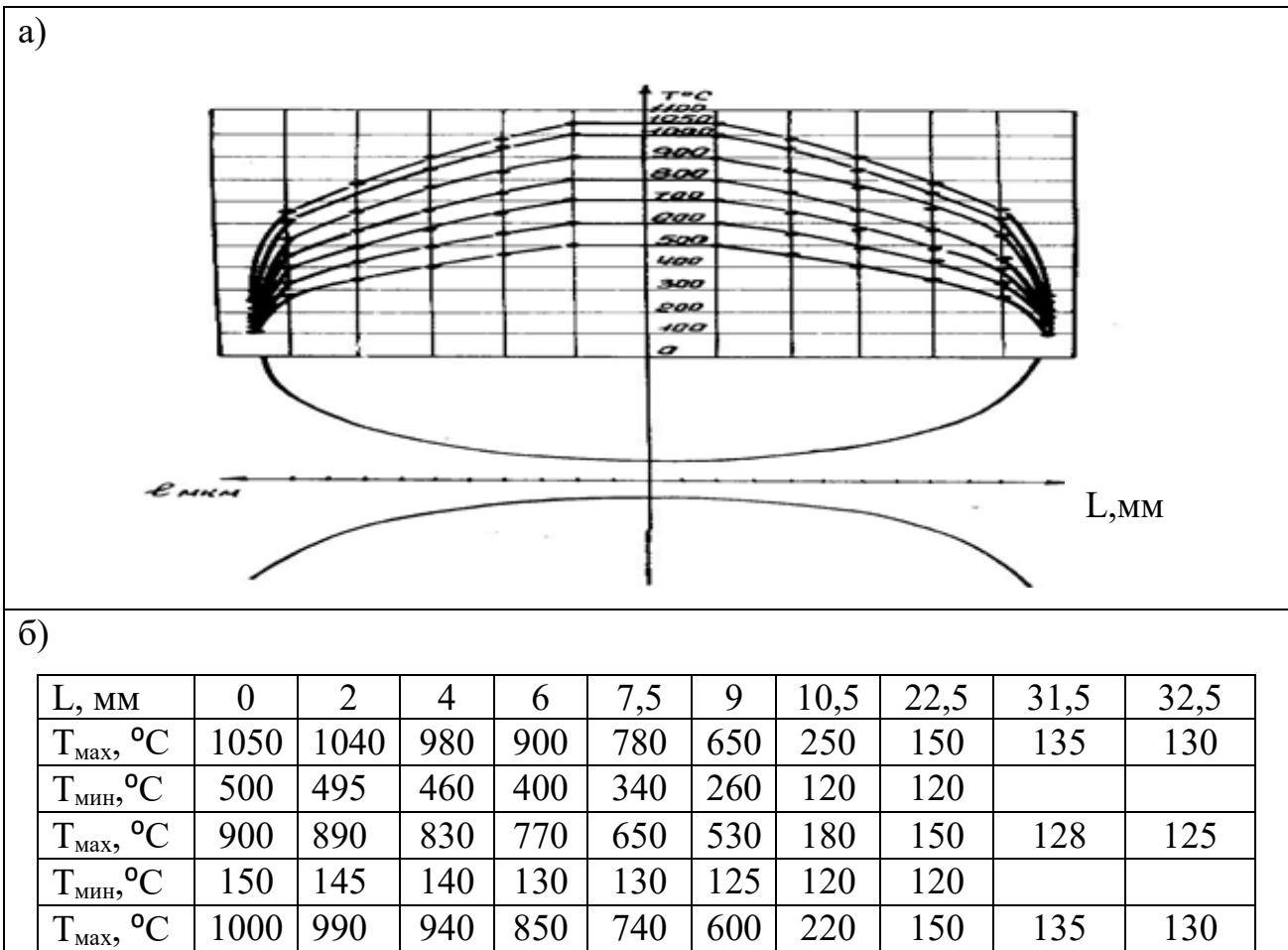


Рис. 4.3. а) Пример экспериментальных кривых распределения T,

б) Оцифровка данных с экспериментальных кривых.

4.1. Конечно-элементная модель и свойства материалов

Моделирование процесса нагрева корсетного образца проводилось в конечно-элементном программном комплексе ANSYS, использующем метод конечных элементов (МКЭ) [30,31]. Исследование проводилось с учетом зависимости свойств материалов образца и оснастки от температуры, нестационарного тепловыделения в результате нагрева электрическим током (Джоулево тепло), конвективного теплообмена между образцом и окружающей средой, термоэлектрических контактов между оснасткой и образцом, а также лучистого излучения образца в окружающую среду. Задача решалась с учетом

симметрий для четверти образца. Геометрия образца вместе с установкой, моделируемая в ANSYS, показана на рис. 4.4.

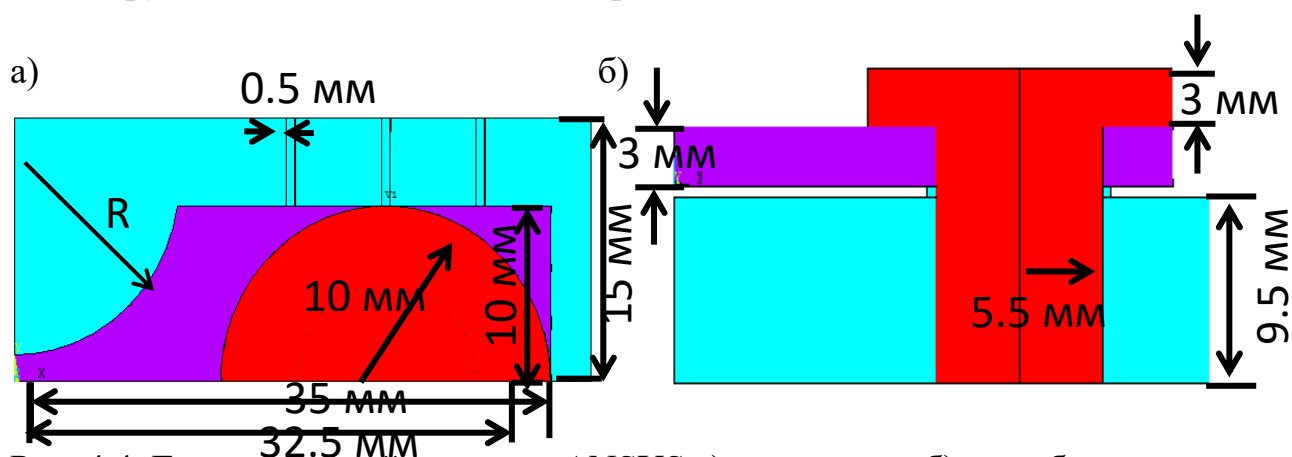


Рис. 4.4. Геометрия всей модели в ANSYS а) вид сверху, б) вид сбоку

Конечно – элементная модель образца вместе с установкой представлена на рис. 4.5.

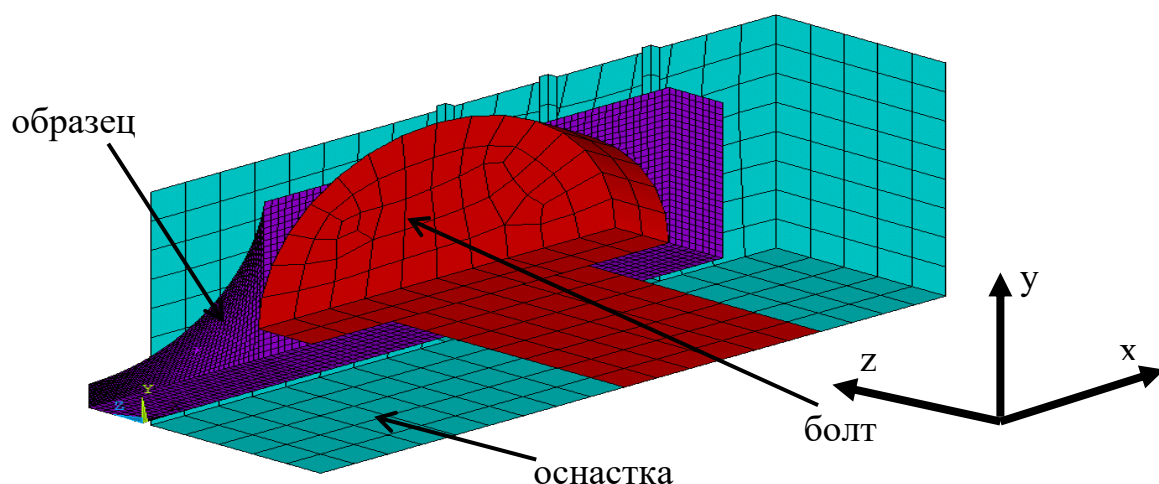


Рис.4.5. Конечно-элементная модель в термоэлектрической задаче

Моделирование процесса нагрева корсетного образца проводилось для 5 температурных режимов: 150÷900, 100÷1000, 250÷1000, 500÷1050 и 700÷1050 °С. Используемые в конечно-элементных вычислениях свойства никелевого сплава и стального оборудования (сталь 45) взяты из литературы [32,33,34,35]. При задании свойств никелевого сплава и стали контролировалось выполнение закона Видемана-Франца, который говорит о том, что:

$$\lambda \cdot \rho_e = LT, \quad (4.1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, ρ_e – удельное электрическое сопротивление, T – температура в Кельвинах, $L = 2.22 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом·К⁻² – константа Лоренца. Получение теплофизических свойств никелевых сплавов достаточно трудоемко, поэтому свойства, представленные ниже, приняты для монокристаллических и поликристаллических сплавов.

Таблица 4.1. Термоэлектрические свойства никелевого сплава.

T	°C	20	200	400	600	800	1000	Ист.
ρ	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	8550	8500	8450	8400	8350	8330	[34]
C_ρ	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	440	520	520	540	570	590	[34]
λ	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	7.4	11.2	14.1	16.3	19.8	26.7	[32]
ρ_e	Ом·м	$8.7 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	[32]

Таблица 4.2. Термоэлектрические свойства перлитной стали.

T	°C	27	127	327	527	927	1127	Ист.
ρ	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	7778	7772	7767	7762	7754	7751	[33]
C_ρ	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	469	506	521	660	577	530	[33]
λ	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	48	47	41	37	23	12	[33]
ρ_e	Ом·м	$2 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	[35]

4.2. Граничные условия в термоэлектрической задаче

Был проведен связанный 3D нестационарный термоэлектрический расчет. Из-за симметрии по осям xz и yz для существенного уменьшения времени расчета рассматривалась четверть образца.

Учитывались температурные и электрические контакты между образцом и болтами, образцом и оснасткой. Учитывалось, что тепло между ними передается без помех, но образец электроизолирован от остальных частей установки.

На противоположные грани образца, перпендикулярные оси образца (оси x) задавались электрические потенциалы: в середине образца – 0 В, на краю образца – 0.1 В, что означает подведение электрического тока к образцу. Начальная температура образца и установки принималась 30 °С. Время нагрева составило 80 с. Для свободной поверхности образца задавалось условие конвективной теплоотдачи:

$$q_n = h(T - T_0), \quad (4.2)$$

где n - нормаль к поверхности, q_n – плотность теплового потока, $h = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ – коэффициент конвективной теплоотдачи, T_0 – температура окружающей среды.

Условие лучистого теплообмена также задавалось на центральную часть образца (область высокой температуры) длиной 10 мм:

$$q_n = \varepsilon \sigma_{\text{СБ}}(T^4 - T_0^4), \quad (4.3)$$

где $\varepsilon = 0.8$ - коэффициент черноты никелевого сплава, $\sigma_{\text{СБ}} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Втм}^{-2}\text{К}^{-4}$ - коэффициент Стефана-Больцмана.

4.3. Результаты решения термоэлектрической задачи

Распределения температуры, полученные при численном моделировании, и экспериментальные данные сравнивались при максимальной температуре в цикле. Распределения температуры в корсетном образце, а также результаты сравнения численного моделирования и эксперимента, показывающие хорошее совпадение при всех температурных режимах, представлены на рис. 4.6.

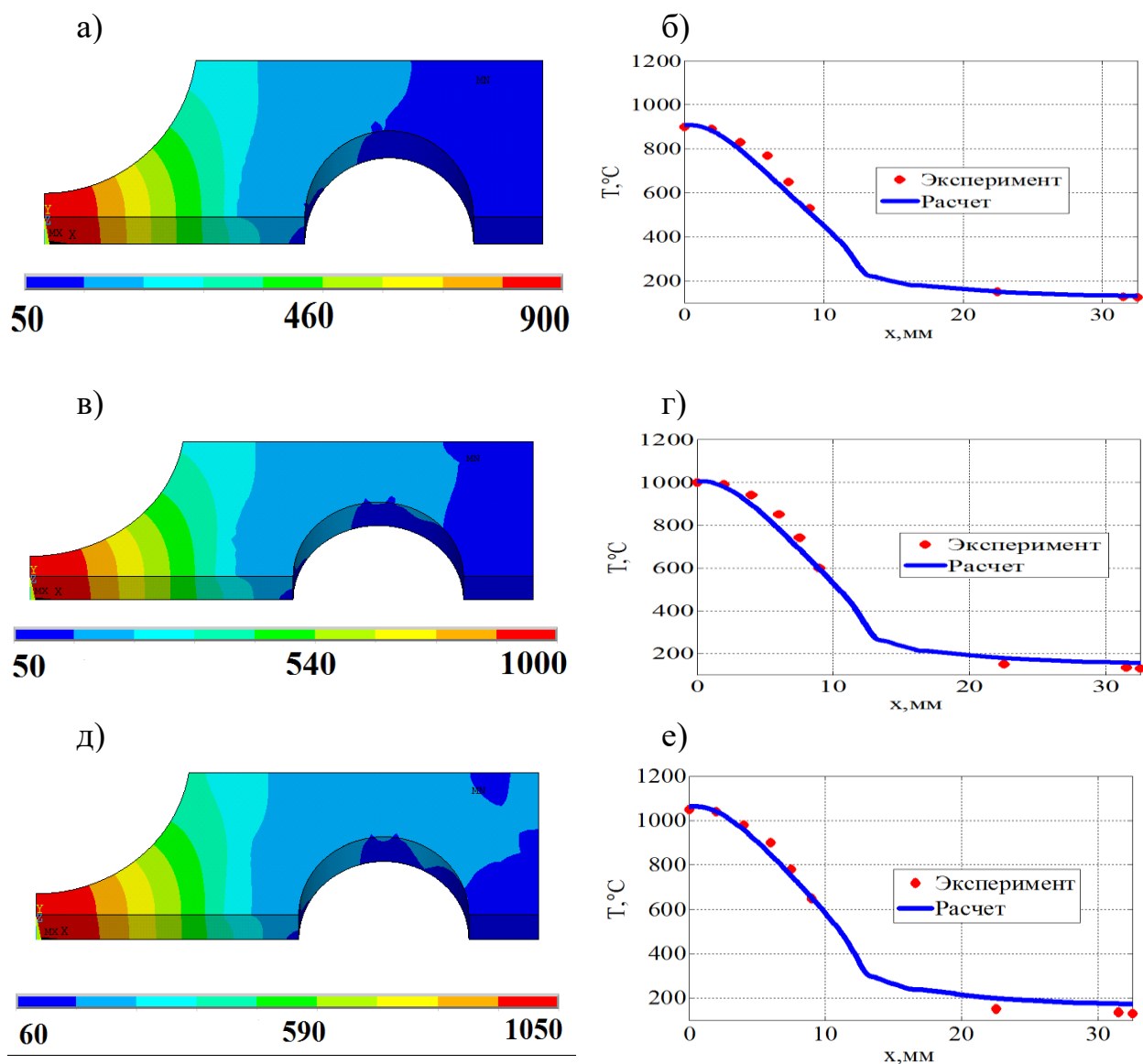


Рис. 4.6. Распределения температуры в корсетном образце для температурных режимов с: а) $T_{max} = 900\text{ }^{\circ}\text{C}$, б) $T_{max} = 1000\text{ }^{\circ}\text{C}$, в) $T_{max} = 1050\text{ }^{\circ}\text{C}$. Сравнение вычислительных результатов с экспериментальными для осевого распределения температуры (x – расстояние от центра образца) для температурных режимов с: а) $T_{max} = 900\text{ }^{\circ}\text{C}$, б) $T_{max} = 1000\text{ }^{\circ}\text{C}$, в) $T_{max} = 1050\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Распределения температуры при разных временах нагрева для всех температурных режимов показаны на рис. 4.7.

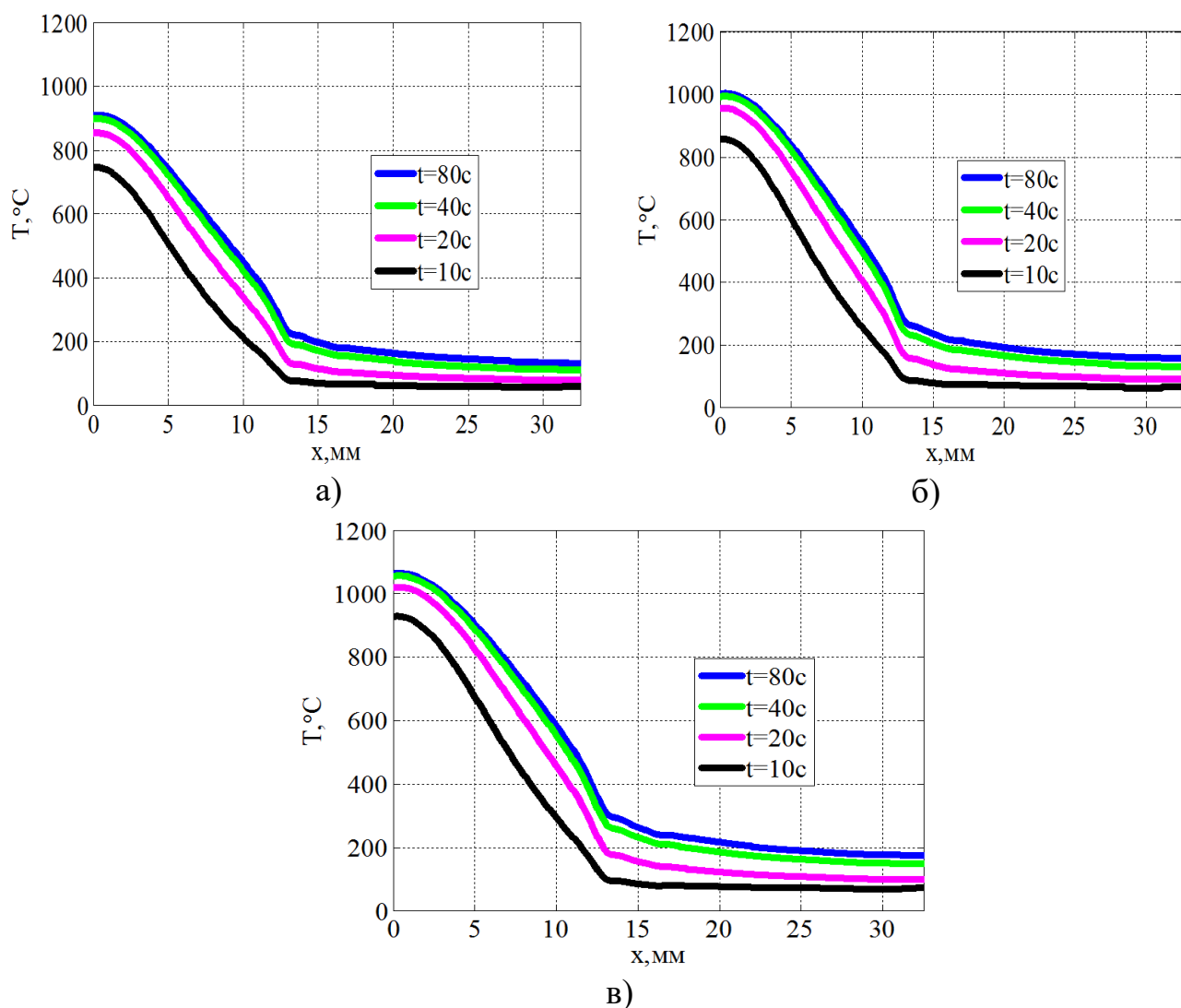


Рис. 4.7. Изменение расчетного распределения температуры вдоль оси образца для разных времен нагрева для режимов с: а) $T_{max} = 900 ^\circ\text{C}$, б) $T_{max} = 1000 ^\circ\text{C}$, в) $T_{max} = 1050 ^\circ\text{C}$.

Таким образом, сравнение результатов расчета и эксперимента показало, что конечно-элементный расчет хорошо коррелирует с экспериментом, и эксперименту можно верить. Полученные распределения температурного поля станут основой для дальнейшего расчета напряженно-деформированного состояния образца с учетом неупругого деформирования.

5. Результаты конечно-элементного решения термоупругопластической задачи циклического нагрева электрическим током корсетного образца

Методика исследования термоусталости на корсетных образцах в ЦКТИ основана на методике, при котором исследуемый образец соединяется с упругим элементом с некоторой жесткостью. Элемент имеет бесконечную жесткость, поэтому тепловая деформация равна по величине упругопластической ε_p , но с обратным знаком [5]. Пластическая деформация локализуется в середине образца из-за неравномерного распределения температуры вдоль него. Распределение пластических деформаций вдоль образца и размах пластической деформации в цикле влияет на сопротивление термической усталости материала. При теоретической оценке влияния геометрии детали используют понятие коэффициента жесткости нагружения: $K = \frac{\Delta\varepsilon_m}{\Delta\varepsilon_t}$, где $\Delta\varepsilon_m$ – механическая упругопластическая деформация, $\Delta\varepsilon_t$ – температурная деформация.

5.1. Постановка задачи и свойства материалов

Так как распределение пластических деформаций по образцу несет важную информацию о прочности, то проводилось конечно-элементное (КЭ) [30,31] моделирование циклического нагрева образца для разных температурных режимов. Моделирование неупругого деформирования корсетного образца было выполнено с учетом зависимости свойств материала образца от температуры, анизотропии механических свойств монокристалла или изотропии (для поликристалла), кинематического упрочнения (для ВЖМ4 и изотропного), неоднородного поля температур вдоль образца, механических контактов между образцом и болтами, образцом и оснасткой, трения между контактными поверхностями, температурного расширения образца, давления предварительного натяжения в болте.

Рассматривались 2 постановки термомеханической задачи (см. рис. 5.1):

- С учетом оснастки
- Без учета оснастки (упрощенная формулировка [36] только с образцом).

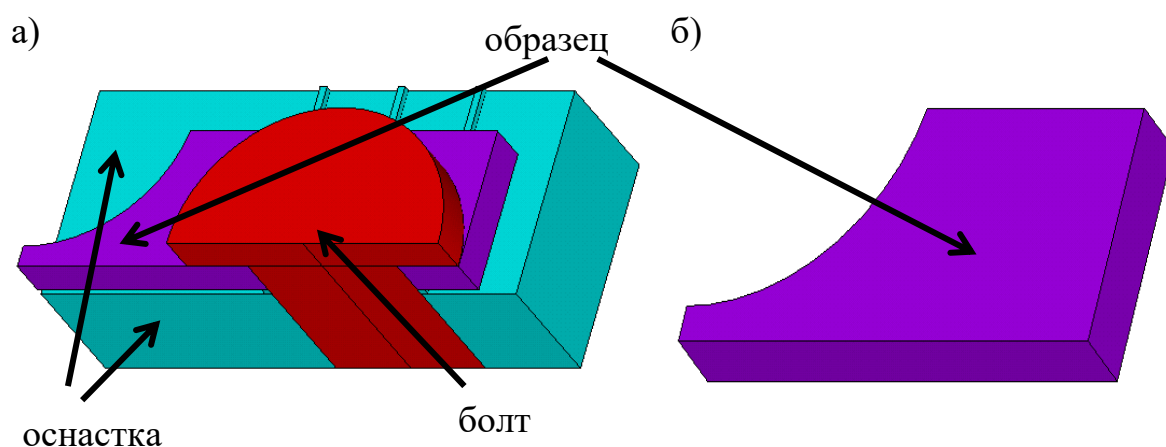


Рис. 5.1. Постановка термомеханической задачи а) с учетом оснастки и б) упрощенная, без учета оснастки.

В упрощенной постановке податливость оснастки учитывается введением эффективной длины образца. Удлинение эффективной длины уменьшает жесткость заделки. Использование упрощенной формулировки позволяет решать задачу без учета оснастки и тем самым упростить численные расчеты в дальнейших задачах, что актуально для проведения многовариантных расчетом для различных температурных режимов и кристаллографических ориентаций (КГО) образца. Одной из целей исследования является выбор эквивалентной длины образца в упрощенной постановке на основе сравнения с решением полной контактной задачи. Допустимость использования упрощенной формулировки проводилась на основе сравнения с полномасштабной моделью (с учетом оснастки) перемещений в контрольных точках на расстоянии 2 мм от середины образца, которые замеряются в процессе проведения эксперимента и величин пластических деформаций в середине образца.

В общем случае в этой задаче нет симметрии, если учитывать анизотропию механических характеристик образца и различную КГО. Однако в важном

практическом случае КГО [001] можно ввести симметрию относительно плоскостей xz и yz (см. рис.5.2) . Оснастка и болты моделировались линейно-упругим материалом (сталь 45), для образца использовалась упругопластическая модель. Задача решалась для температурных режимов 150÷900, 100÷1000, 500÷1050 и 700÷1050 °С. На рис. 5.2 показаны распределения температуры вдоль образца.

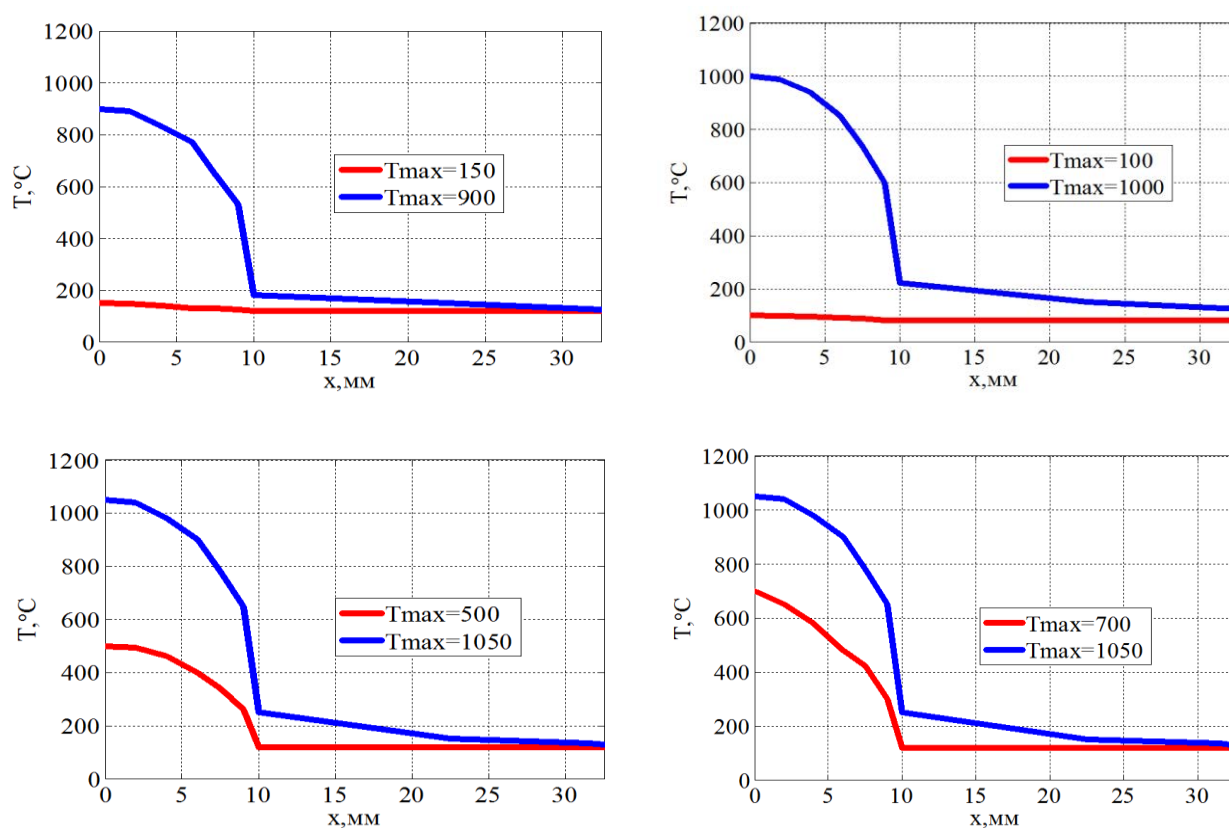


Рис. 5.2. Распределения температур вдоль образца для 4 температурных режимов

Задача решалась для монокристаллических сплавов ВЖМ4, ЖС32, ВИНЗ и поликристаллического сплава ЖС6Ф. Механические свойства сплавов ВЖМ4, ЖС32, ВИНЗ и ЖС6Ф представлены в таблицах 5.1- 5.4.

Таблица 5.1. Механические свойства ВЖМ4, использовавшиеся в расчете [37]:

T	$^{\circ}\text{C}$	20	700	800	900	1000	1050
E_{001}	МПа	130000	101000	96000	91000	86000	82000
ν	-	0.39	0.42	0.422	0.425	0.428	0.43
α	1/К	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$	$1.87 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
σ_{Y001}	МПа	846	950	-	-	-	820
n	-	8	8	8	8	8	8
A	$\text{МПа}^{-n}\text{c}^{-1}$	$1 \cdot 10^{-42}$	$3 \cdot 10^{-31}$	$1 \cdot 10^{-29}$	$1 \cdot 10^{-28}$	$2 \cdot 10^{-27}$	$1 \cdot 10^{-26}$

Таблица 5.2. Механические свойства ВИНЗ, использовавшиеся в расчете [38]:

<i>T</i>	°C	20	500	700	900	1000	1050
E_{001}	МПа	126000	110000	104000	89000	80000	75000
ν	-	0.39	0.41	0.42	0.42	0.425	0.428
α	1/К	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
σ_{Y001}	МПа	555	800	930	910	645	540
n	-	8	8	8	8	8	8
A	МПа ⁻ⁿ с ⁻¹	$1 \cdot 10^{-42}$	$4 \cdot 10^{-34}$	$1.5 \cdot 10^{-30}$	$5.8 \cdot 10^{-27}$	$3.5 \cdot 10^{-25}$	$1.5 \cdot 10^{-24}$

Таблица 5.3. Механические свойства ЖС32, использовавшиеся в расчете [3]:

<i>T</i>	°C	20	700	800	900	1000	1050
E_{001}	МПа	137000	110000	105000	99800	94800	92300
ν	-	0.395	0.4248	0.4284	0.4317	0.4347	0.4361
α	1/К	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-5}$	$2.42 \cdot 10^{-5}$
σ_{Y001}	МПа	919	904	901	895	670	580
n	-	8	8	8	8	8	8
A	МПа ⁻ⁿ с ⁻¹	$1 \cdot 10^{-42}$	$2.5 \cdot 10^{-31}$	$8.5 \cdot 10^{-30}$	$2 \cdot 10^{-28}$	$6 \cdot 10^{-27}$	$7 \cdot 10^{-26}$

Таблица 5.4. Механические свойства ЖС6Ф, использовавшиеся в расчете [3]:

<i>T</i>	°C	20	700	800	900	1000	1050
E_{001}	МПа	186000	156000	146000	128000	121000	115000
ν	-	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
α	1/К	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
σ_{Y001}	МПа	602	719	720	640	460	367

Данные по ползучести у ЖС6Ф отсутствуют, потому что в них не было необходимости для проведения расчетов.

5.2. Конечно-элементная модель и граничные условия

Задача решалась в 3-мерной, квазистатической постановке для четверти модели. Граничные условия прикладывались как условия симметрии: нулевые перемещения на оси y в плоскости xz и нулевые перемещения на оси x в плоскости yz . На нижней грани оснастки закреплялись перемещения по всем направлениям. На шляпку болта задавалось усилие предварительного натяжения в 100 МПа. В упрощенной формулировке (см. рис. 5.3) мы рассматриваем только модель образца без оснастки, в которой нулевые перемещения по плоскостям симметрии xz и yz , внешняя часть образца,

параллельная плоскости симметрии yz , фиксируется в направлении оси x . С целью исключить твердотельные перемещения, фиксируется ряд точек по осям y и z .

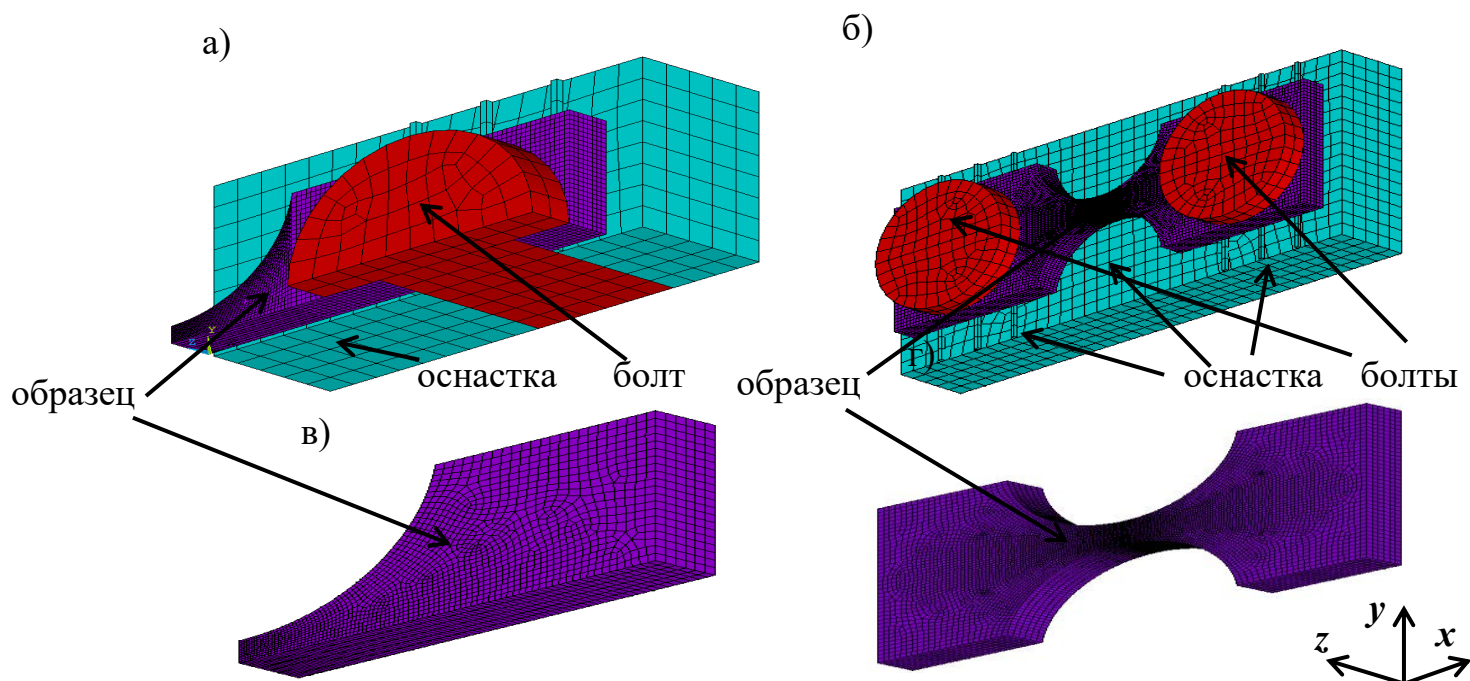


Рис. 5.3. Конечно-элементная модель в механической задаче: а) с учетом оснастки и симметрии, б) с учетом оснастки, полная постановка, в) без учета оснастки (упрощенная формулировка), учет симметрии, г) без учета оснастки (упрощенная формулировка), полная постановка.

5.3. Результаты термоупругопластического анализа

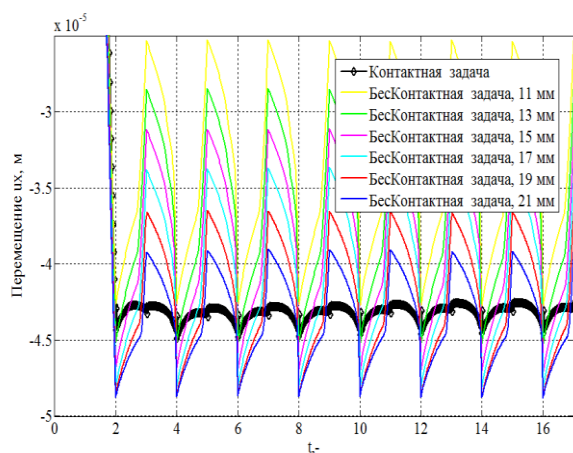
По результатам решения 2-х задач выводились перемещения в обеих задачах в контрольных точках и интенсивности пластических деформаций в середине образца, то есть в наиболее нагруженной части образца.

Результаты для сплава ВЖМ4

На рис.5.4 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ВЖМ4 для температурного режима $150\div 900$ °С. Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 11-21 мм. По оси абсцисс откладывается безразмерное время, которое обозначает номер полуцикла. Для всех режимов на графиках написана половина длины образца.

Для ВЖМ4 сначала рассматривалось кинематическое упрочнение материала.

а)



б)

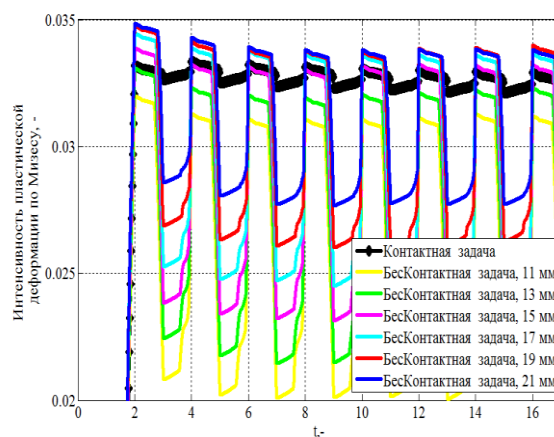
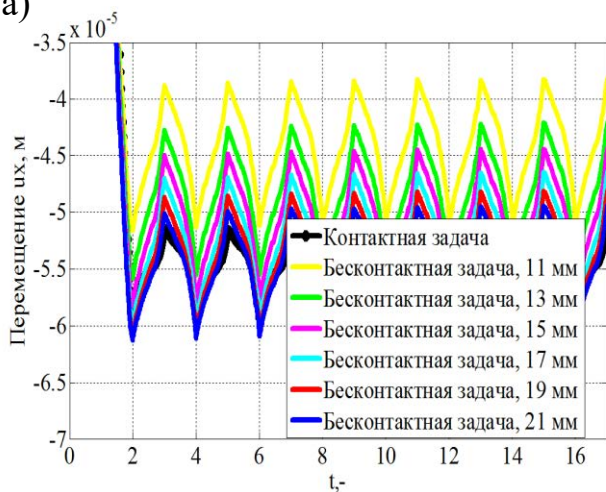


Рис. 5.4. Сравнение а) перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим 150÷900 °С.

На рис.5.5 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ВЖМ4 для температурного режима 500÷1050 °С.

а)



б)

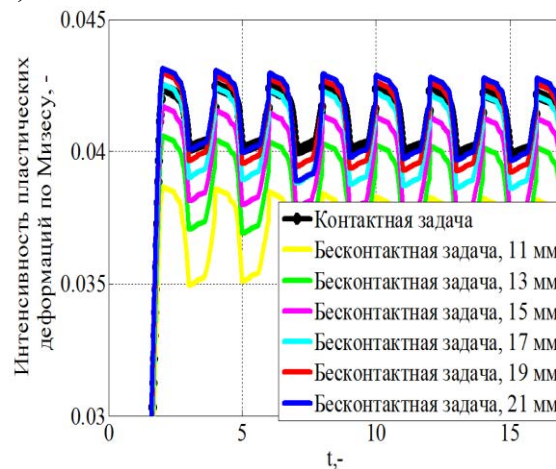


Рис. 5.5. Сравнение а) перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим 500÷1050 °С.

На рис.5.6 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ВЖМ4 для температурного режима 700÷1050 °С.

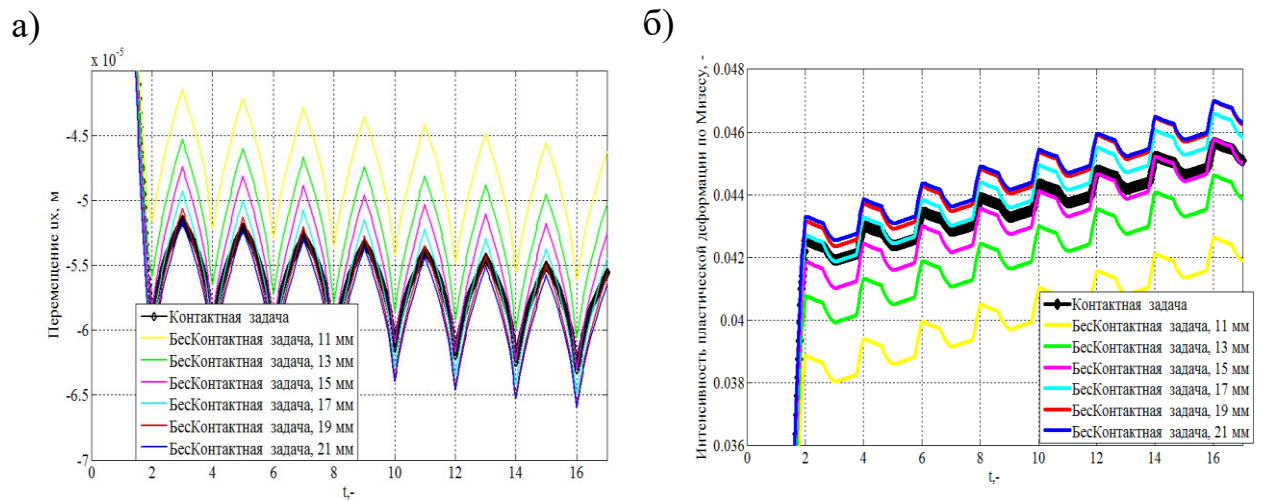


Рис. 5.6. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим 700÷1050 °С.

В результате полная длина образца в упрощенной постановке для ВЖМ4 для всех режимов находится в одинаковом интервале: 34-42 мм.

Для сплава ВЖМ4 для всех представленных режимов также исследовалось влияние вида упрочнения на результаты расчетов. С этой целью расчеты проводились также и для изотропного упрочнения материала. На рис. 5.7, 5.8, 5.9 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ВЖМ4 для изотропного упрочнения, температурные режимы: 150÷900 °С, 500÷1050 °С, 700÷1050 °С.

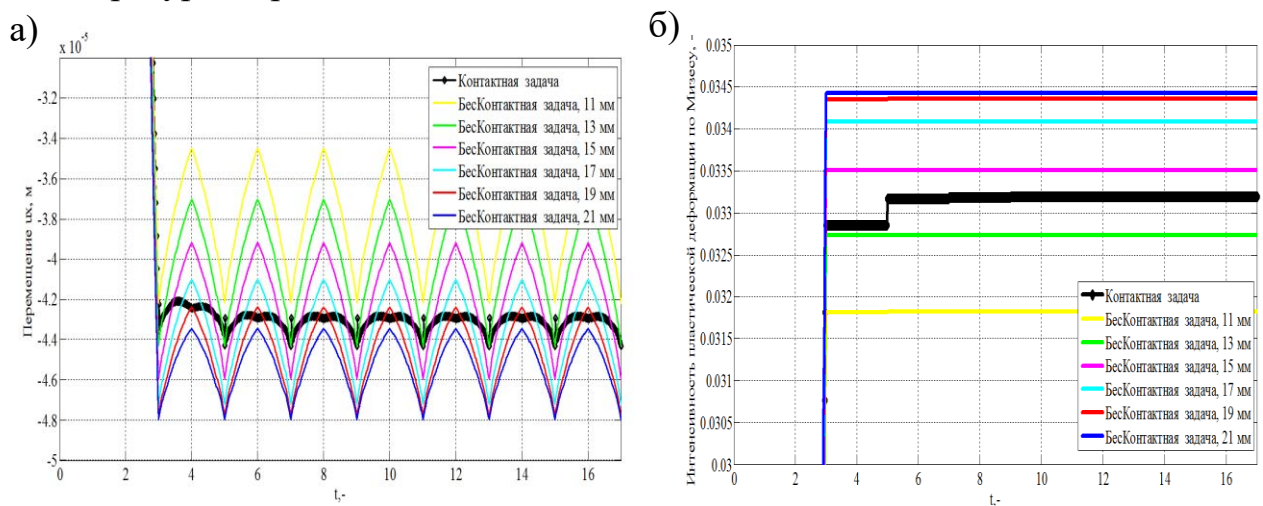


Рис. 5.7. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим 150÷900 °С.

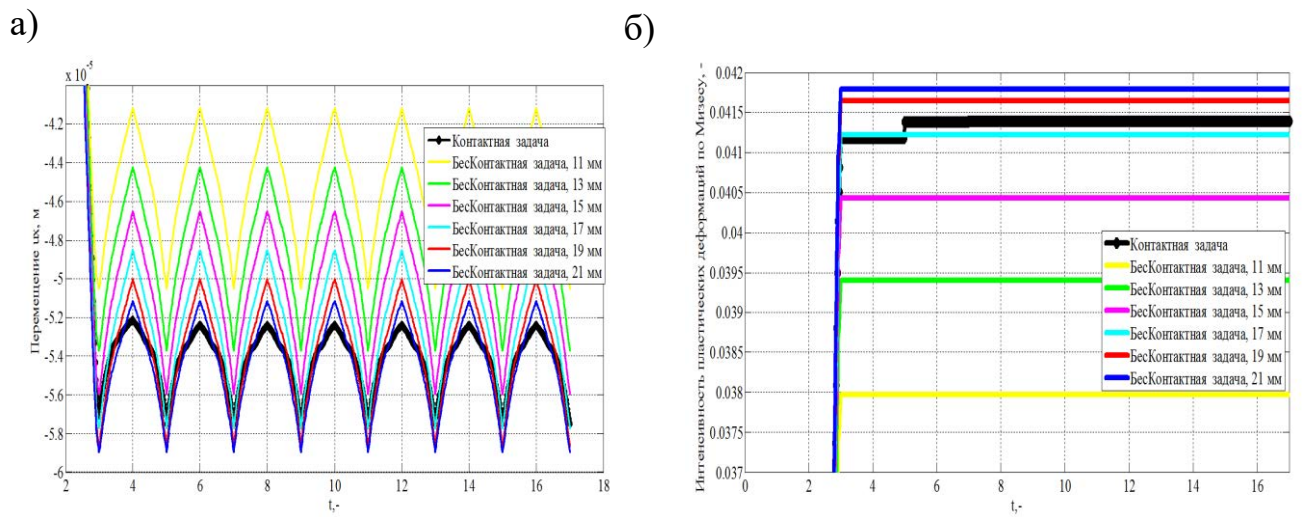


Рис. 5.8. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим $500 \div 1050 \text{ }^\circ\text{C}$.

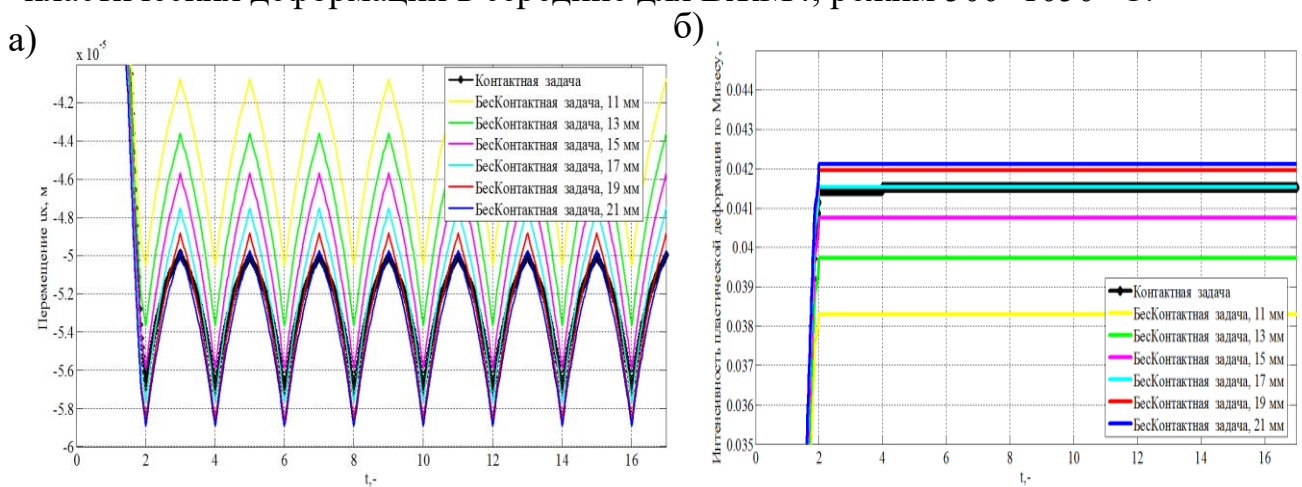


Рис. 5.9. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВЖМ4, режим $700 \div 1050 \text{ }^\circ\text{C}$.

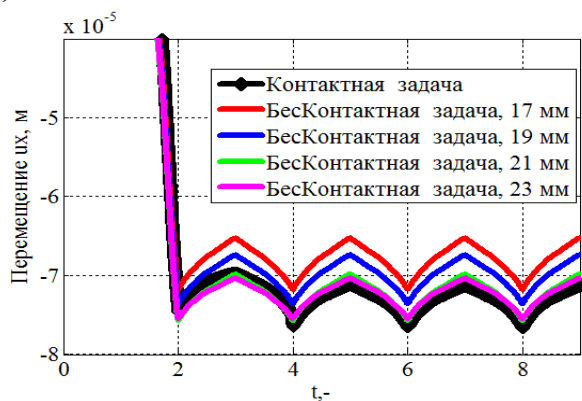
В результате полная длина образца в упрощенной постановке для ВЖМ4 для всех режимов находится в одинаковом интервале 34-42 мм, что говорит о том, что вид упрочнения не влияет на результаты в данной задаче. Для других сплавов в расчетах принималось кинематическое упрочнение.

Для следующих сплавов в некоторых случаях интервал времени, для которого проводилось сравнение, был меньше для экономии расчетного времени, в некоторых случаях был больше для того, чтобы убедиться, что качественно ничего не меняется для достаточного числа циклов (20-40).

Результаты для сплава ВИНЗ

На рис.5.10 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ВИНЗ для температурного режима $500 \div 1050$ °С. Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 17-23 мм.

а)



б)

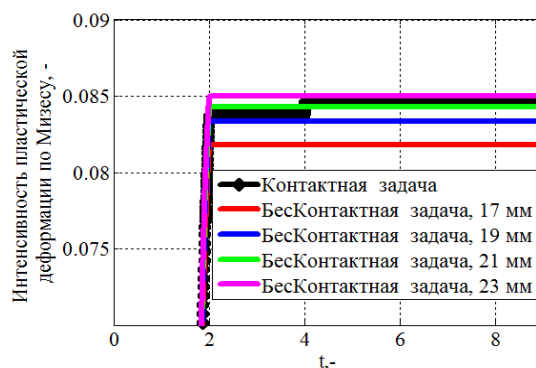


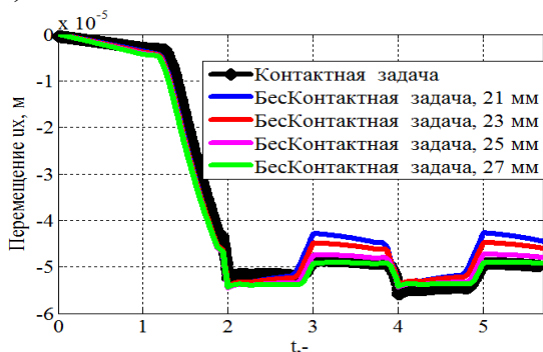
Рис. 5.10. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ВИНЗ, режим $500 \div 1050$ °С.

В результате полная длина образца в упрощенной постановке для ВИНЗ находится в интервале 38-46 мм.

Результаты для сплава ЖС32

На рис. 5.11, 5.12, 5.13 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае сплава ЖС32 для температурного режима $150 \div 900$, $500 \div 1050$ °С и $700 \div 1050$ °С. Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 21-27 мм.

а)



б)

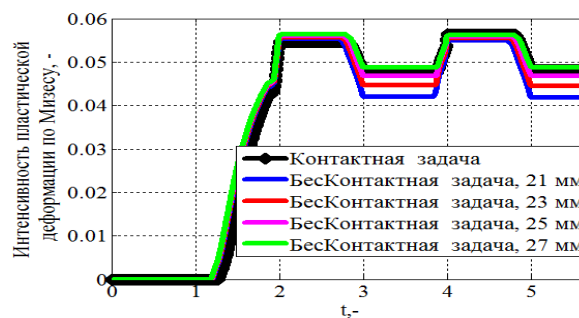
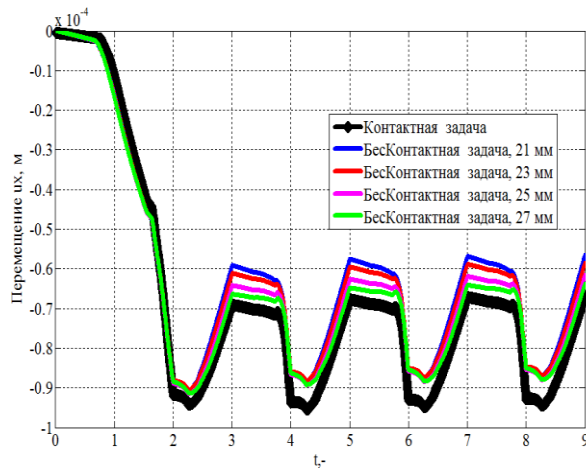


Рис. 5.11. Сравнение а) перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС32, режим $150 \div 900$ °С.

а)



б)

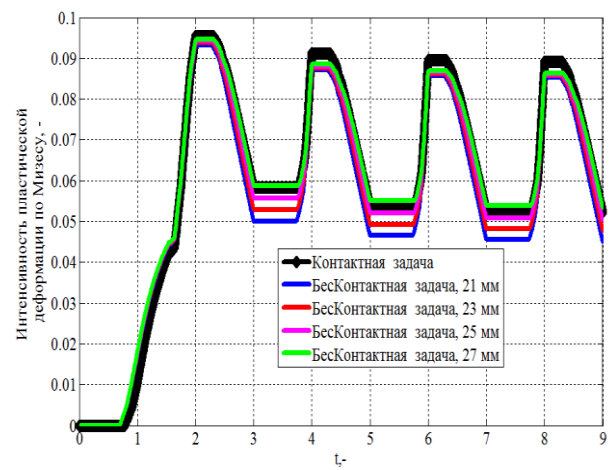
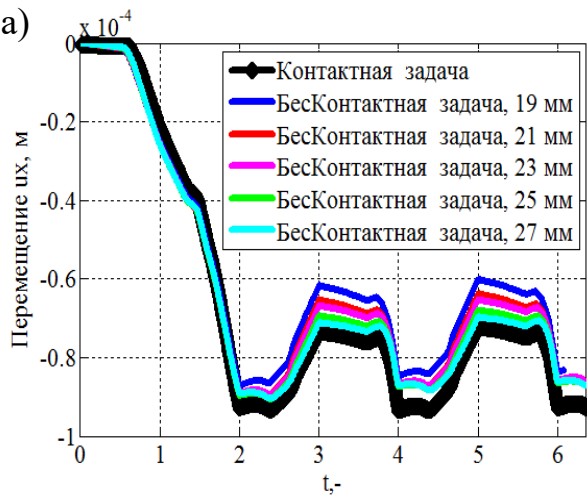


Рис. 5.12. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС32, режим 500÷1050 °С.

а)



б)

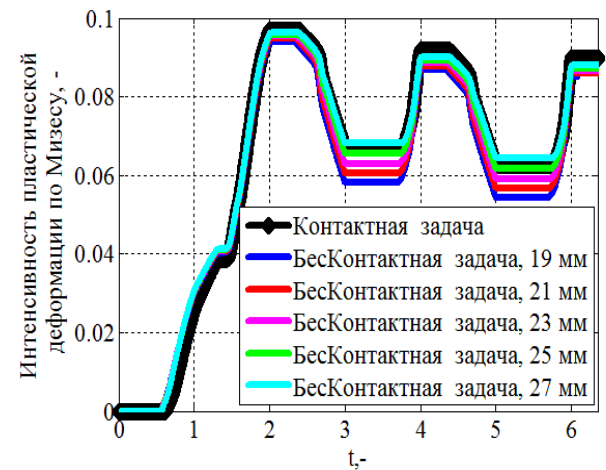


Рис. 5.13. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС32, режим 700÷1050 °С.

В результате полная длина образца в упрощенной постановке для ЖС32 для всех режимов находится в интервале 46-54 мм.

Результаты для сплава ЖС6Ф

На рис.5.14, 5.15, 5.16 представлено сравнение перемещений и пластических деформаций для 2 задач в случае поликристаллического изотропного сплава ЖС6Ф для температурных режимов $150\div 900$, $100\div 1000$ $700\div 1050$ °С. Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 21-27 мм.

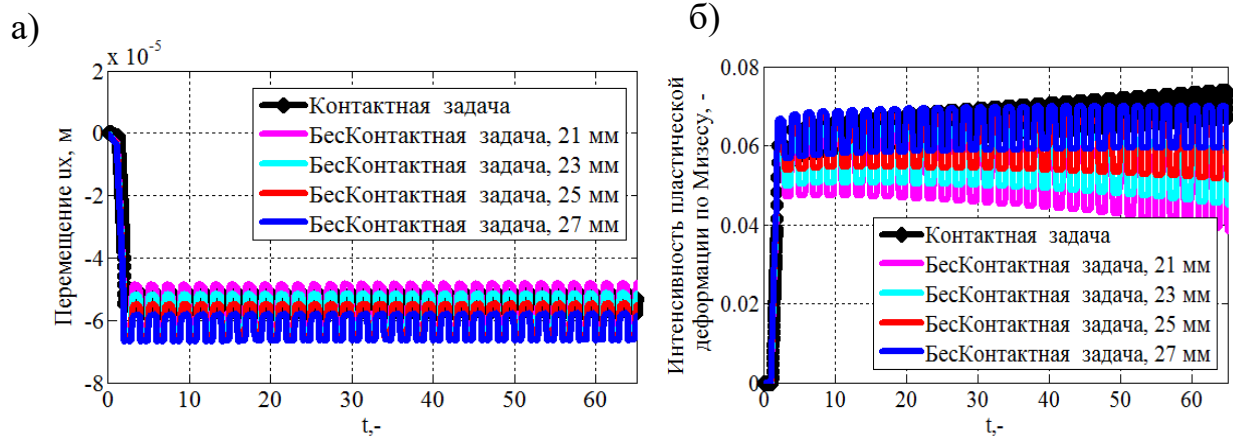


Рис. 5.14. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС6Ф, режим $150\div 900$ °С.

Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 15-27 мм.

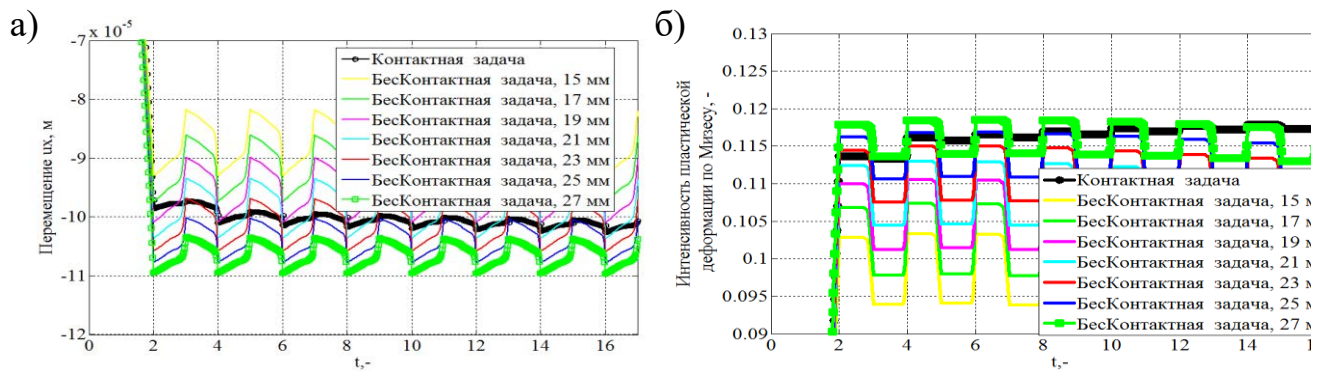


Рис. 5.15. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС6Ф, режим $700\div 1050$ °С.

Длина половины образца в упрощенной постановке варьировалась: 21-27 мм.

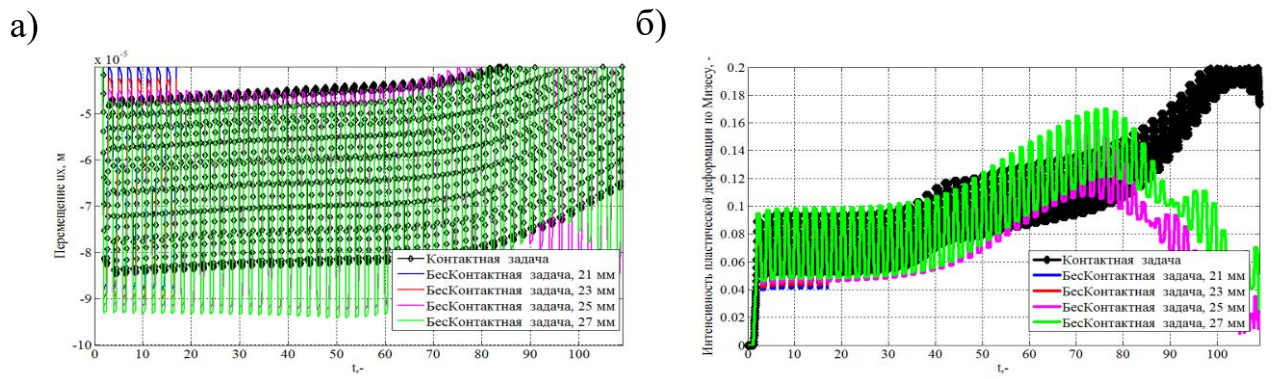


Рис. 5.16. Сравнение а) Перемещений в контрольных точках, б) интенсивностей пластических деформаций в середине для ЖС6Ф, режим $100\div 1000\text{ }^{\circ}\text{C}$.

В результате полная длина образца в упрощенной постановке для ЖС6Ф для всех режимов находится в интервале 46-54 мм.

Рис. 5.17 показывает пример распределений интенсивностей пластических деформаций для 4 сплавов для 2 разных температурных режимов.

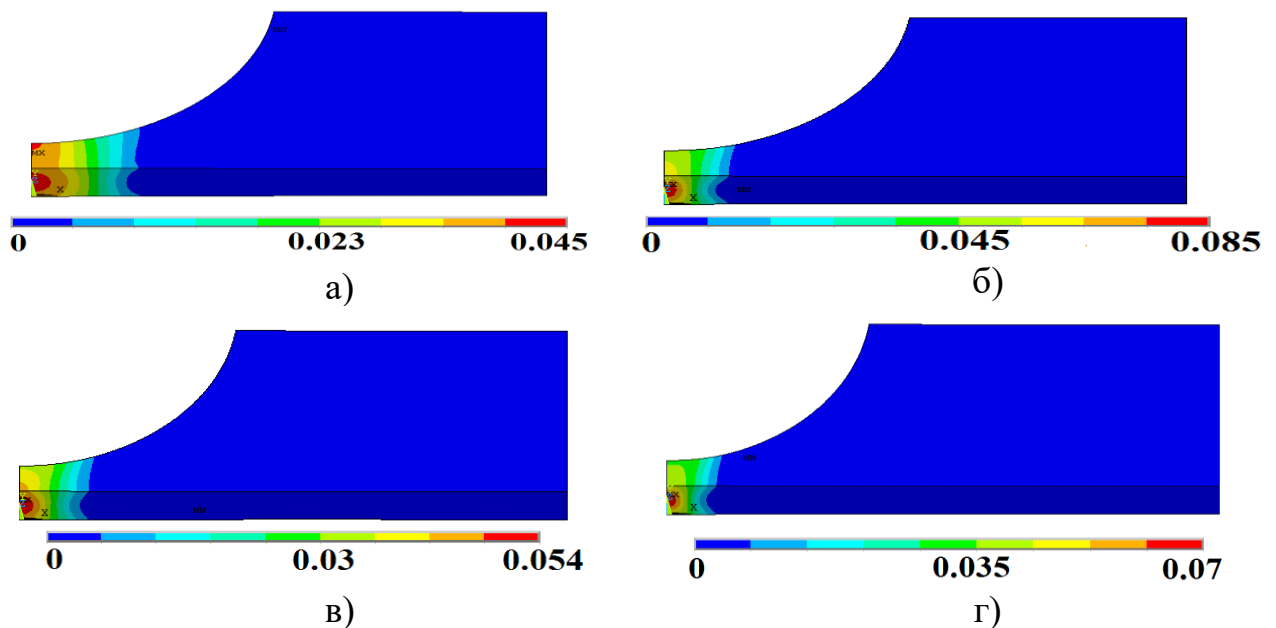


Рис. 5.17. Распределение интенсивностей пластических деформаций для а) сплав ВЖМ4, режим $500\div 1050\text{ }^{\circ}\text{C}$; б) сплав ВИНЗ, режим $500\div 1050\text{ }^{\circ}\text{C}$; в) сплав ЖС32, режим $150\div 900\text{ }^{\circ}\text{C}$; г) сплав ЖС6Ф, режим $150\div 900\text{ }^{\circ}\text{C}$ после 7 циклов.

В итоге, мы провели расчеты для 4 сплавов и установили для разных температурных режимов длину образца в упрощенной постановке. Можно сделать выводы, что эффективная длина не зависит от температурного

режима, вида упрочнения сплава, но зависит от самого сплава, то есть, от его свойств. Таблица 5.5 показывает получившиеся длины в упрощенной постановке для всех образцов.

Таблица 5.5. Эквивалентные длины корсетного образца для разных сплавов

ВЖМ4	ВИНЗ	ЖС32	ЖС6Ф
34-42 мм	38-46 мм	46-54 мм	46-54 мм

В задаче исследования влияния выдержки при максимальной температуре на термоусталостную прочность сплава была принята одна длина - 40 мм.

6. Влияние выдержки на термоусталостную прочность сплавов

Моделирование неупругого циклического деформирования корсетного образца производилось с помощью конечно-элементного комплекса PANTOCRATOR [39], который позволяет использовать микромеханические модели пластичности и ползучести. Про эти модели было подробно рассказано в главе 2.

6.1. Определение параметров моделей в расчетах на термоусталость

Как уже упоминалось, для расчетов на термоусталостную прочность использовался программный комплекс PANTOCRATOR, использующий метод конечных элементов [30,31]. Для задания ползучести использовался закон Нортона, для задания свойств пластичности использовался закон Каето [27], для вычисления циклов до образования магистральной трещины использовался деформационный критерий Л.Б. Гецова. Рассмотрим методику определения параметров в их моделях.

Для определения этих параметров для сплава ВЖМ4 использовались экспериментальные данные по ползучести и пластичности из технического отчета и статьи [12,40]. Экспериментальные данные по ползучести для сплава ВЖМ4 для температуры 1050 °С показаны на рис. 6.1.

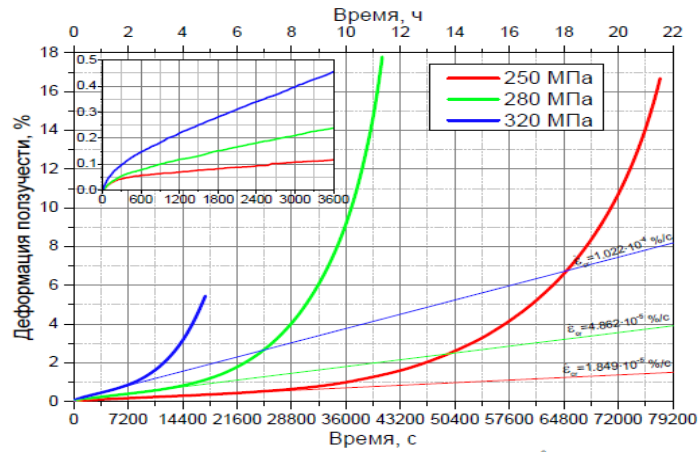


Рис. 6.1. Кривые ползучести сплава ВЖМ4 при температуре 1050 °С [40].

Экспериментальные данные по пластическим свойства для различных КГО сплава ВЖМ4 для температур 20, 700 и 1000 °С представлены на рис. 6.2.

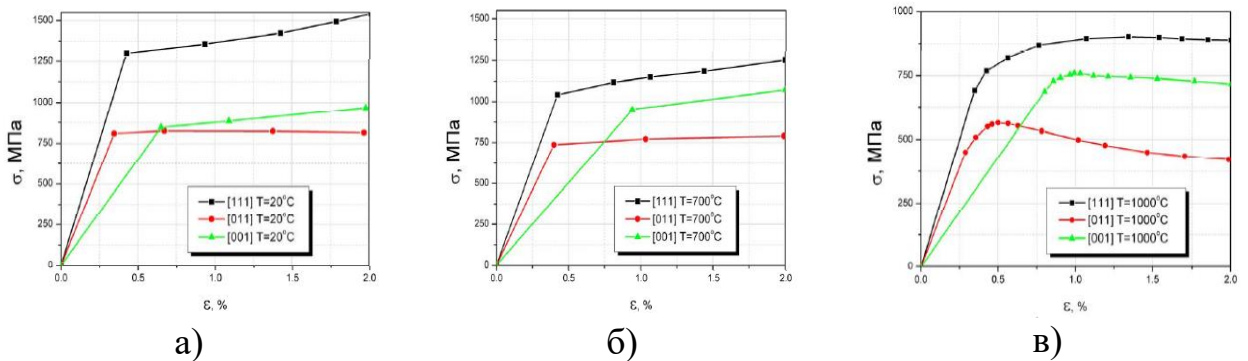


Рис. 6.2. Диаграммы деформирования ВЖМ4 при а) 20 °С, б) 700 °С, в) 1000 °С [40].

При определении свойств ползучести брались скорости деформации ползучести при различных напряжениях, указанные на графике. Отмечались экспериментальные точки в осях: $\dot{\epsilon}_{cr} - \sigma$, а так как закон Нортона: $\dot{\epsilon}_{cr} = A\sigma^n$, то параметры A и n подбирались так, чтобы визуально график кривой проходил как можно ближе ко всем экспериментальным точкам. Сравнение эксперимента и теории для случая 1050 °С – на рис. 6.3.

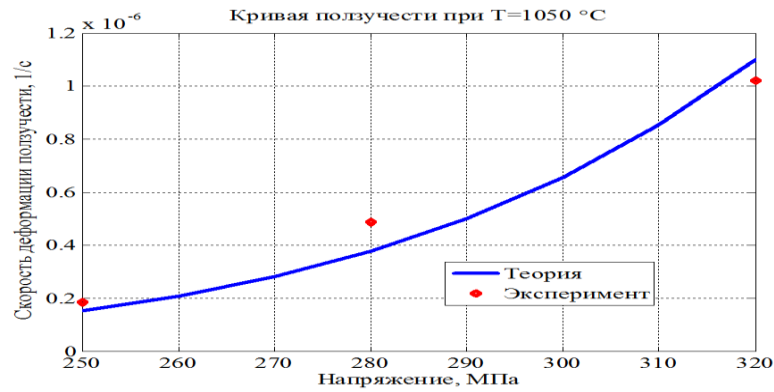


Рис. 6.3. Сравнение экспериментальных данных и теоретической зависимости для описания свойств ползучести по закону Нортона.

Для температуры 20 °С брался коэффициент n – такой же, как и для 1050 °С, а параметр A – на несколько порядков меньше, чем определенный этот же показатель для 700 °С, но для модели Нортона с упрочнением. Параметры Нортона для этих температур получились такими, как указано в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Параметры модели Нортона для температур 20, 1050 °С.

Параметры \ T	20 °С	1050 °С
$A, c^{-1}MPa^{-n}$	$1 \cdot 10^{-42}$	$1 \cdot 10^{-26}$
$n, -$	8	8

Дальше задавались параметры Нортона для температур 700-1050 °С через некоторые интервалы. Для их интерполяции использовался закон Аррениуса: $\dot{\epsilon}_{cr} \sim \exp(-\frac{Q}{RT})$, где Q – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, T – температура в К. Предполагалось, что показатель степени n не меняется, а A меняется соответственно по экспоненциальному закону.

Для определения параметров пластичности модели Cailletaud: $\sigma = \sigma_y + Q(1 - \exp(-b\epsilon_p)) + \frac{C}{D}(1 - \exp(-D\epsilon_p))$ параметры Q и b , описывающие эффекты изотропного упрочнения, для ВЖМ4 занулялись, подбирались параметры σ_y , C и D для лучшего совпадения с экспериментальными диаграммами деформирования, эксперимент брался для КГО [001]. Диаграмма для 1000 °С использовалась для определения параметров при 1050 °С из-за отсутствия диаграммы

деформирования при 1050 °С и эксперимент немного модифицировался, чтобы напряжения возрастали при увеличении пластической деформации. Результат сравнения экспериментальных данных с кривой, полученной теоретически, представлены на рис. 6.4.

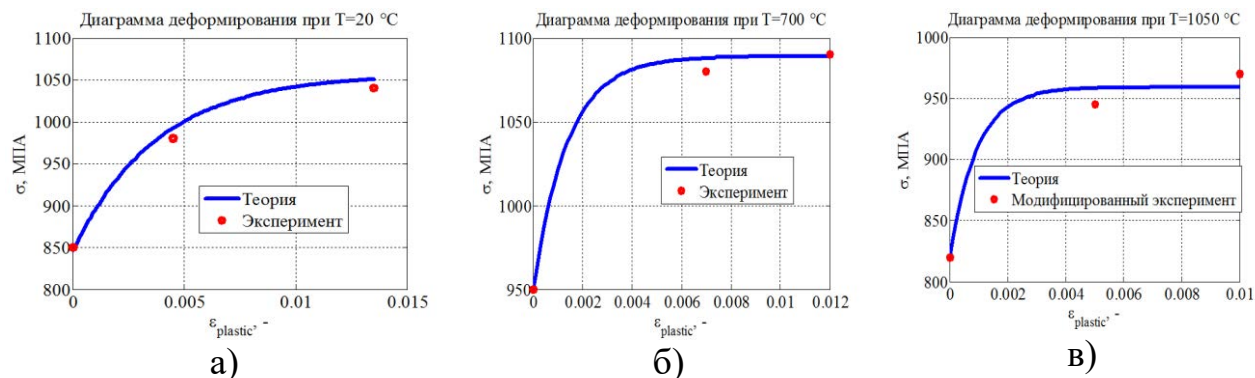


Рис. 6.4. Сравнение экспериментальных данных и аналитической кривой для а) 20 °С, б) 700 °С, в) 1050 °С.

В итоге были определены пластические свойства для сплава ВЖМ4, которые представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.2. Свойства пластичности сплава ВЖМ4.

Параметры \ T	20 °С	700 °С	1050 °С
σ_y , МПа	846	950	820
C, МПа	55500	100000	720
D, -	263	150000	1080

Для определения параметров ползучести для сплава ВИНЗ использовались экспериментальные данные по ползучести также из технического отчета [41], а свойства пластичности – на основе статьи [38].

В отчете брались экспериментальные данные для температур 1000, 1050 и 1100 °С, вычислялись параметры модели Нортона, для 20 °С брались параметры Нортона такие же, как и для ВЖМ4 из-за гораздо меньшей (примерно на 20 порядков) ползучести при этой температуре.

Примеры экспериментальных данных для ВИНЗ по ползучести приведены на рис. 6.5, а также экспериментальные данные, сведенные в таблицу (см. табл. 6.3.).

Таблица 6.3. Результаты испытаний на ползучесть сплава ВИНЗ [41].

Температура	Напряжение	Время до разрушения	Скорость ползучести на 2-ой стадии
°С	МПа	час	1/час
1100	60	204	$4,12 \cdot 10^{-4}$
	70	66,6	$9,53 \cdot 10^{-4}$
	70	64,4	$3,02 \cdot 10^{-4}$
	70	84,2	$3,96 \cdot 10^{-4}$
	75	53,5	$4,88 \cdot 10^{-4}$
	80	57,7	$8,35 \cdot 10^{-4}$
	100	21,8	$20,0 \cdot 10^{-4}$
	120	12,3	$59,9 \cdot 10^{-4}$
	150	4,1	$276,6 \cdot 10^{-4}$
	100	43,7	$17,6 \cdot 10^{-4}$
1050	100	46,7	$40,7 \cdot 10^{-4}$
	150	18,4	$77,4 \cdot 10^{-4}$
	200	5,4	$97,9 \cdot 10^{-4}$
	250	2,2	$694,8 \cdot 10^{-4}$
1000	250	9,8	$194,8 \cdot 10^{-4}$

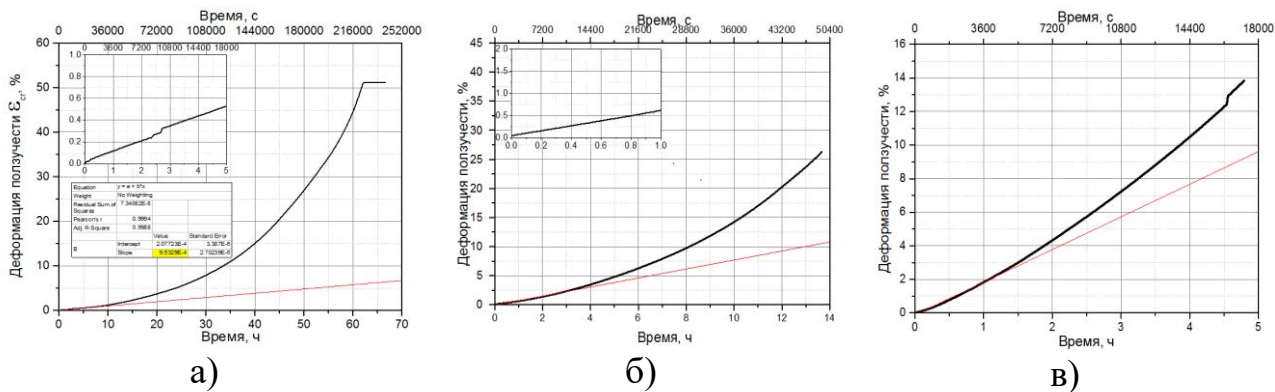


Рис. 6.5. Примеры экспериментальных данных для сплава ВИН3 при а) 1100°С, $\sigma = 70$ МПа, б) 1050 °С, $\sigma = 150$ МПа, в) 1000°С, $\sigma = 250$ МПа [41].
 Экспериментальные данные для ВИН3 по пластичности при температуре 20 °С для разных КГО представлены на рис. 6.6.

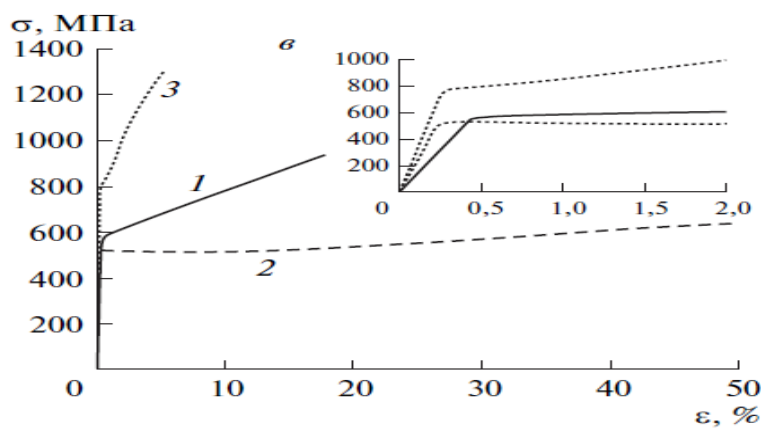


Рис. 6.6. Диаграмма деформирования ВИН3 при 20 °С, 1- [001], 2- [011], 3 –[111] [38].

Зависимость предела текучести от температуры для сплава ВИН3 дана в таблице 6.4.

Таблица 6.4. Зависимость предела текучести ВИН3 от температуры [41].

Температура, °С	20	700	800	900	1000	1100
Предел текучести, МПа	555	930	1010	910	645	470

Параметры определялись аналогично определению параметров для ВЖМ4 и с учетом принятых свойств для 20 °С получились коэффициенты (табл. 6.4).

Графики сравнения эксперимента с полученными кривыми ползучести для рассмотренных температур приведены на рис. 6.7.

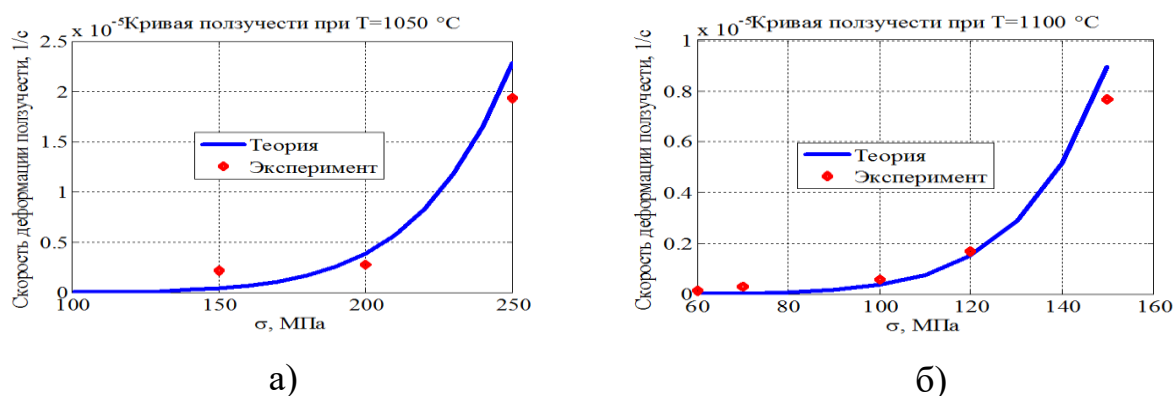


Рис. 6.7. График сравнения экспериментальных данных и аппроксимирующих кривых для сплава ВИНЗ при температурах: а) 1050 °С и б) 1100 °С.

Таблица 6.5. Параметры модели Нортона для сплава ВИНЗ при температурах 20, 1000 °С, 1050 °С, 1100 °С.

Параметры\T	20 °С	1000 °С	1050 °С	1100 °С
A, $s^{-1}MPa^{-n}$	$1 \cdot 10^{-42}$	$3.5 \cdot 10^{-25}$	$1.5 \cdot 10^{-24}$	$3.5 \cdot 10^{-23}$
n, -	8	8	8	8

Для определения параметров модели Нортона при других температурах опять же использовалась интерполяция по закону Аррениуса, как и для ВЖМ4.

Для определения параметров пластичности модели Cailletaud: $\sigma = \sigma_y + Q(1 - \exp(-b \epsilon_p)) + \frac{c}{D} (1 - \exp(-D \epsilon_p))$ параметры Q и b для ВИНЗ также занулялись, подбирались параметры C и D для лучшего совпадения с экспериментальными диаграммами деформирования, эксперимент брался для КГО [001]. Предел текучести брался из табл. 6.4. Определялись параметры модели для температуры 20 °С, а дальше для других температур, для которых известны пределы текучести, параметры модели брались такие же, как и для 20 °С.

Результаты сравнения диаграмм деформирования для 20 °С показаны на рис. 6.8.

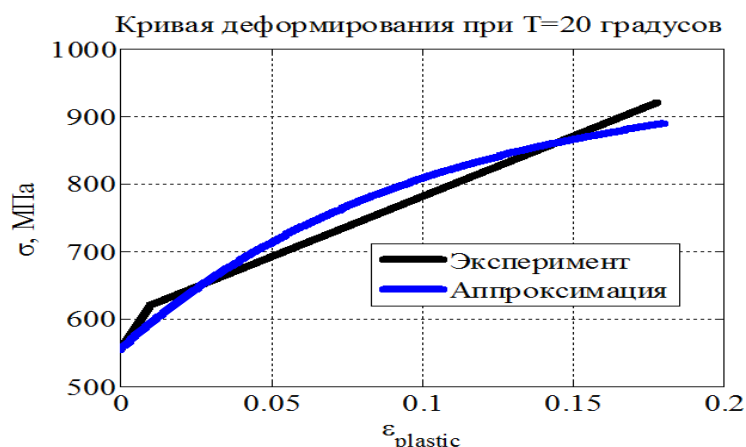


Рис. 6.8. Сравнение диаграмм деформирования для ВИНЗ при температуре 20 °С.

Параметры модели пластичности для сплава ВИНЗ при разных температурах сведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6. Параметры модели пластичности для сплава ВИНЗ.

Параметры \ T	20 °С	700 °С	800 °С	900 °С	1000 °С	1100 °С
C, МПа	4000	4000	4000	4000	4000	4000
D, -	10	10	10	10	10	10

Для определения параметров пластичности и ползучести для сплава ЖС32 использовались экспериментальные данные из книг [1] и [3]. По свойствам ползучести брались кривые ползучести при 850, 975 и 1050 °С, считались параметры модели Нортона, для 20 °С, как и раньше значения параметров Нортона брались такие же, как и для других сплавов из-за отсутствия ползучести при данной температуре. Экспериментальные данные по ползучести для сплава ЖС32 приведены на рис. 6.9.

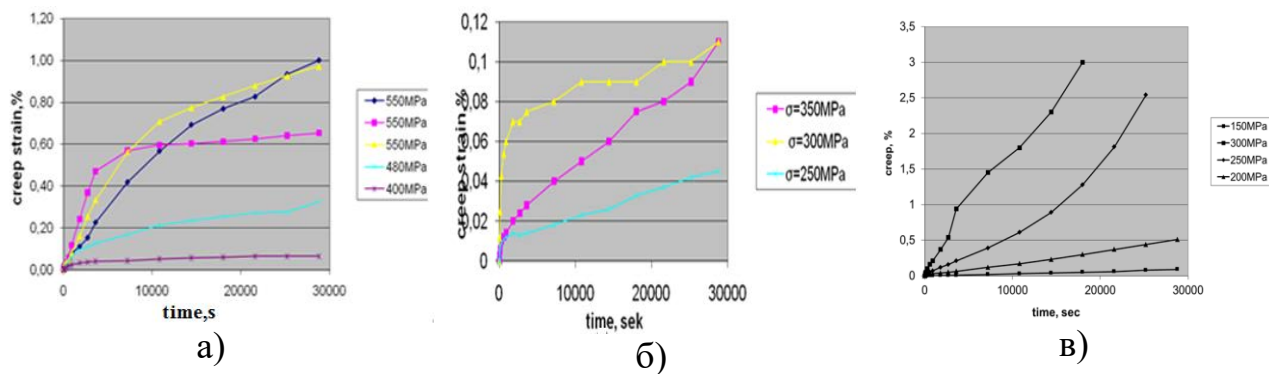


Рис. 6.9. Кривые ползучести сплава ЖС32 при а) 850 °С, б) 975 °С, в) 1050 °С [1,3].

На рис. 6.10. приведены диаграммы деформирования ЖС32 при разных температурах.

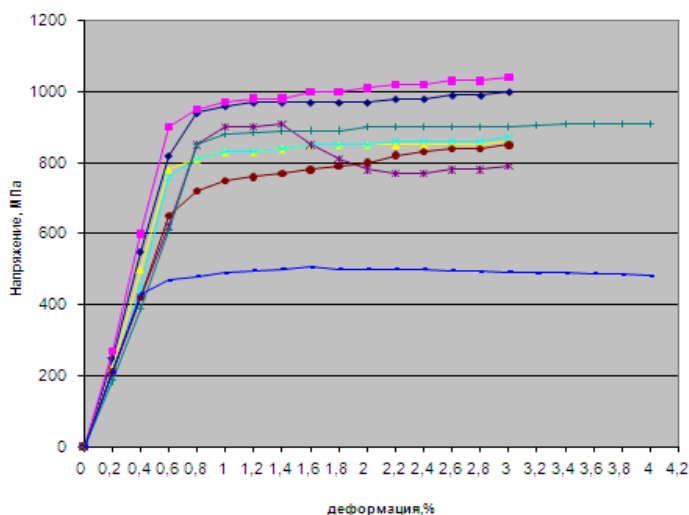


Рис. 6.10. Диаграмма деформирования ЖС32 при разных температурах [1,3].

Параметры модели Нортона определялись аналогично другим сплавам на основе подбора 2 коэффициентов, принималось $n=8$ для всех температур, только в этом случае с кривых ползучести снимались значения деформаций ползучести при разных временах и при разных напряжениях и вручную считались скорости деформации ползучести в зависимости от напряжений. Графики сравнения кривых ползучести ЖС32 и аппроксимации по модели Нортона для 3 температур приведены на рис. 6.11.

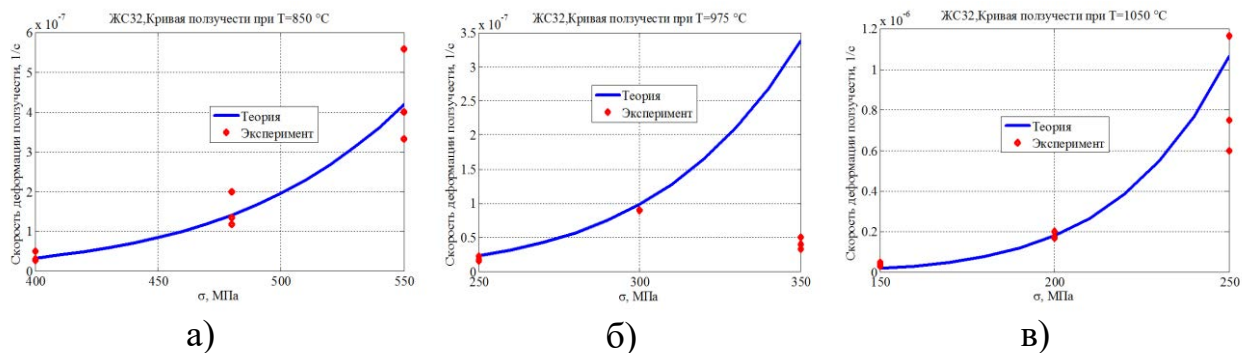


Рис. 6.11. Аппроксимация кривых ползучести ЖС32

а) 850°С,б) 975°С,в) 1050°С

В таблице 6.7. даны посчитанные значения модели Нортона для ЖС32 для 4 температур в экспериментах.

Таблица 6.7. Параметры модели Нортона для сплава ЖС32 при температурах 20, 850 °С, 975 °С, 1050 °С.

Параметры\Т	20 °С	850 °С	975 °С	1050 °С
А, с ⁻¹ МПа ⁻ⁿ	1·10 ⁻⁴²	5·10 ⁻²⁹	1.5·10 ⁻²⁷	7·10 ⁻²⁶
n, -	8	8	8	8

Для определения параметров модели Нортона при других температурах опять же использовалась интерполяция по закону Аррениуса, как и для ВЖМ4.

Для определения параметров пластичности модели Cailletaud: $\sigma = \sigma_y + Q(1 - \exp(-b\varepsilon_p)) + \frac{c}{D}(1 - \exp(-D\varepsilon_p))$ параметры Q и b для ЖС32 подбирались для лучшего совпадения с экспериментальными диаграммами деформирования, а параметры C и D, наоборот, занулялись. Также принимались значения дополнительных физических параметров модели N=1, q=0.7, которые раньше занулялись, их описание дано раньше в описании модели. Значения их принимались одинаковыми для всех температур.

Результаты аппроксимации диаграмм деформирования для температур 20, 800 и 1050 °С показаны на рис. 6.12.

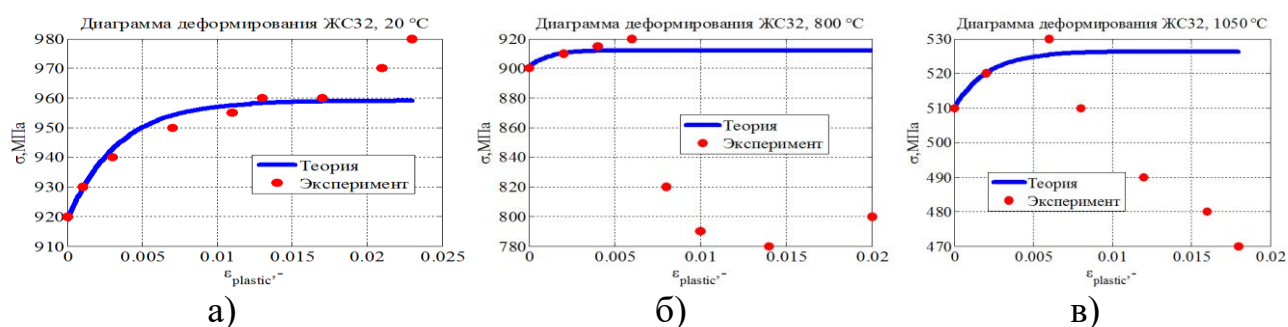


Рис. 6.12. Сравнение экспериментальных данных и аппроксимирующей кривой ЖС32 для а) 20 °С, б) 800 °С, в) 1050 °С

Параметры модели пластичности для сплава ЖС32 при разных температурах сведены в табл. 6.8.

Таблица 6.8. Параметры модели пластичности для сплава ЖС32.

Параметры \ T	20 °С	800 °С	1050 °С
σ_y	919	901	510
Q, МПа	4000	4000	4000
b, -	10	10	10

Свойства пластичности при остальных температурах находились путем линейной интерполяции известных данных.

В случае поликристаллического сплава ЧС70 термоупругие свойства задавались аналогичными термоупругим свойствам ЖС6Ф из [3]. Свойства пластичности и ползучести брались из [42] и [3]. По изохронным кривым при 700 °С и 750 °С определялись параметры модели обобщенного Нортона с упрочнением A, m, n . Изохронные кривые ползучести сплава ЧС70 представлены на рис. 6.13.

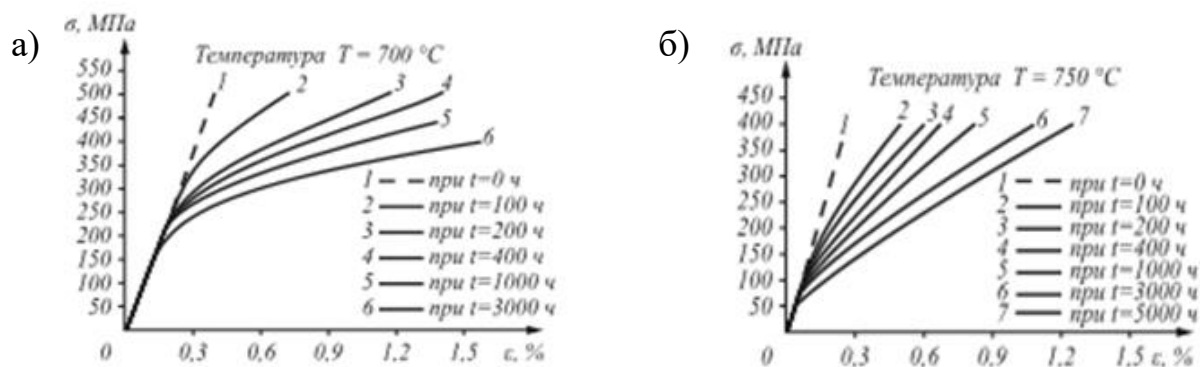


Рис. 6.13. Изохронные кривые ползучести ЧС70 при а) 700 °С, б) 750 °С [3].

В таблице 6.9 приведены механические свойства ЧС70 при разных температурах.

Таблица 6.9. Механические свойства ЧС70 [42].

Сплав	Температура, °С	Механические свойства			
		$\sigma_{0,2}$ МПа	σ_B МПа	δ %	Ψ %
ЧС70–ВИ Плавка1	20	876	962	2,6	8,8
	600	855	933	5,9	9,4
	800	748	886	11,8	23,8
	850	768	865	14,2	18,5
	900	574	646	12,6	22,6

При определении параметров ползучести ЧС70 с графиков считывались деформации при разных напряжениях и при временах 100 ч, 200 ч и 400 ч. При построении графиков из полной деформации на графиках вычиталась упругая деформация и строились графики зависимости деформации ползучести от напряжения при разных временах: 100 ч, 200 ч и 400 ч и выводились на 1 графике для одной температуры. Графики сравнения расчетных кривых с экспериментальными для 700 °С и 750 °С представлены на рис. 6.14.

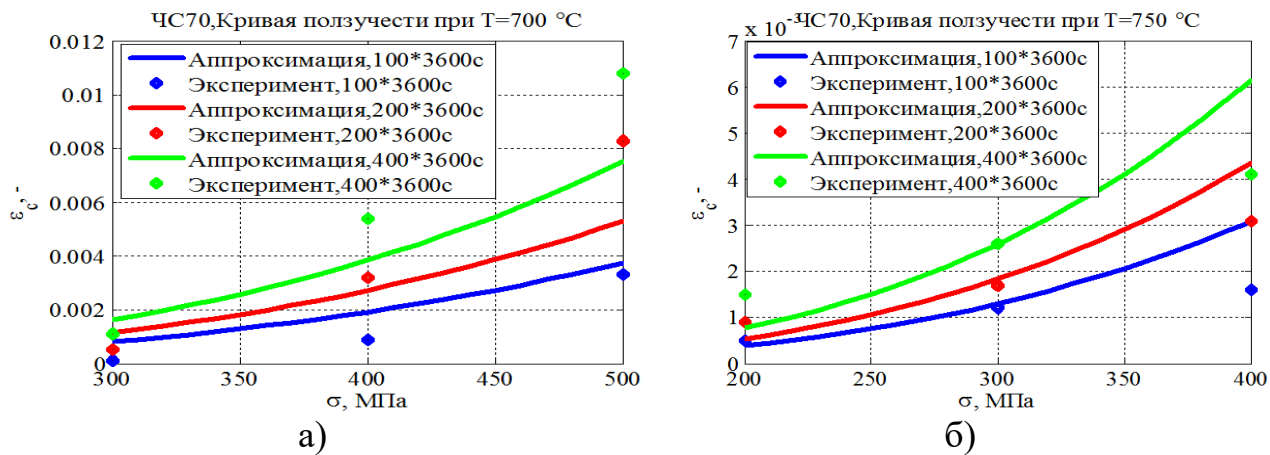


Рис. 6.14. Графики сравнения кривых ползучести при а) 700 °С и б) 750 °С

Посчитанные коэффициент модели Нортона с упрочнением представлены в таблице 6.10. Коэффициенты модели интерполировались с учетом закона Аррениуса для деформации ползучести.

Таблица 6.10. Параметры модели Нортона с упрочнением для сплава ЧС70 при температурах 700 °С, 750 °С.

	$A, \text{МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-m}$	n	m
700 °С	$5 \cdot 10^{-14}$	3	0.5
750 °С	$8 \cdot 10^{-14}$	3	0.5

При задании диаграммы деформирования приближенно считалось, что предел текучести $\sigma_{0,2}$ соответствует пластической деформации в 0.2 %. Деформация, соответствующая временному сопротивлению σ_b , приближенно считалась равной половине относительного удлинения при разрыве δ . Дальнейшая часть диаграммы приближенно экстраполировалась исходя из уменьшения касательного модуля. Получившаяся диаграмма деформирования при разных температурах ЧС70 представлена на рис. 6.15.

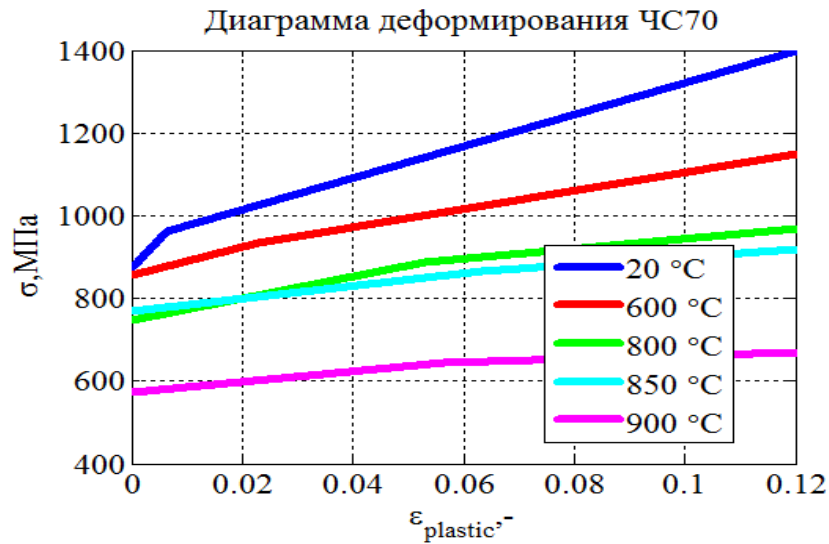


Рис. 6.15. Диаграмма деформирования ЧС70

При задании термоупругих свойств сплав ЧС70 считался изотропным, так как состоит из нескольких монокристаллов, никакая из ориентаций монокристаллов не преобладает над остальными.

В таблице 6.11 представлены свойства поликристаллического сплава ЧС70, которые использовались при расчете на термоусталость.

Таблица 6.11. Механические свойства ЧС70, использовавшиеся в расчете [3,42]:

<i>T</i>	°C	20	600	700	800	850	900
E_{001}	МПа	196200	163500	159500	148000	137500	125000
ν	-	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
α	1/К	$1.15 \cdot 10^{-5}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{\gamma 001}$	МПа	876	855	-	748	768	574
n	-	3	3	3	3	3	3
m	-	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
A	МПа ⁻ⁿ с ^{-m}	$8.4 \cdot 10^{-20}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$3.3 \cdot 10^{-13}$

Критерий линейного суммирования повреждений Л.Б. Гецова определяется равенством:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^p)^k}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^c)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max}} \frac{\varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^p}{\varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^p(T)} + \max_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max}} \frac{\varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^c}{\varepsilon_{\varepsilon_{iQ}}^c(T)} \quad (6.1)$$

При расчетах оказалось, что размахи пластической деформации и деформации ползучести в пределах цикла практически равны 0, поэтому 2 первых слагаемых пропадают. Число циклов определялось на основе суммарно накопленных деформаций пластичности и ползучести, а также аккумулируемых деформаций пластичности и ползучести за цикл. То есть, аппроксимировалась средняя установившаяся деформация ползучести за 1 цикл $\Delta\varepsilon^c$ и деформация пластичности за 1 цикл $\Delta\varepsilon^p$. Критерий образования магистральной трещины: $D=1$. Вычислялись по графику суммарно накопленные через некоторое количество циклов деформации пластичности и ползучести ε^c и ε^p . На основе экспериментальных данных по числу циклов до образования магистральной трещины в случае без выдержки определялись предельные деформации пластичности и ползучести ε_r^p и ε_r^c , которые полагались равными друг другу: $\varepsilon_r^p = \varepsilon_r^c = \varepsilon^r$. Из этого определялось число циклов:

$$\frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^r} + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^r} + \frac{N(\Delta\varepsilon^c + \Delta\varepsilon^p)}{\varepsilon^r} = 1,$$

отсюда находится число циклов N в случае выдержки: $N = \frac{\varepsilon^r - \varepsilon^c - \varepsilon^p}{\Delta\varepsilon^c + \Delta\varepsilon^p}$.

6.2. Расчетные кривые влияния времени выдержки при максимальной температуре для различных сплавов: ВЖМ4, ЖС32 и ВИНЗ и их сравнительный анализ

Как уже упоминалось, моделирование термоусталостного разрушения проводилось с помощью КЭ комплекса PANTOCRATOR. Конечно-элементные вычисления проводились для корсетного образца (расчетная длина образца принималась 40 мм для всех сплавов) в упрощенной постановке без контактов образца и установки, без самой установки для эксперимента и фиксирующих болтов, так как упрощенная задача с такой длиной образца примерно эквивалентна решению задачи с учетом экспериментальной установки.

Анализировалось влияние времени выдержки при максимальной температуре в цикле от 1 минуты до 1 часа на число циклов до образования магистральной трещины. Время выдержки варьировалось до 1 часа, чтобы смоделировать работу образца (лопатки) из монокристаллического сплава в условиях полета самолета при максимальной температуре, этот полет длится в среднем как минимум час и больше. Проводились вычисления для сплавов ВЖМ4, ЖС32 и ВИН3. Максимальная температура в цикле - 1050 °С, минимальная температура варьировалась от 100 до 900 °С с шагом в 200 °С. Время нагрева и охлаждения для всех сплавов было одинаковым и равнялось 10с и 16с. Выбор режима нагрева и охлаждения был выбран с учетом наибольшего количества экспериментальных данных для данного режима с целью дальнейшей верификации расчетных кривых на экспериментах (об этом речь в следующей главе этого раздела). Конечно-элементная модель образца для анализа влияния выдержки и пример изменения температуры с выдержкой и без выдержки для случая температурного режима 700-1050 °С представлена на рис. 6.16. Как уже упоминалось, образец закреплялся по граням, перпендикулярным оси x в направлении оси x, а также фиксировался ряд точек по осям y и z для исключения твердотельных перемещений.

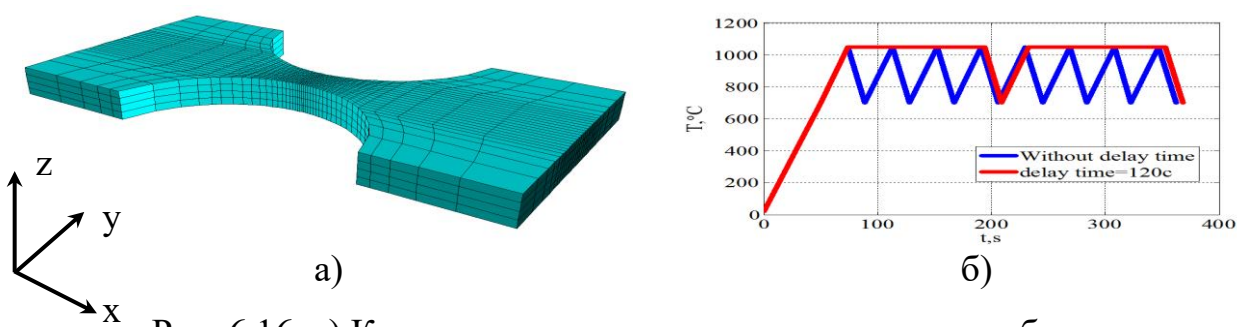


Рис. 6.16. а) Конечно-элементная модель корсетного образца,

б) Схематичной изменение температуры в центральной точке образца, режим 700-1050 °С

Распределение температуры вдоль образца при максимальной и минимальной температурах принято такое же, как в эксперименте с линейной интерполяцией во времени. Сравнительный расчетный график влияния

времени выдержки для нескольких температурных режимов с общей $T_{max} = 1050$ °С для сплавов ВЖМ4, ЖС32 и ВИН3 а также график сравнения минимального цикла для исследуемых режимов представлен на рис. 6.17.

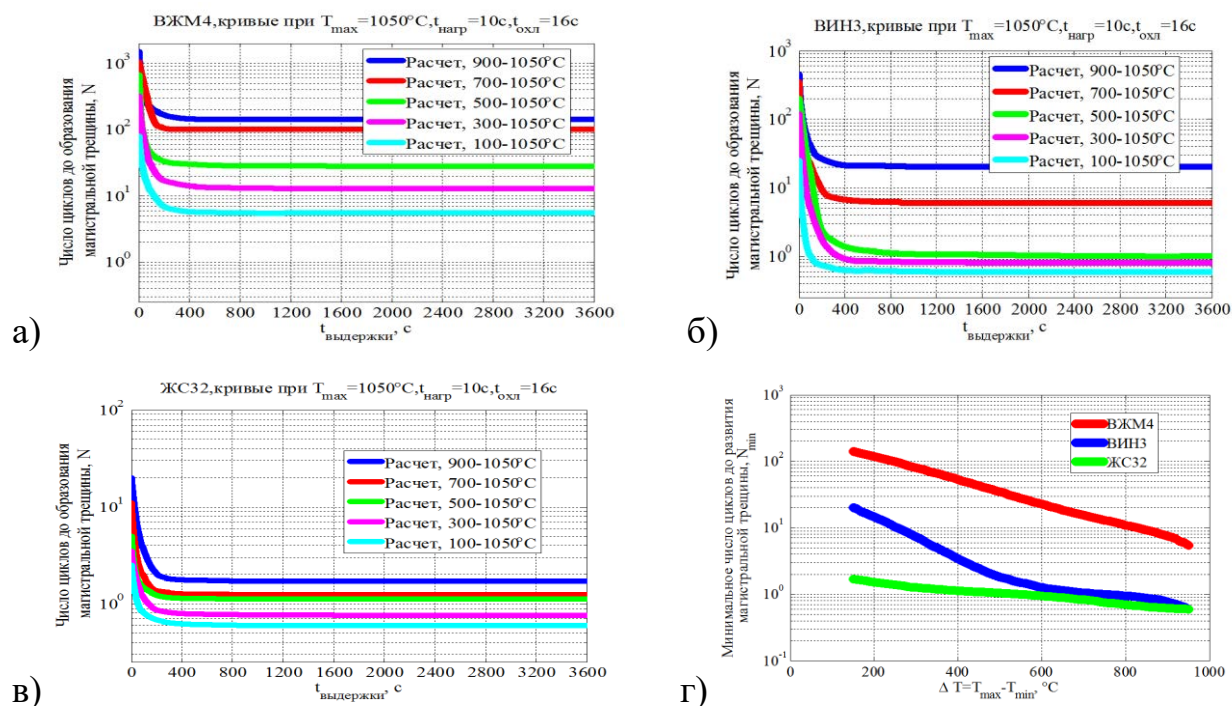


Рис. 6.17. а), б), в) Графики сравнения влияния времени выдержки для нескольких температурных режимов ВЖМ4, ВИН3, и ЖС32, г) график сравнения минимального числа циклов для ВЖМ4, ВИН3, и ЖС32.

Сравнительный график показывает, что наибольшей термоусталостной прочностью при всех температурных режимах обладает ВЖМ4, потом идет ВИН3, а наименьшей прочностью – ЖС32.

6.3. Экспериментальная верификация полученных конечно-элементных результатов на термоусталостную прочность

Расчетные кривые (полученные путем конечно-элементного моделирования) строились для сплавов ВЖМ4, ЖС32, ВИН3 и ЧС70 на основе сравнения с экспериментальными данными, в том числе и для режимов, у которых T_{max} отлично от 1050 °С. Время выдержки в расчетных кривых, как было уже сказано, варьировалось от 1 минуты до 1 часа. Экспериментальные данные, для которых было проведено сравнение с

расчетными кривыми или которые использовались для определения экспериментальных данных при расчетных режимах, приведены в таблице 6.12.

Таблица 6.12 Экспериментальные данные по термоусталостной прочности монокристаллических никелевых сплавов.

Режим термоцикл., °С	$T_{\text{цикла}}, \text{с}$	$t_{\text{нагр}}, \text{с}$	$t_{\text{охл}}, \text{с}$	$N_{\text{раз.}}$	N до образ. магистр. трещины
ВЖМ4					
700-1050	13	6	7	5391	1055
700-1050, с выдержкой	146	10	16	170	40
500-1050	39	24	15	768	125
500-1050	22	7	15	746	670
500-1050, с выдержкой	148	8	20	91	27
250-1000	58	18	40	602	350
150-900	80	28	52	1218	125
150-900	77	17	60	2069	125
ЖС32					
700-1050	30	15	15	1772	11
700-1050, с выдержкой	2 мин. + 23с	13	10	612	2
500-1050	27	14	13	383	5
500-1100, с выдержкой	2 мин.+29с.	13	16	141	2
200-1100	90	35	55	40	12
150-900	100	25	75	3654	1100
150-900, с выдержкой	2 мин. +115с.	15	100	367	200
ВИН3					
500-1050	42	25	17	964	200
500-1050, с выдержкой	146	10	16	42	11
ЧС70					
350-850	47	22	25	3330	82
350-850, с выдержкой 2	152	12	20	80	20
350-850, с выдержкой 5	345	25	20	44	2

Экспериментальные данные для близких времен нагрева и охлаждения объединялись для большего числа экспериментальных данных для одного режима. Сравнение расчетных кривых с экспериментальными данными для

сплава ВЖМ4 представлено на рис. 6.18. ϵ_r – предельная деформация при одноосном растяжении, принятая для ползучести и пластичности одинаковой.

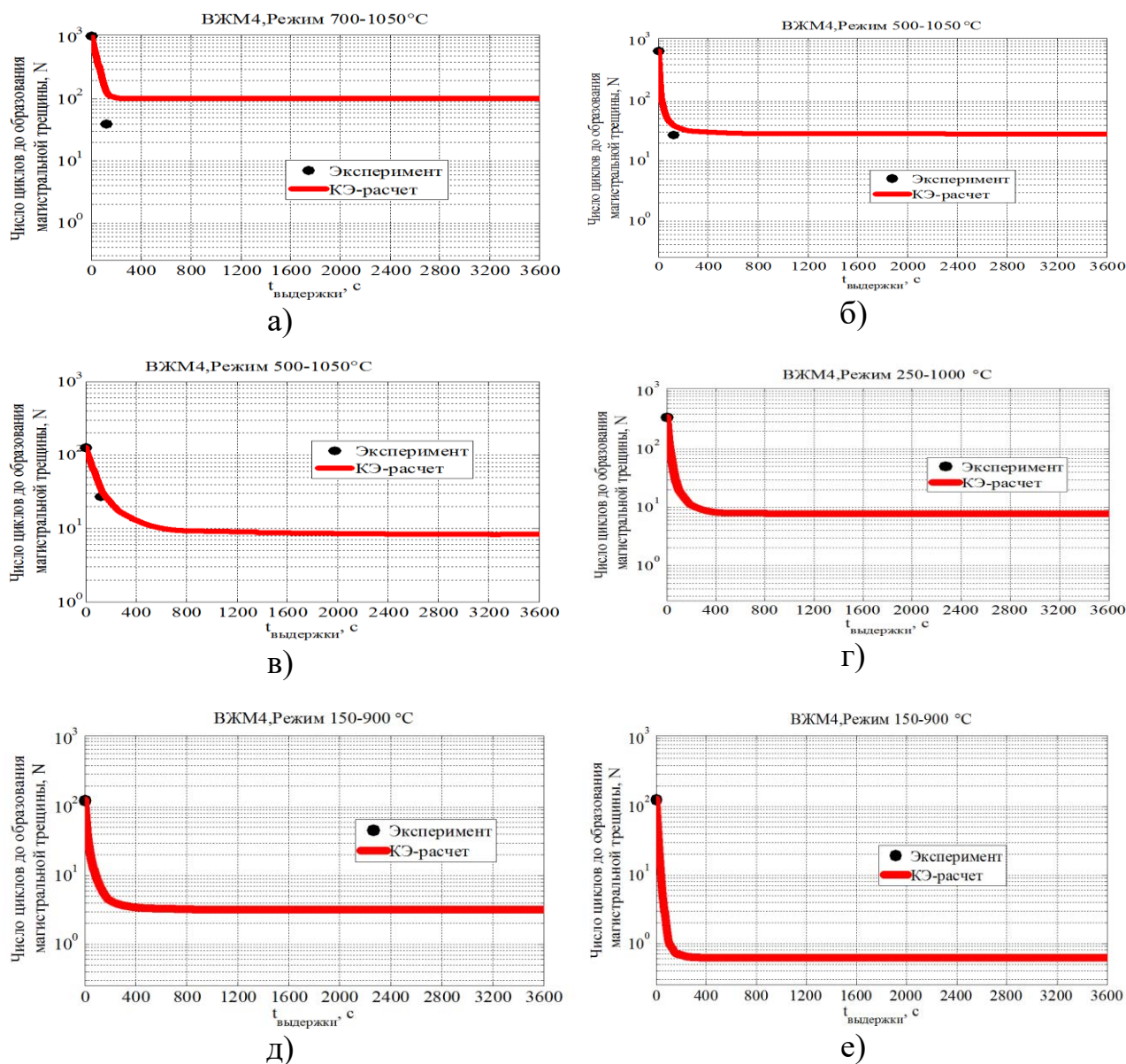


Рис. 6.18. Сравнение результатов КЭ-моделирования (расчетные кривые) с экспериментальными данными для сплава ВЖМ4:

- а) режим 700-1050°C, время нагрева 10с, время охлаждения 16с, $\epsilon_r = 0.41$,
- б) режим 500-1050°C, время нагрева 10с, время охлаждения 16с, $\epsilon_r = 0.40$,
- в) режим 500-1050°C, время нагрева 24с, время охлаждения 15с, $\epsilon_r = 0.39$,
- г) режим 250-1000°C, время нагрева 18с, время охлаждения 40с, $\epsilon_r = 0.37$,
- д) режим 150-900°C, время нагрева 17с, время охлаждения 60с, $\epsilon_r = 0.31$,
- е) режим 150-900°C, время нагрева 28с, время охлаждения 52с, $\epsilon_r = 0.32$,

Сравнение расчетных кривых с экспериментальными данными для сплава ЖС32 представлено на рис. 6.19.

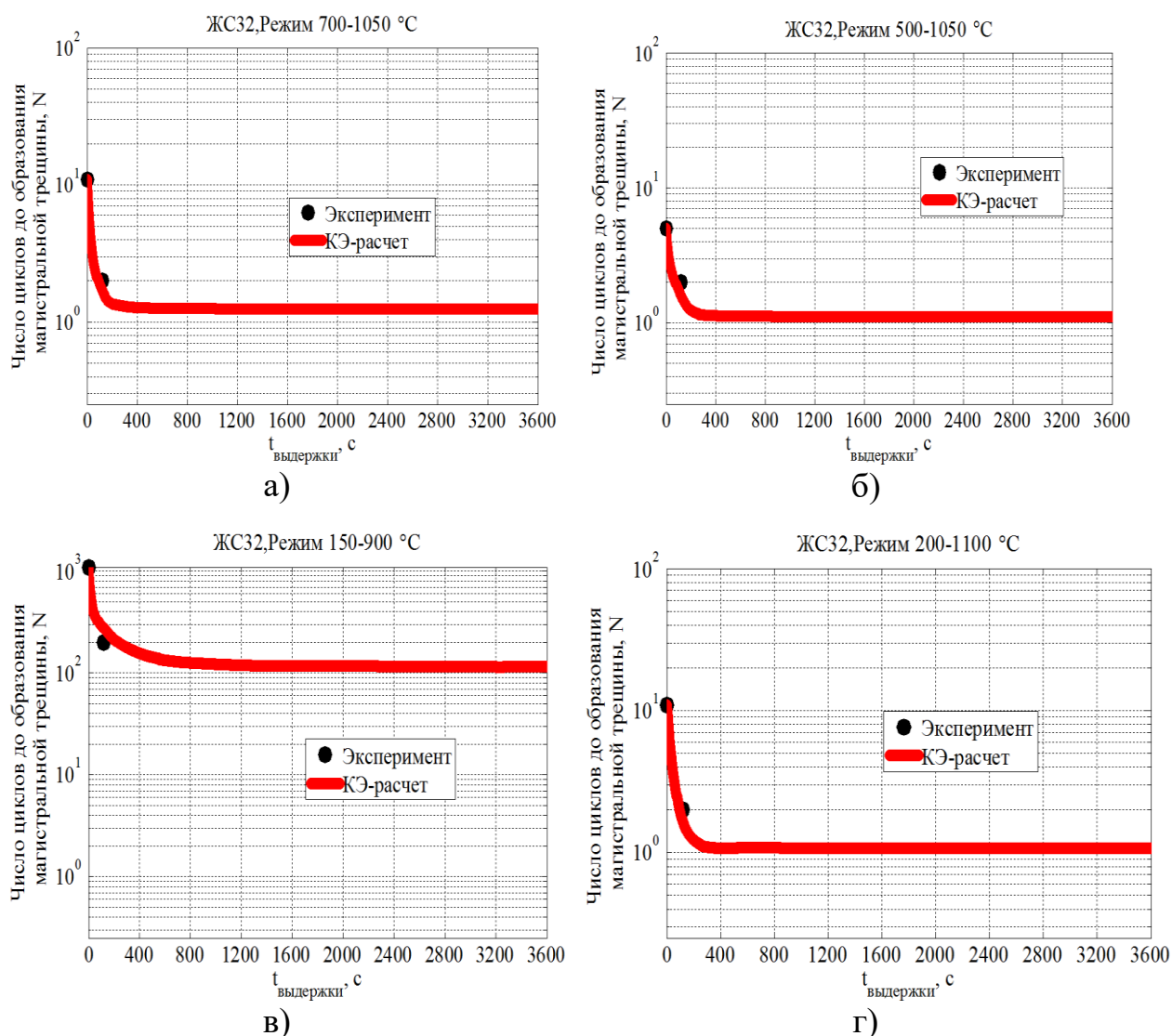


Рис. 6.19. Сравнение результатов КЭ-моделирования (расчетные кривые) с экспериментальными данными для сплава ЖС32:

- а) режим 700-1050°С, время нагрева 15с, время охлаждения 15с, $\epsilon_r = 0.42$,
- б) режим 500-1050°С, время нагрева 15с, время охлаждения 15с, $\epsilon_r = 0.42$,
- в) режим 150-900°С, время нагрева 25с, время охлаждения 75с, $\epsilon_r = 0.33$.
- г) режим 200-1100°С, время нагрева 35с, время охлаждения 55с, $\epsilon_r = 0.35$.

Сравнение расчетных кривых с экспериментальными данными для монокристаллического сплава ВИНЗ и поликристаллического сплава ЧС70 представлено на рис. 6.20.

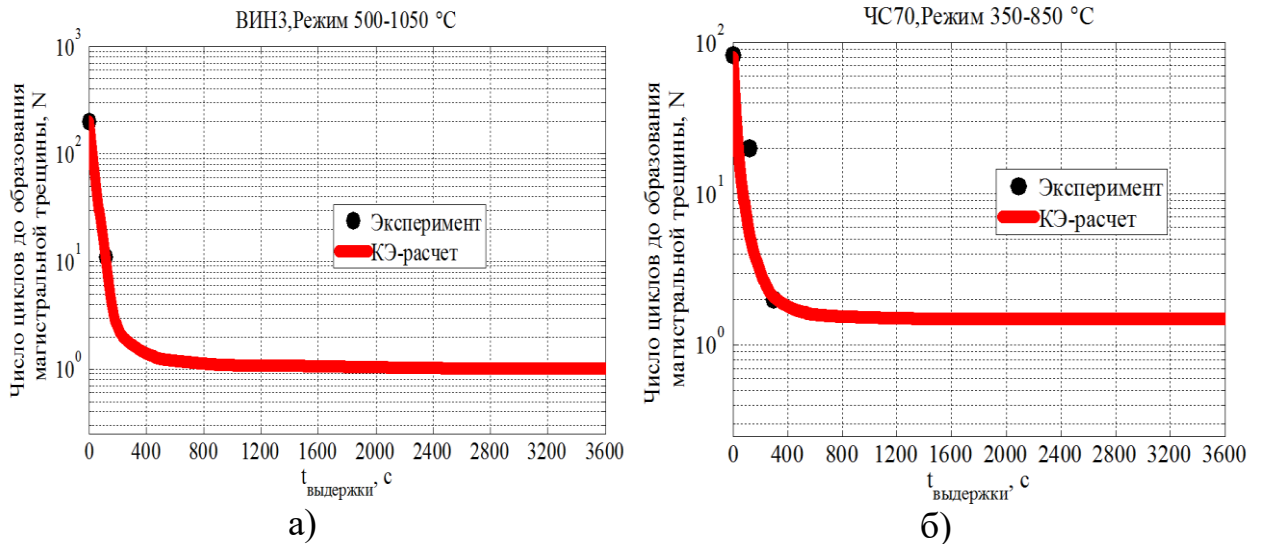


Рис. 6.20. Сравнение результатов КЭ-моделирования (расчетные кривые) экспериментальными данными для: а) сплава ВИНЗ, режим 500-1050 °С, время нагрева 10с, время охлаждения 16с, $\epsilon_r = 0.42$, б) сплава ЧС70, режим 350-850 °С, время нагрева 17с, время охлаждения 20с, $\epsilon_r = 0.07$.

Как видно из сравнения, в некоторых режимах расчетные кривые накладываются на экспериментальные данные, в некоторых показывают хорошую корреляцию с экспериментом, что подтверждает корректность полученных расчетных кривых и для других режимов, где нет экспериментальных данных.

7. Заключение

1. В результате выполненных исследований было впервые сделано моделирование нагрева корсетного образца для экспериментов на термоусталость электрическим током на установке, разработанной в ЦКТИ.

В результате проведенного расчета было получено расчетное распределение температуры вдоль образца, которое хорошо коррелирует с экспериментальными данными для всех варьируемых T_{\max} в цикле, по которым были известны экспериментальные данные. Это позволяет с большой достоверностью определять поля пластических деформаций в образце, что влияет на достоверность определения циклов до образования магистральной трещины в образце и число циклов до его разрушения при циклическом изменении температуры.

2. После установления распределения температуры вдоль корсетного образца при максимальной температуре была решена вспомогательная задача по обоснованию эквивалентной длины образца в упрощенной постановке для решения задачи на термоусталостную прочность. При многовариантном варьировании длины образца с целью упрощения конечно-элементной постановки задачи (решении термопластической задачи) для монокристаллических сплавов ВЖМ4, ЖС32, ВИНЗ и одного поликристаллического сплава ЖС6Ф для нескольких температурных режимов была установлена эквивалентная длина в упрощенной постановке. В результате вычислений показано, что данная эффективная длина не зависит от температурного режима, а зависит только от свойств самого сплава. Кроме того, было установлено, что вид упрочнения (изотропное или кинематическое) также не влияет на эффективную длину образца.

3. В результате решения вспомогательной задачи и нахождения эффективной длины для сплавов при различных режимах температур были

найденны поля пластических деформаций для нескольких сплавов и для нескольких режимов температур.

4. После нахождения эффективной длины для нескольких сплавов, была принята одна эффективная длина в термоусталостной задаче для всех монокристаллических сплавов, которая хорошо коррелирует с найденной для некоторых сплавов. В результате проведенных расчетов с одной эффективной длиной образца в 40 мм для сплавов ВЖМ4, ЖС32, ВИНЗ и ЧС70 расчетные кривые влияния времени выдержки в некоторых случаях накладываются на экспериментальные точки, в некоторых – хорошо коррелируют с ними. Полученная корреляция с экспериментальными данными подтверждает обоснованность построенных расчетных кривых.

5. Также были построены расчетные кривые с варьируемым временем выдержки от 1 минуты до 1 часа для сплавов ВЖМ4, ЖС32 и ВИНЗ для одного из режимов нагрева и охлаждения для температурных режимов, для которых экспериментальные данные отсутствуют. Для этого режима было проведено сравнение термоусталостной прочности сплавов при данном режиме нагрева и охлаждения. Результаты расчета показали, что наибольшей термоусталостной прочностью обладает сплав ВЖМ4, потом ВИНЗ, и наименьшей – ЖС32. В дальнейшем планируется провести подобное исследование для других температурных режимов монокристаллических сплавов и для поликристаллических сплавов.

Исследование выполнено при поддержке стипендиальной программы Siemens и гранта РФФИ № 16-08-00845.

Список литературы

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качалов Е.Б. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. – М.: Машиностроение, 1997.
2. Каблов Е.Н., Голубовский Е.Р. Жаропрочность никелевых сплавов. – М.: Машиностроение, 1998.
3. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин [Текст]: в 2 кн./ Л.Б. Гецов – Рыбинск: Газотурбинные технологии, 2010.
4. Баландин Ю.Ф. Термическая усталость металлов в судовом машиностроении.- Ленинград: Судостроение, 1967.- 272с.
5. Дульнев Р.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов.- М.: Машиностроение, 1980.
6. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ. Вып. 296, 2009, с. 83-91.
7. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. с. 50-62.
8. Getsov L.B., Semenov A.S., Staroselsky A. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading // Materials and technology. 2008. Vol. 42, p. 3–12.
9. Coffin L.F. Prediction parameters and their application to high temperature low cycle fatigue. In: Proceedings of second international conference on fracture. London: Chapman's Hall; 1969. p. 56-64.
10. Manson S.S. Fatigue: a complex subject – some simple approximations. Exp. Mech. 1965; 5(7): 193-226.
11. Ножницкий Ю.А., Голубовский Е.Р. О прочностной надежности монокристаллических рабочих лопаток высокотемпературных турбин

перспективных ГТД // Прочность материалов и ресурс элементов энергооборудования : Тр. ЦКТИ. –СПб, 2009.- Вып. 296.-с.74-82.

12. Голубовский Е.Р., Епишин А.И., Светлов И.Л. Анизотропия характеристик статической и циклической прочности монокристаллов литого никелевого жаропрочного сплава // Вестник двигателестроения. 2004, № 2.

13. Толорайя В.Н., Петухов А.Н., Колотников М.Е., Харьковский С.В., Остроухова Г.А. Некоторые особенности формирования монокристаллических отливок на примере безуглеродистого сплава ВЖМ5 // Вестник двигателестроения. 2011, № 2.

14. Гецов Л.Б., Добина Н.И., Рыбников А.И., Семенов А.С., Старосельский А., Туманов Н.В. Сопротивление монокристаллического сплава термической усталости // Проблемы прочности. 2008, № 5.

15. Семенов А.С., Л.Б. Гецов, Семенов С.Г. Модели неупругого деформирования и разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015г.- 3408-3410с.

16. Тихомирова Е.А., Азизов Т.Н., Сидохин Е.Ф. Устройство для контроля сопротивления материалов термической усталости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012, № 3(34).

17. Тихомирова Е.А., Сидохин Е.Ф. Зависимость термической усталости жаропрочных сплавов от максимальной температуры нагрева в цикле испытаний // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2014, № 5(47), часть 2.

18. Павлов П.А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность - Л.: Машиностроение. Ленингр.отд. - ние, 1988.-252с.: ил.

19. Wilhelm F., Affeldt E., Fleischmann E., Glatzel U., Hammer J. Modeling of the deformation behavior of single crystalline Nickel-based superalloys under thermal mechanical loading // International journal of fatigue, 2017;97; p.1-8.

20. Kanesund Jan, Moverare Johan J., Johansson Sten Deformation and damage mechanisms in IN792 during thermomechanical fatigue // Materials science and engineering, 2011.- p. 4658-4668.
21. Pineau Andre, Antolovich Stephen D. High-temperature fatigue of nickel-base superalloys – A review with special emphasis on deformation modes and oxidation // Engineering failure analysis, 2009. –p. 2668-2697.
22. Claudio R.A., Branco C. et al. Fatigue life prediction and failure analysis of a gas turbine disc using the finite element method. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2004;27; 849-60.
23. Савиковский А.В., Семенов А.С., Гецов Л.Б. Анализ влияния выдержки на термоусталостную прочность монокристаллических сплавов на основе конечно-элементного моделирования натуральных экспериментов // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2017. С. 135-138.
24. Савиковский А.В., Семенов А.С. Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования корсетного образца для термоусталостных испытаний при различной степени детализации его закрепления // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2017. С. 139-141.
25. Grishchenko A.I., Savikovskiy A.V., Semenov A.S., Getsov L.B. COMPARATIVE ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF SPECIMENS FOR THERMAL FATIGUE TESTS // Book of abstracts, Saint-Petersburg, September 25-27, 2017, с.70-71.
26. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.

27. Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., Forest, S., Blétry, M.: Non-Linear Mechanics of Materials, Springer, 2010.
28. Физические теории пластичности: учеб. пособие / П.В. Трусов, П.С. Волегов, Н.С. Кондратьев.- Пермь.: Изд-во Пермского нац. исследоват. политехн. ун-та, 2013.-244с.
29. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 2. Пер. с нем. - М.-Л.: ГТТИ, 1945. — 620 с.
30. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов /Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова – М.: Стройиздат, 1982. - 448с.
31. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. Б.Е. Победри; - М.: Мир, 1976.- 271с.
32. Петрушин Н.В., Логунов А.В., Ковалев А.И., Зверев А.Ф., Торопов В.М., Федотов Н.Н. Теплофизические свойства направленно закристаллизованной эвтектической композиции Ni_3Al-Ni_3Nb // Теплофизика высоких температур, 1976, №3.
33. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах.- М.: Metallurgia, 1989.-384с.
34. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. - М.: Атомиздат, 1968.
35. Масленков С.Б., Масленкова Е.А. Стали и сплавы при высоких температурах. - М.: Metallurgia, 1991.
36. Май Ш., Семенов А.С. Моделирование процессов неупругого циклического деформирования монокристаллических образцов // Материалы XXXIX Недели науки СПбГПУ. 2010. Ч. V. С. 73-74.
37. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Светлов И.Л., Демонис И.М. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения. Юбилейный науч.-техн. сб. Авиационные материалы и технологии. М:Труды ВИАМ 2012, С.36-52.
38. Семенов С.Г., Гецов Л.Б., Семенов А.С., Петрушин Н.В., Оспенникова О.Г., Живушкин А.А. К вопросу о повышении ресурсных возможностей

сопловых лопаток газотурбинных двигателей на основе использования нового монокристаллического сплава // Надежность, прочность, износостойкость машин и конструкций. 2016. №.4, с. 30-38.

39. Семёнов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

40. Расчетно-экспериментальное определение долговечности лопатки 1 ступени ТВД с учетом термоциклического нагружения и анизотропии характеристик свойств материалов: технический отчет, рук. Гецов Л.Б.; ответственный исполнитель Семенов А.С. –СПб, 2013.- 69с.

41. Определение сопротивления ползучести сплава ВИНЗ на образцах после термовакуумной обработки: технический отчет, рук. Мельников Б.Е.; ответственный исполнитель Семенов С.Г.- СПб, 2014.- 33с.

42. Скуднов В. А., Тарасенко Ю. П., Бердник О. Б. Выбор оптимальной рабочей температуры никелевых сплавов ЧС70-ВИ и ЧС88У-ВИ с позиции синергетики // Технология металлов. – 2008. – № 12. – С. 16–20.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОРСЕТНОГО ОБРАЗЦА ДЛЯ
ТЕРМОУСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНИ
ДЕТАЛИЗАЦИИ ЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Прогнозирование ресурса элементов газотурбинных установок (ГТУ) является актуальной для практики задачей. Рабочие температуры элементов ГТУ могут достигать высоких значений и циклически изменяться во времени. В связи с этим становятся актуальными задачи исследования усталостной и термоусталостной прочности [1,2] материалов и элементов ГТУ, например, рабочих и направляющих лопаток [3] в авиационных двигателях.

В последнее время для изготовления лопаток ГТУ используются жаропрочные моно- и поликристаллические сплавы, состоящие из раствора никеля (γ -фазы) и упрочняющей γ' -фазы на основе интерметаллида Ni_3Al , такие как ВЖМ4, ЖС32, ЖС36, ВИНЗ, ЖС6Ф и т.д. Для исследования термоусталостной прочности указанных материалов проводятся эксперименты на плоских корсетных образцах на установке, разработанной в НПО ЦКТИ (см. рис. 1) [4].



Рис. 1. Установка для проведения экспериментов на термическую усталость.

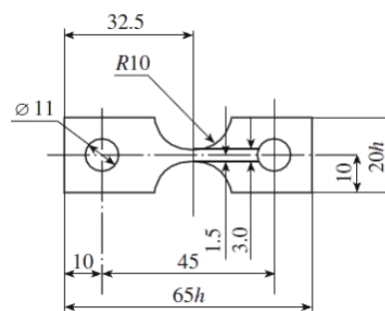


Рис 2. Геометрия корсетного образца для термоусталостных испытаний.

Зафиксированные при помощи двух болтов корсетные образцы (рис. 2) периодически нагреваются пропусканием электрического тока. Форма корсетных образцов обеспечивает условие отсутствия потери устойчивости при сжатии. Максимальная и минимальная температуры цикла поддерживаются постоянными (рис. 3).

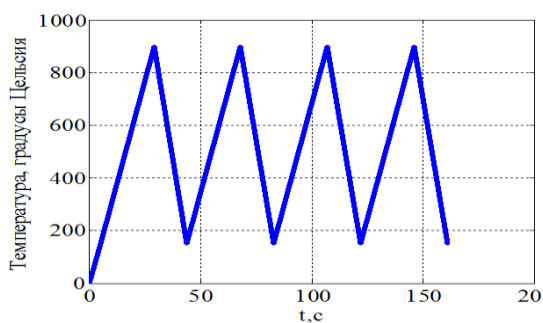


Рис. 3. Схематическое представление изменения температуры в центральной точке образца.

Экспериментально определенное при помощи 7 термопар распределение температуры вдоль оси образца, отсчитываемое от его центральной точки, показано на рис. 4.

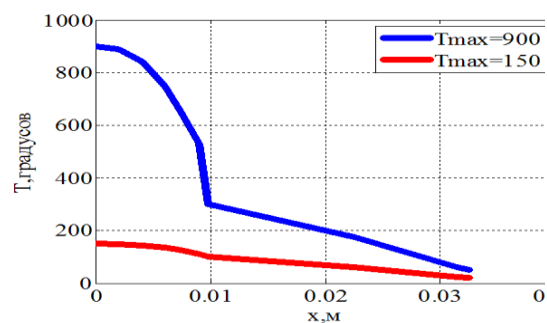


Рис. 4. Экспериментально определенное распределение температуры вдоль оси образца.

При проведении конечно-элементных (КЭ) расчетов рассматривались образцы из различных моно- и поликристаллических материалов. Результаты представленные ниже соответствуют поликристаллическому сплаву ЖС6У [3]. Болты и оснастка выполнены из стали. При моделировании процессов неупругого деформирования и разрушения корсетного образца, наблюдаемых в экспериментах, учитывалось неоднородное нестационарное изменение температуры образца, контакты между болтами и образцом, между болтами и оснасткой, трение между поверхностями контакта, температурная зависимость всех параметров материала, температурное расширение в образце и возможность пластического деформирования образца.

Задача решалась в дух постановках: с учетом оснастки и без учета оснастки (упрощенная формулировка [5]). Использование последней attraktivно при проведении многовариантных серийных расчетов для различных режимов нагружения и кристаллографической ориентаций в целях существенной экономии времени счета. Целью работы являлся подбор расчетной длины образца в упрощенной постановке. Валидность использования упрощенной формулировки основана на сравнении с результатами моделирования напряженно-деформированного состояния с учетом оснастки, а также на сравнении с измеряемыми в экспериментах относительных перемещений двух маркеров.

При решении задачи с учетом оснастки рассматривалась четверть конструкции в силу симметрии по плоскостям xz и yz (см. рис. 5). Оснастка и болты моделировались линейно-упругим материалом (сталь), а для образца использовалась упруго-пластическая модель материала, все свойства которой

зависят от температуры. Задача решалась в трехмерной, квазистатической постановке. В качестве граничных условий задавались условия симметрии: нулевые перемещения по оси y на плоскости xz и по оси x на плоскости yz . На нижней стороне оснастки задавались нулевые перемещения по осям x и z . На шляпку болта задавалось давление 50 МПа, эквивалентное усилию затяжки болта.

В упрощенной постановке (см. рис. 6) рассматривается только образец без оснастки, в котором задавались нулевые перемещения на плоскостях симметрии xz и yz , внешняя грань образца параллельная плоскости симметрии xz была зафиксирована в направлении оси x . Для исключения твердотельных движений также фиксировался ряд точек на этой грани в направлении осей y и z .

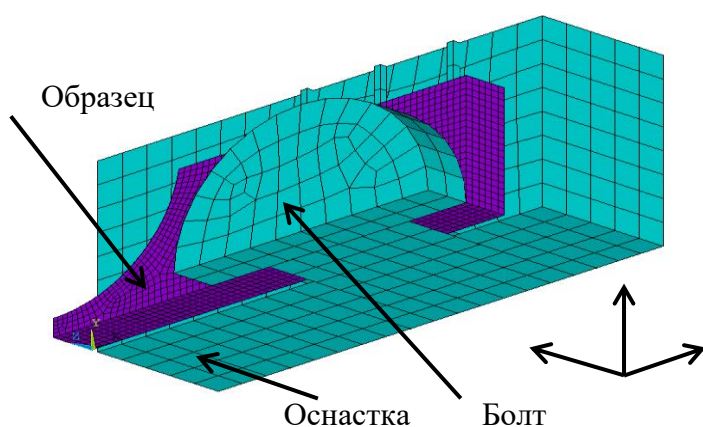


Рис. 5. КЭ модель с учетом оснастки.

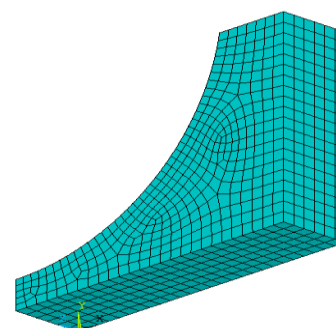


Рис. 6. КЭ модель без учета оснастки (в упрощенной постановке).

В ходе проведения многовариантных вычислительных экспериментов с различными длинами упрощенных моделей образцов было установлено, что наилучшего совпадения удастся достичь при длине 26 мм. Результаты сравнения прогнозов двух моделей для нагрева до 900°C представлены на рис. 7-9. Наблюдается удовлетворительное совпадение.

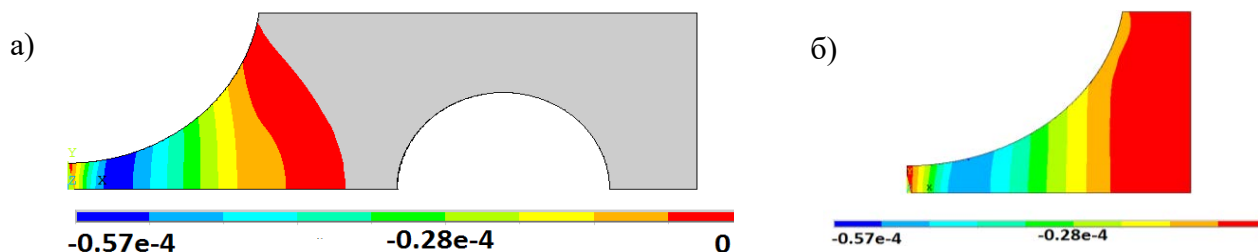


Рис. 7. Осевые перемещения [м] в образце при 900 °С для моделей: а) с оснасткой, б) без оснастки.

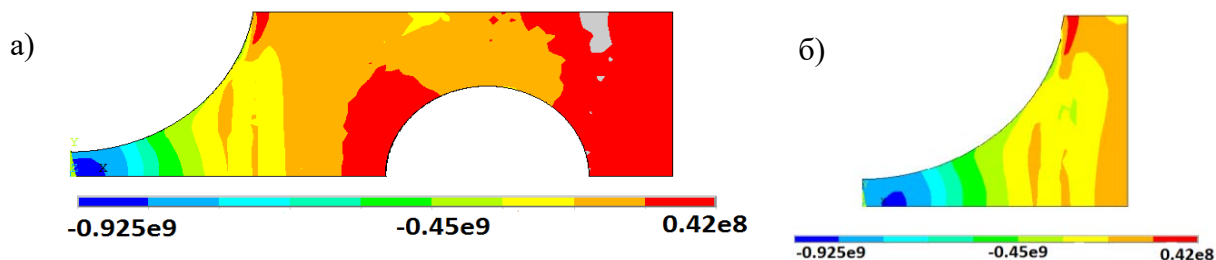


Рис. 8. Осевые напряжения [МПа] в образце при 900 °С для моделей: а) с оснасткой, б) без оснастки.



Рис. 9. Осевые пластические деформации в образце при 900°С для моделей: а) с оснасткой, б) без оснастки.

В дальнейшем планируется произвести проверку полученной эффективной длины упрощенной модели образца для других температурных режимов, материалов, в том числе и для монокристаллов различной кристаллографической ориентации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-08-08779 и стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды НПО ЦКТИ. 2009. Вып. 296. С. 83-91.
2. Getsov L.B., Semenov A.S., Ignatovich I.A. Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 97. С. 88-97.
3. Гецов Л.Б., Михайлов В.Е., Семенов А.С., Кривоносова В.В., Ножницкий Ю.А., Блинник Б.С., Магеррамова Л.А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы // Газотурбинные технологии. 2011. № 8. С. 18-25.
4. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. -М.: Недра, 1996. -С. 189-193.
5. Май Ш., Семенов А.С. Моделирование процессов неупругого циклического деформирования монокристаллических образцов // Материалы XXXIX Недели науки СПбГПУ. 2010. Ч. V. С. 73-74.

Приложение 2

А.В. Савиковский¹, А.С. Семенов¹, Л.Б. Гецов²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

² НПО ЦКТИ

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЫДЕРЖКИ НА ТЕРМОУСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе [1] применяются для изготовления рабочих и направляющих лопаток современных авиационных и стационарных газотурбинных установок (ГТУ). Термоусталостная прочность подобных материалов с ярко выраженной анизотропией и чувствительностью механических свойств к температуре является в настоящее время не до конца изученной. Целью данной работы является исследование влияние выдержки при максимальной температуре на основе деформационного критерия [2,3] термоусталостного разрушения монокристаллов с использованием результатов конечно-элементного (КЭ) моделирования натуральных экспериментов.

Для исследования числа циклов до разрушения при переменных температурах с выдержкой проводятся эксперименты на различных видах образцов, в том числе и на корсетных (плоских) на установке, разработанной в НПО ЦКТИ (см. рис. 1) [4]. Зафиксированный двумя болтами в массивной оснастке корсетный образец (рис. 2) периодически нагревается путем пропускания через него электрического тока. Температурный режим от цикла к циклу автоматически поддерживается постоянным.



Рис. 1. Установка для проведения экспериментов на термическую усталость.

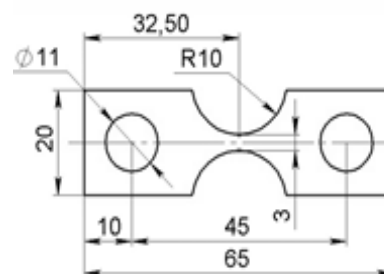


Рис. 2. Геометрия корсетного образца для термоусталостных испытаний.

Моделирование процессов неупругого циклического деформирования корсетных образцов выполнялось с использованием КЭ программного комплекса PANTOCRATOR [5] на основе применения микромеханических (физических) моделей пластичности и ползучести монокристаллов [6, 7]. КЭ расчеты проводились для части корсетного образца (расчетная длина образца составляла 40 мм, см. рис. 3) без учета контакта с оснасткой и фиксирующими болтами. Задачи решались в квазистатической трехмерной постановке.

Исследовалось влияние выдержки от 1 до 5 мин. на число циклов до образования макротрещины в цикле с максимальной температурой 1050°C и размахом температур 350°C (см. рис. 4). Время нагрева в цикле составляло 24 с, время охлаждения – 15 с. Механические свойства у образца соответствовали сплаву ВЖМ4 [8].

В качестве граничных условий задавались нулевые перемещения в направлении оси x на двух боковых гранях образца с нормалью вдоль оси x . Для исключения твердотельных движений также фиксировался ряд точек на этих гранях в направлении осей y и z .

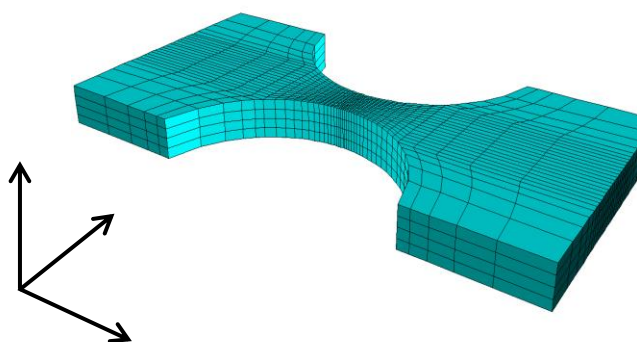


Рис. 3 КЭ-модель корсетного образца для термоусталостных испытаний.

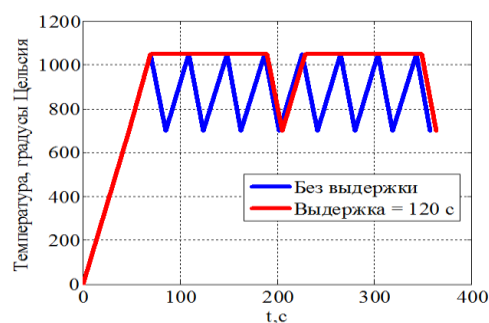


Рис. 4. Максимальная и минимальная температура цикла в центральной точке образца

Полученные в КЭ расчетах распределения полей интенсивностей деформации ползучести, пластической деформации и интенсивности напряжений по Мизесу после 20го цикла при 1050°C в задаче с использованием модели ползучести по Нортону с упрочнением в случаях, когда время выдержки равно 0, представлены на рис. 5, 6, 7 соответственно.

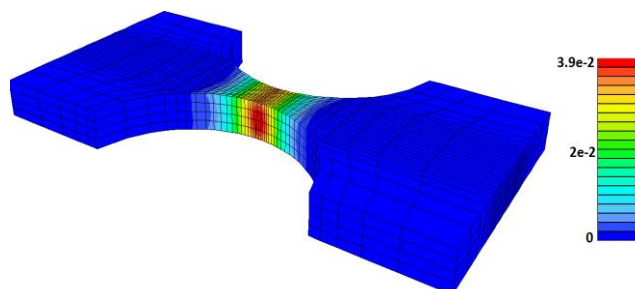


Рис. 5 Интенсивность деформации ползучести после 25го цикла без выдержки.

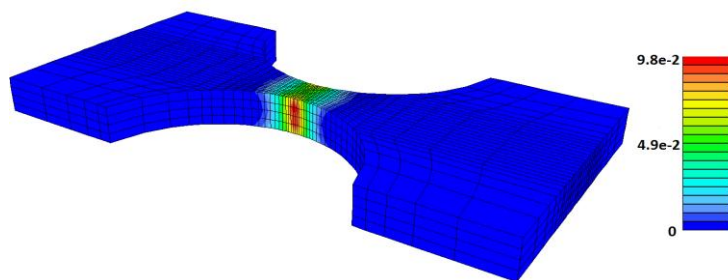


Рис. 6. Интенсивность пластических деформаций после 25го цикла без выдержки.

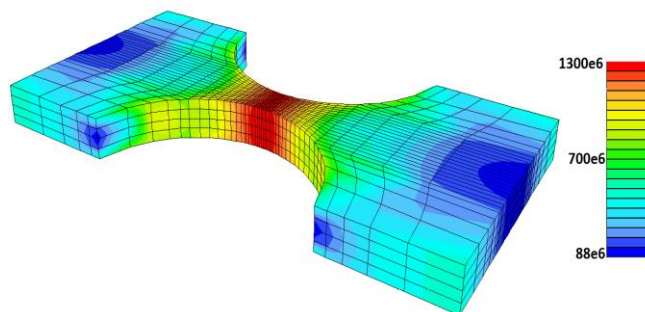


Рис. 7. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу после 25го цикла, Па, без выдержки.

Расчет поврежденности и оценка числа циклов до образования макротрещины производился на основе деформационного четырехчленного критерия [2, 3, 9]:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^p)^k}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^c)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)}, \quad (1)$$

где первый член учитывает изменение пластической деформации в пределах цикла, второй член – изменение деформации ползучести в пределах цикла, третий член – односторонне накопленную пластическую деформацию (рэтчеттинг), четвертый член – односторонне накопленную деформацию ползучести. Число циклов до образования макротрещины N определяется из условия $D = 1$. В качестве эквивалентной деформации рассматривается максимальная сдвиговая деформация $\varepsilon_{eq} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{l}$ в системе скольжения с нормалью к плоскости скольжения \mathbf{n} и направлением скольжения \mathbf{l} .

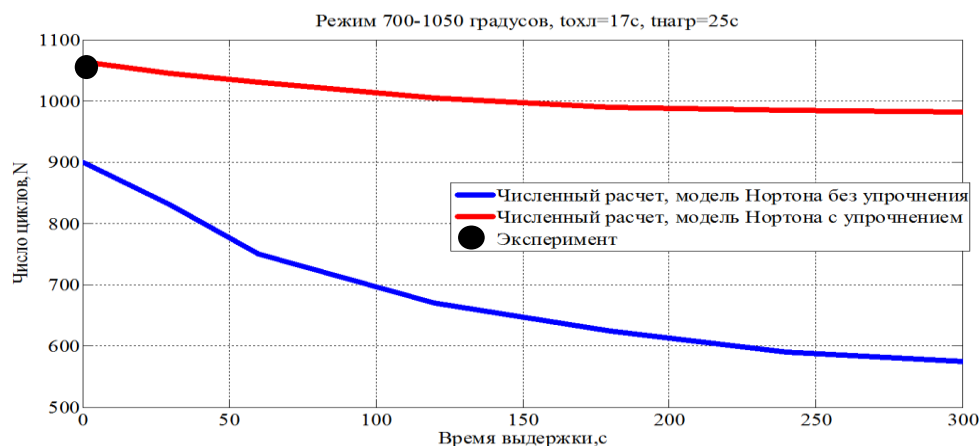


Рис. 8. Сравнение расчета с использованием 2 моделей ползучести с экспериментом.

Результаты расчета показали качественное сходство с экспериментом, однако более слабое влияние выдержки на долговечность указывает на необходимость уточнения свойств материала.

Исследование выполнено при поддержке стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качалов Е.Б. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ. Вып. 296, 2009, С. 83-91.
3. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
4. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин.-М.:Недра, 1996.- с.189-193
5. Семёнов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.
6. Cailletaud G.A. Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals // Int. J. Plast., 1991, 8, 55-73.
7. А.С. Семенов. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.
8. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Светлов И.Л., Демонис И.М. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения. Юбилейный науч.-техн. сб. Авиационные материалы и технологии. М:Труды ВИАМ 2012, С.36-52.
9. Getsov L.B., Semenov A.S., Staroselsky A. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading // Materials and technology. 2008. Vol. 42, p. 3–12.

COMPARATIVE ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF SPECIMENS FOR THERMAL FATIGUE TESTS

Grishchenko A.I.^{a,*}, Savikovskiy A.V.^a, Semenov A.S.^a, Getsov L.B.^b

^a*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Polytechnicheskaya 29, St.Petersburg, 195251, Russia*

^b*Scientific and Development Association on Research and Design of Power Equipment, 3/6 Atamanskaya str., Saint-Petersburg, 191167, Russia*

Abstract

The development of gas turbine engines (GTE) leads to the expanding use of high-temperature superalloys. One of the most important and high-loaded parts of the gas turbine engine is the nozzle and working blades. This is due to the fact that they operate at high variable temperatures and stresses, when the material undergoes significant alternating cyclic plastic and creep deformations. This leads to the need for a thorough study of its thermo-fatigue properties. Estimation of the thermal fatigue strength of single-crystal blades of gas turbines is an actual problem that has not been finally solved. The purpose of this paper is to compare the effectiveness of different types of specimens for thermal fatigue tests.

© 2017 The Authors. Published by Elsevier B.V.

Peer-review under responsibility of the MCM 2017 organizers.

Keywords: thermal fatigue tests, plasticity, creep, strength, superalloy, finite element simulation

1. Introductions

The inhomogeneity of the inelastic strain distribution in samples for thermal fatigue tests leads to inaccuracies in the determination of the material constants used in calculating the durability of structural elements. Detailed analysis of the temperature, stress and strain field distribution in samples allows to evaluate adequately the local characteristics of thermal fatigue, as well as to analyze peculiarities of different types of samples for thermal fatigue tests.

In practice, two thermal fatigue test methods are widely used (see Coffin (1954), Getsov (1976), Dulnev (1980), Rybnikov (2005), Semenov A.S. (2014) et al.). The first method, proposed and developed in Coffin (1954), Dulnev (1980), consists in cyclic heating of a clamped cylindrical specimen with different degrees of thermal constraint (see Fig. 1). Variability of thermal constraint is achieved by the addition of rigidity element (2 in Fig.1). The necessity of adding this element is dictated by the fact that in real constructive elements the temperature deformation does not completely transfer mechanical, but also compensates for the elastic strain of the volume of the part due to the limited stiffness of the coupled volumes of material. As a rule, three types of specimens are used for thermal fatigue tests Coffin (1954), Dulnev (1980) (see Fig. 2).

An important parameter of the experiment is also the moment of fixation of the sample. Depending on the specimen fixation temperature, different coefficients of asymmetry of the cycle R can be realized. So, when the sample is fixed at the minimum value of the temperature, we have a zero-to-compression stress cycle with $R = -\infty$, when the sample is fixed at the maximum value of the temperature, we have the zero-to-tension stress cycle with $R = 0$. In this work the third specimen was observed (Fig 2c).

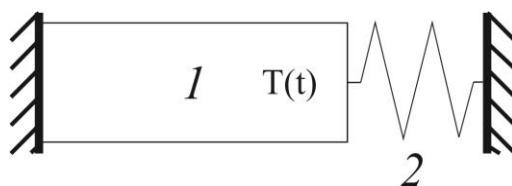


Fig.1. Schematic diagram of specimens for thermal fatigue test fixing. 1 - experimental specimen; 2 – added rigidity element

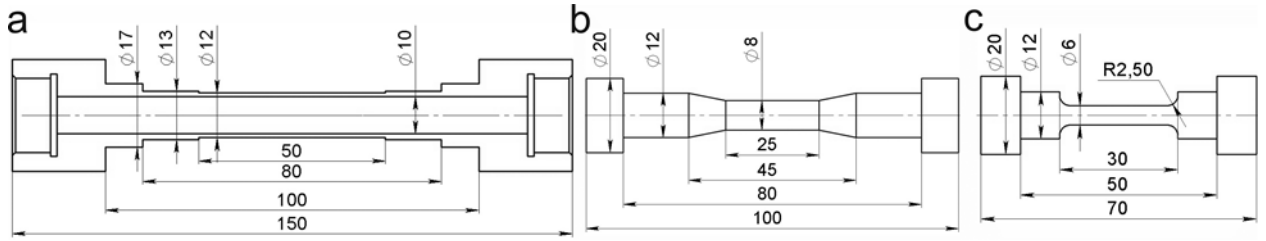


Fig.2. Cylindrical specimens for thermal fatigue test.

The second method uses rigidly fixed corset specimens from one polished surface (Fig. 3). For the tests, the device shown in the Fig. 4 is used. This method is described in detail in Getsov (1976), Rybnikov (2005), Getsov (2008), Getsov (2010) and Semenov (2014).

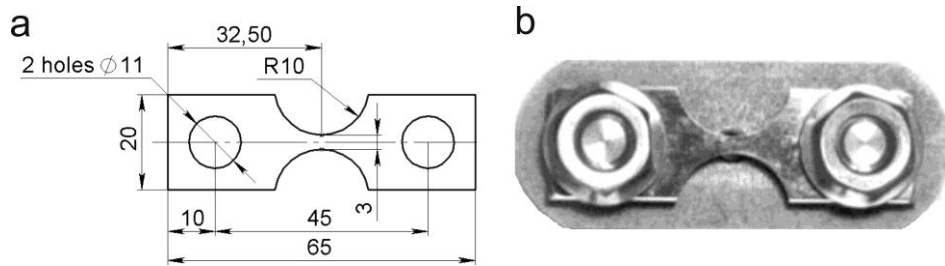


Fig.3. (a) Corset specimen for thermal fatigue test, (b) fixed specimen.

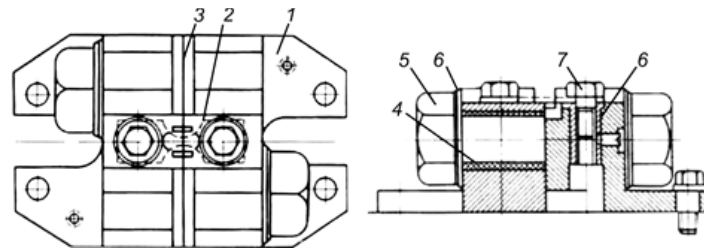


Fig.4. Device for fixing of the corset specimen: 1 - dies; 2 - fixed specimen; 3 - isolating mica separator; 4 - fluoroplastic sleeves; 5 –tightening dies bolts; 6 – isolating washers; 7 - bolts for specimen fixing.

Specimens of polycrystalline superalloy ZHS6F were considered. The high cost and complexity of thermal fatigue tests have led to the need for their numerical modeling. The plastic strain range and one-side accumulated plastic strain define number of cycles for macrocrack initiation. Thermal fatigue criteria are considered in Coffin (1954), Getsov (1971), Manson (1973), Ostergren (1976), Halford (1977), Volkov (2008), Getsov (2009) and Semenov (2014). The finite element (FE) analysis of the stress-strain state of different types of specimens for thermal testing must be carried out.

2. Finite-element formulation of thermal fatigue tests problem

For cylindrical specimens, a half of the sample was considered in the axisymmetric formulation. The flexible element was modeled by the addition of a fictitious material of given rigidity. With the aim of leveling the axial temperature deformations of the fictitious material (this is dictated by the condition of its constant rigidity), the coefficient of temperature expansion is given anisotropic - equal to zero in the longitudinal direction and equal to the thermal expansion coefficient of the base specimen material in the radial direction. FE model of the specimen is shown in Fig. 5a. The temperature distribution along the cylindrical specimen is shown in Fig. 5b. The sample was fixed at the temperature, defined by equation:

$$T_{\text{fix}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{2} \frac{\sigma_{02}(T_{\text{max}})}{\sigma_{02}(T_{\text{min}})} \quad (1)$$

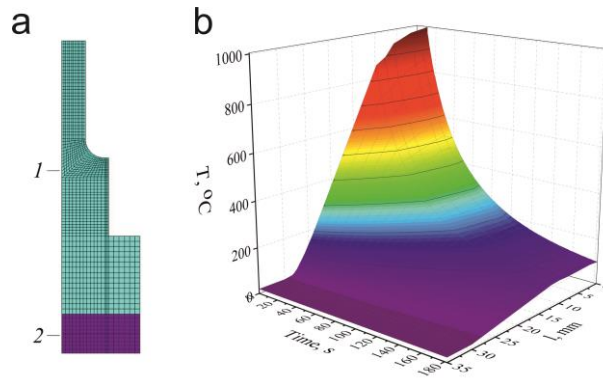


Fig.5. (a) FE model of cylindrical specimen (1 – specimen; 2 - fictitious material of given rigidity); (b) temperature distribution along the cylindrical specimen.

For the corset specimens FE modeling of thermal fatigue tests with taking into account of contact between specimen and its tooling was carried out. The solid model of one fourth of fixed corset specimen is shown in Fig. 6a. The temperature distribution is shown in Fig. 6b.

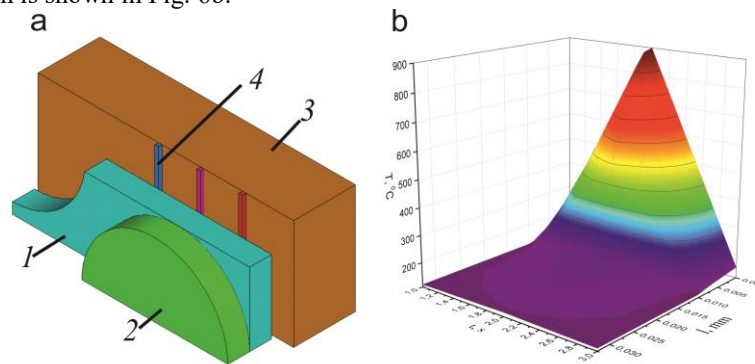


Fig.6. (a) Model of a fixed corset specimen (1 – specimen; 2 - bolts for specimen fixing; 3 – dies; 4 – rib of dies); (b) temperature distribution for the corset specimen.

3. Result of modeling

For both types of specimen, first ten cycles of heating-cooling were modeled. For the cylindrical specimen fields of intensity of stress, total and plastic strains, at the maximum temperature of the first cycle are shown in Fig. 7. It can be seen that the maximum stresses in the working part of the specimen. The field of plastic strain has an inhomogeneous character (Fig. 7c). This can be explained by the inaccuracy in the experimental determination of the temperature distribution along the specimen. Thereby, the obtaining the temperature distribution along the cylindrical specimens by means of of the FE modeling of the electric heating of the specimen and its cooling must be performed, and this is the goal of further research.

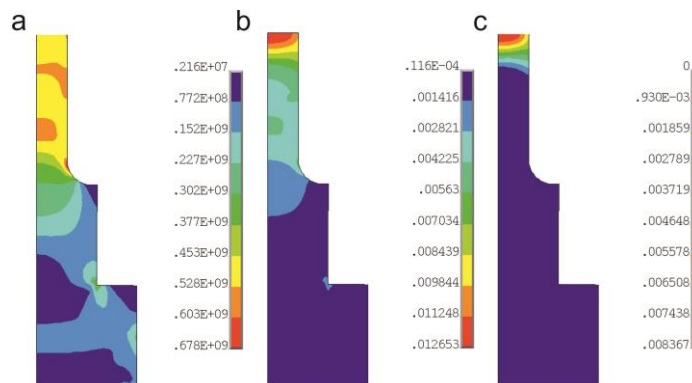


Fig.7. Distributions of von Mises intensity fields in the cylindrical specimen: (a) stress; (b) strain; (c) plastic strain.

The diagrams of axial stress and strain, plastic strain variation over time for the cylindrical specimen are shown in Fig. 8. It can be seen that after the tenth cycle, the plastic strains achieves to 1.5% (Fig 8c). Stress-strain curves are shown in Fig. 9. Deformation process passes into the steady state after second cycle.

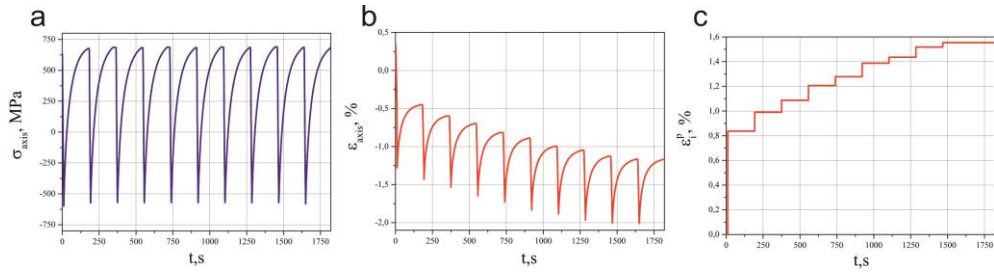


Fig.8. Axial stress (a), strain (b) and plastic strain (c) evolution for the cylindrical specimen.

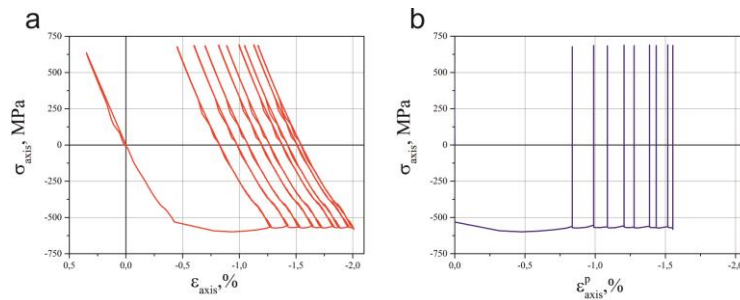


Fig.9. Deformation curves: (a) – axial stress vs. axial strain; (b) – axial stress vs. plastic axial strain for the cylindrical specimen.

The distribution of the von Mises plastic strain intensity along the working part of the cylindrical specimen is shown in Fig. 10 at the maximum temperature of the tenth cycle. The zone of uniform plastic strain (deviation less than 5%) is 2 mm, or 6.6% of the sample working part length. Besides, the zone of inhomogeneous plastic strain is observed in the region of 7 mm. This can be explained by the inhomogeneous of temperature distribution along the specimen.

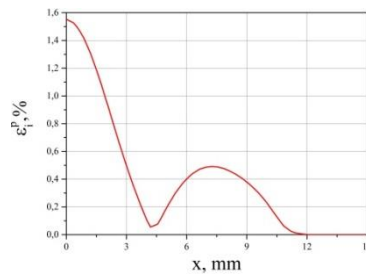


Fig.10. Distribution of the von Mises plastic strain intensity along the working part of the cylindrical specimen.

Stress and strain intensity field distributions in the corset specimen at the maximum temperature of the first cycle are shown in Fig. 11. Fields of von Mises intensity of stress, total and plastic strains in the corset specimen separately are shown in Fig. 12. Maximum stresses are localized in the working part of the specimen. The field of plastic strains in the corset specimen is more homogeneous that in cylindrical specimen (compare Fig. 7c and Fig. 12c).

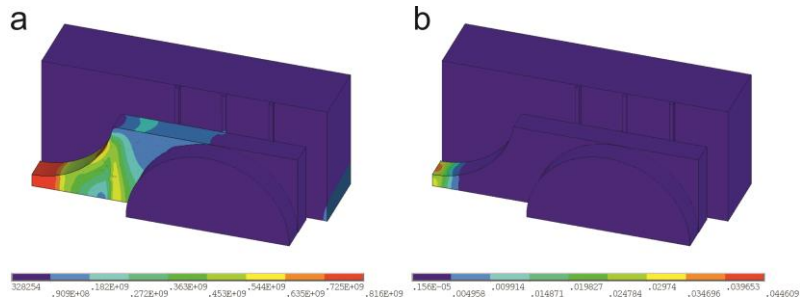


Fig.11. Stress (a) and strain (b) intensity fields of the corset specimen and their tool set at the maximum temperature of the first cycle.

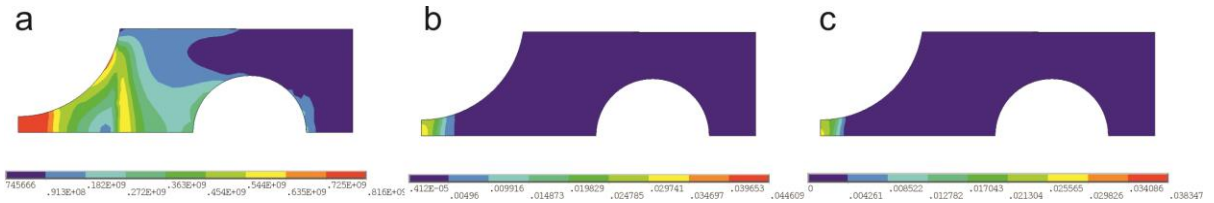


Fig.12. Distributions of von Mises intensity fields in the corset specimen: (a) stress; (b) strain; (c) plastic strain.

The axial stress, total and plastic strain evolutions for the corset specimen are shown in Fig. 13. It can be seen that after the tenth cycle, the plastic strain accumulates to 4% and practically ceased to change after fifth cycle (Fig 13c). Deformation curves are shown in Fig. 14. Deformation process passes into the steady state after fourth cycle.

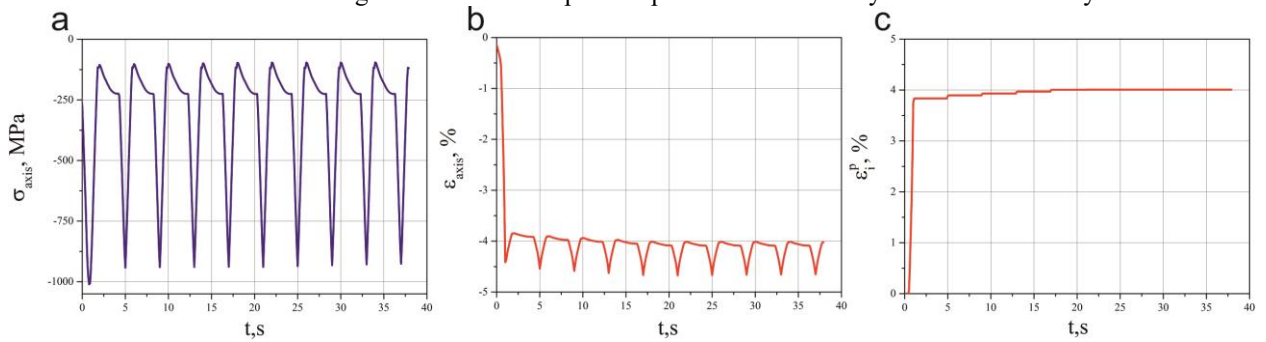


Fig.13. Axial stress (a), strain (b) and plastic strain (c) evolution over time for the corset specimen.

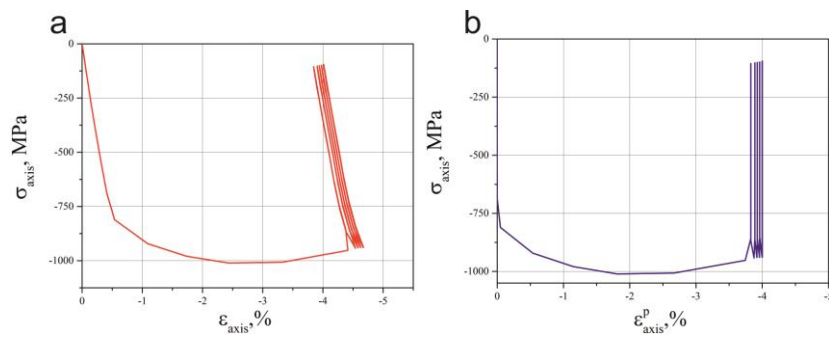


Fig.14. Deformation curves: (a) – axial stress vs. axial strain; (b) – axial stress vs. plastic axial strain for the corset specimen.

The distribution of the von Mises plastic strain intensity along the working part of the corset specimen at the maximum temperature of the tenth cycle is shown in Fig. 15. The zone of uniform plastic strain (deviation less than 5%) is 0.3 mm, or 7.5% of the sample working part length. Plastic strains in the corset specimen are more homogeneous than in cylindrical specimen (compare Fig. 15 and Fig. 10).

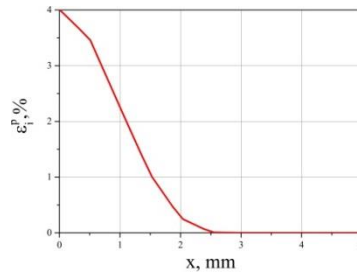


Fig.15. Distribution of the von Mises plastic strain intensity along the working part of the corset specimen.

4. Conclusion

Comparison of the plastic strain inhomogeneity in cylindrical and corset specimens for thermal fatigue tests was carried out. The results of simulations show that both samples have approximately the same small zone of uniform plastic strains (6.6% and 7.5% of specimen working zone respectively). The fields of plastic strains for both specimens have a principle inhomogeneous character. One possible reason is a significant influence of the inhomogeneous temperature distribution along the specimen. Therefore the computation of local maximal plastic strain requires exact evaluation of thermal and stress-strain state that leads to the necessary of finite-element simulation.

Acknowledgements

Work was made with finance support of RFFI (project №15-08-08779 A). Studies of the first three authors are also supported by the SIEMENS Scholarship Program

References

- Coffin L.F. A Study of Cyclic-thermal Stress in Ductile Metal // Journal of Pressure Vessel Technology, Transaction of the ASME. 1954. V. 76. P. 931-950.
- Getsov L.B. About failure criterion at the complex loading program. All-Union working symposium on questions of low-cyclic fatigue. Kaunas; 1971, p. 52-55.
- Dulnev R.A., Kotov P.I. Thermal fatigue of metals // M. Mechanical Engineering, 1980.
- Rybnikov A. I. and Getsov L. B. New technique and results of thermal fatigue tests of superalloys and coatings // Proc. 6th Int. Congr. on Thermal Stresses (May 2005, Vienna, Austria). – 2005. – 1. – P. 305 – 309.
- Semenov A.S., Getsov L.B. Thermal fatigue fracture criteria of single crystal heat-resistant alloys and methods for identification of their parameters // Strength of Materials. 2014/ V. 46(1), P. 38-48.
- Getsov L.B. Materials and strength of gas turbine parts. Rybinsk: Gas turbine technology. 2010
- Getsov L.B., Dobina N. I., Rybnikov A. I., Semenov A. S., Starosel'skii A., and Tumanov N. V. Single-Crystal Alloy Thermal Fatigue Resistance. Strength of materials, 2008, №56 pp. 54-71
- Manson S.S. Fatigue: a complex subject — some simple approximations. Experimental Mechanics, 1965;5(7):193–226.
- Coffin L.F. Prediction parameters and their application to high temperature low cycle fatigue. Proceedings of Second International Conference on Fracture. London: Chapman's Hall; 1969, p. 643-654.
- Ostergren W.J. A damage function and associated failure equations for predicting hold time and frequency effects in elevated temperature low cycle fatigue. J. Testing & Evaluation 1976;4:327-339.
- Halford GR, Saltsman JF, Hirschberg MH. Ductility-Normalized Strain Range. Partitioning Life Relations for Creep-Fatigue Life Predictions. NASA TM-73737. 1977.
- Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. Constitutive equations of viscoelastoplastic continuum with damages. Moscow: Fizmatlit. 2008.
- Getsov L.B., Semenov A.S. Failure criteria of poly- and single-crystal materials under thermocyclic loading. Transact. CKTI 2009;296:83-91.